

Chapitre 1

ANALYSE TEMPORELLE

1-1 ÉQUATIONS D'UN SYSTÈME

Généralités

En un instant donné, l'état d'un système se caractérise par un ensemble de grandeurs physiques $x_1, \dots, x_n$ (positions, vitesses, tensions, courants, températures, ... des éléments mécaniques, électriques, thermiques, ... du système) formant un vecteur $x = [x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n]$ appelé *état*. Cet état peut évoluer d'une manière autonome ou sous l'effet d'actions externes $u_1, \dots, u_p$ (forces, tensions électriques, débit calorifique, ...) formant un vecteur $u = [u_1 ; u_2 ; \dots ; u_p]$ appelé *entrée* ou *action*. L'accroissement dx de l'état entre deux instants voisins t et $t + dt$ dépend des valeurs de x et de u à l'instant t et il est, en première approximation, proportionnel à dt . En d'autres termes, $dx = f_t(x, u).dt$ où f_t est une fonction de $\mathcal{R}^{n+p}$ dans $\mathcal{R}^n$ dépendante des paramètres associés aux éléments constituant le système à l'instant t (masses, raideurs, résistances, capacités, masses calorifiques, ...). Souvent ces paramètres ne se modifient pas au cours du temps et on dit dans ce cas que le système est *invariant*. Pour un tel système, on a $f_t = f$ et $dx = f(x, u).dt, \forall t$. En divisant cette dernière équation par dt on déduit que l'équation d'état d'un système invariant est de la forme :

$$\dot{x} = f(x, u). \quad (1-1)$$

Par la suite nous allons seulement considérer des systèmes invariants pour les raisons suivantes :

- 1) La plupart des systèmes pratiques sont considérés invariants.
- 2) Même pour un système variant, il est souvent possible de subdiviser son temps de fonctionnement en des intervalles tels que dans chacun d'eux le système peut-être supposé invariant.

Ce qui importe généralement l'utilisateur n'est pas nécessairement l'état x mais certaines grandeurs $y_1, \dots, y_q$ liées en tout instant à l'état x et à l'entrée u . Le vecteur $y = [y_1 ; y_2 ; \dots ; y_q]$ est appelé *sortie* ou *réponse* du système. La relation

donnant y en fonction de x et de u est dite *équation de sortie* qui s'écrit :

$$y = g(x, u) \quad (1-2)$$

où g est une application de $\mathcal{R}^{n+p}$ dans $\mathcal{R}^q$.

Il est important de noter que la représentation de l'état d'un système par un vecteur x n'est pas unique. D'abord, tout vecteur x' lié à x par une bijection est aussi une représentation de l'état. D'autre part, certaines composantes de x qui n'ont pas d'effet sur la sortie ou qui ne sont pas affectées par l'entrée peuvent être supprimées.

Systèmes linéaires

Un système est linéaire quand les applications f et g de ses équations (1-1) et (1-2) sont toutes les deux linéaires. De la définition des applications linéaires, $h(a_1v^1 + a_2v^2) = a_1h(v^1) + a_2h(v^2)$, on déduit qu'un système linéaire jouit de l'important principe de superposition suivant :

L'effet d'une combinaison linéaire de causes est égal à la même combinaison linéaire de leurs effets séparés.

Par exemple, si à partir d'un même état initial $x(0)$, l'entrée $u^1(t)$ produit l'état $x^1(t)$ et l'entrée $u^2(t)$ l'état $x^2(t)$, alors l'entrée $a_1u^1(t) + a_2u^2(t)$ produit à partir de $x(0)$ l'état $a_1x^1(t) + a_2x^2(t)$. Ceci n'est pas vrai pour un système non-linéaire.

D'autre part, il est connu qu'une application linéaire h d'un espace vectoriel E dans un autre F peut être représentée par une matrice dont les colonnes sont les images par h des vecteurs de base de E . Par conséquent, pour un système linéaire, les équations (1-1) et (1-2) peuvent se mettre sous la forme :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$$

équivalente à

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1-3)$$

$$y = Cx + Du \quad (1-4)$$

où A, B, C et D sont des matrices réelles de dimensions respectives $n \times n$, $n \times p$, $q \times n$ et $q \times p$.

Linéarisation

En fait, la grande majorité des systèmes pratiques ne sont pas linéaires. Mais en automatique il est souvent possible de remplacer l'objet commandé par un système linéaire. En effet, comme l'objectif principal de l'automatique consiste à maintenir la réponse réelle y_r aussi voisine que possible d'une valeur désirée y_d , il est nécessaire que son entrée u_r et son état x_r restent voisins de l'entrée u_d et de l'état x_d qui produisent y_d c'est-à-dire qui vérifient les équations (1-1) et (1-2) du système :

$$\dot{x}_d = f(x_d, u_d), \quad y_d = g(x_d, u_d).$$

Le vecteur $p_f = [x_d; u_d]$ est appelé *point de fonctionnement*. Pour tout autre point $[x_r; u_r]$ voisin de p_f et vérifiant les équations du système, le développement de premier ordre de Taylor permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \dot{x}_r - \dot{x}_d &= f(x_r, u_r) - f(x_d, u_d) \\ &\approx \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{p_f} (x_r - x_d) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{p_f} (u_r - u_d), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_r - y_d &= g(x_r, u_r) - g(x_d, u_d) \\ &\approx \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{p_f} (x_r - x_d) + \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{p_f} (u_r - u_d), \end{aligned}$$

à condition que f et g soient continument dérivables au point p_f . En désignant par x , u et y les écarts $x_r - x_d$, $u_r - u_d$, $y_r - y_d$ et en posant

$$\begin{aligned} A &= \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{p_f}, & B &= \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{p_f}, \\ C &= \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{p_f}, & D &= \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{p_f} \end{aligned} \quad (1-5)$$

les jacobiens en p_f des fonctions vectorielles f et g par rapport aux vecteurs x et u , on retrouve les formes linéaires (1-3) et (1-4). Ainsi, tant que les vrais vecteurs x_r , u_r et y_r restent voisins des vecteurs désirés x_d , u_d et y_d , les deux systèmes représentés à la figure 1.1 produisent approximativement la même réponse.

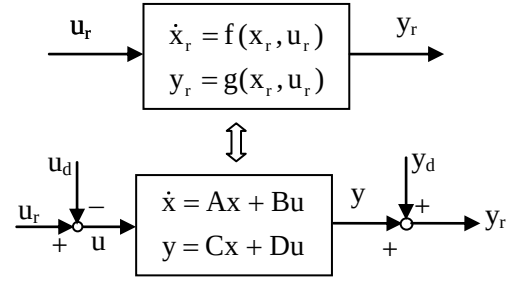


Fig. 1-1 Linéarisation d'un système

Exemple 1-1

La figure 1.2 représente un missile se déplaçant dans un plan vertical. Il a une masse M et un moment d'inertie J par rapport à son centre de gravité G et il est propulsé par la force de réaction f d'un gaz de combustion s'échappant d'une tuyère placée à l'extrémité inférieure de ce missile. La direction α de f se modifie en tournant la tuyère par un moteur non représenté sur la figure.

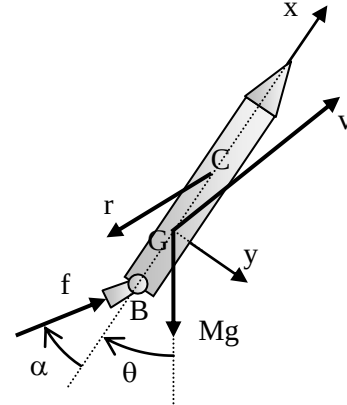


Fig. 1-2 Missile

Pour une vitesse de translation $v = [v_x \ v_y]^t$, l'air s'oppose au mouvement du missile par une force $r = [-k_x |v_x| v_x; -k_y |v_y| v_y]$ appliquée en son centre de poussée C. Soit c la distance entre C et G et b la distance entre G et l'axe B de rotation de la tuyère. Pour établir les équations de ce système appliquons les lois de translation et de rotation de Newton.

Translation selon l'axe x

$$M \frac{dv_x}{dt} = |f| \cos \alpha - M|g| \cos \theta - k_x |v_x| v_x \quad (1-6)$$

Translation selon l'axe y

$$M \frac{dv_y}{dt} = |f| \sin \alpha + M|g| \sin \theta - k_y |v_y| v_y \quad (1-7)$$

Rotation autour de G

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = -b \cdot |f| \sin \alpha - c \cdot k_y |v_y| v_y \quad (1-8)$$

On désire maintenir un régime stationnaire où toutes les variables restent constantes avec une vitesse longitudinale v_x et une inclinaison θ respectivement égales à des valeurs données $v_{xd} > 0$ et $\theta_d > 0$. Si ce régime sera réellement maintenu, les dérivées dans les équations précédentes s'annulent et on obtient 3 équations algébriques à 3 inconnues : v_y , $|f|$ et α . En résolvant ces équations, on tire la force $|f|_d$ et sa direction α_d qui produisent v_{xd} et θ_d et, en plus, on obtient la vitesse transversale v_{yd} qui résulte de ce mouvement. On peut vérifier que $v_{yd} > 0$.

Les entrées (les moyens d'action) et les sorties (les grandeurs qui nous intéressent) de ce système sont respectivement les suivantes :

$$u_r = \begin{bmatrix} u_{1r} \\ u_{2r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |f| \\ \alpha \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad y_r = \begin{bmatrix} y_{1r} \\ y_{2r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ \theta \end{bmatrix}$$

Pour mettre les équations (1-6), (1-7) et (1-8) sous la forme (1-1) d'équations d'état, il suffit pour les deux premières équations de poser $x_{1r} = v_x$, $x_{2r} = v_y$, mais, comme l'équation (1-8) est de second ordre, on la scinde en deux en lui associant deux variables d'état $x_{3r} = \theta$ et $x_{4r} = d\theta/dt$. Ceci conduit aux équations d'état suivantes où l'on a supposé que les variables x_{1r} et x_{2r} sont toujours positives puisqu'elles doivent rester voisines de v_{xd} et v_{yd} .

$$\dot{x}_{1r} = \frac{1}{M} [u_{1r} \cos u_{2r} - M |g| \cos x_{3r} - k_x x_{1r}^2]$$

$$\dot{x}_{2r} = \frac{1}{M} [u_{1r} \sin u_{2r} + M |g| \sin x_{3r} - k_y x_{2r}^2]$$

$$\dot{x}_{3r} = x_{4r}$$

$$\dot{x}_{4r} = \frac{1}{J} [-b \cdot u_{1r} \sin u_{2r} - c \cdot k_y x_{2r}^2]$$

Maintenant, pour linéariser ces équations autour du point de fonctionnement

$$p_f = [x_d; u_d] \\ = [v_{xd}; v_{yd}; \theta_d; \dot{\theta}_d; |f|_d; \alpha_d],$$

on remplace chaque terme h_r par son accroissement autour de h_d :

$$h = h_r - h_d \approx \sum \frac{\delta h_r}{\delta x_{ir}} \bigg|_{p_f} x_i + \sum \frac{\delta h_r}{\delta u_{ir}} \bigg|_{p_f} u_i$$

où $x_i = x_{ir} - x_{id}$ et $u_i = u_{ir} - u_{id}$. Par exemple, le terme $u_{1r} \cos u_{2r}$ sera remplacé par $(\cos u_{2d})u_1 - (u_{1d} \sin u_{2d})u_2$ où $u_1 = u_{1r} - u_{1d}$ et $u_2 = u_{2r} - u_{2d}$. En effectuant ces calculs on trouve la forme (1-3) avec

$$A = \begin{pmatrix} -2k_x v_{xd} / M & 0 & |g| \sin \theta_d & 0 \\ 0 & -2k_y v_{yd} / M & |g| \cos \theta_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2ck_y v_{yd} / J & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \cos \alpha_d / M & -|f|_d \sin \alpha_d / M \\ \sin \alpha_d / M & |f|_d \cos \alpha_d / M \\ 0 & 0 \\ -b \sin \alpha_d / J & -b |f|_d \cos \alpha_d / J \end{pmatrix}$$

Enfin, comme $y_1 = x_1$ et $y_2 = x_3$, l'équation de sortie se met directement sous la forme (1-4) avec

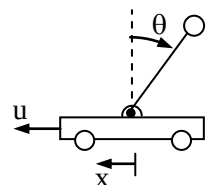
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Remarque

Comme la modélisation analytique d'un système se base généralement sur des hypothèses simplificatrices, elle ne représente la réalité physique que d'une manière plus ou moins approximative. De retour à l'exemple précédent, nous n'avons pas tenu compte des conséquences de la diminution du carburant dans le missile (variation des inerties M et J et déplacement du centre de gravité) comme nous avons négligé l'effet du vent et la décroissance de la densité de l'air avec l'altitude. Il est évident que ceci nous écarte sensiblement de la réalité mais, en contrepartie, un modèle simple rendra plus facile l'élaboration d'une politique de commande. Dans d'autres chapitres, nous traiterons avec détails les problèmes relatifs à l'imperfection du modèle et à l'imprécision de ses paramètres.

EXERCICE 1-1

Un pendule inversé de masse m et de longueur L est articulé sans frottement sur un chariot de masse M poussé par une force u . Écrire et linéariser les équations d'état de ce système.



1-2 RÉPONSE ET MATRICE DE TRANSFERT

Matrice de transition

Considérons un système linéaire invariant d'état initial x^0 soumis à une entrée $u(t)$ et cherchons son état $x(t)$ en un instant quelconque $t \geq 0$.

La transformée de Laplace de son équation d'état $\dot{x} = Ax + Bu$ est :

$$s.x(s) - x^0 = Ax(s) + Bu(s)$$

de laquelle on tire

$$x(s) = \Phi(s)x^0 + \Phi(s)Bu(s) \quad (1-9)$$

où $\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$ est la transformée de Laplace d'une matrice $\Phi(t)$ appelée *matrice de transition*. Quand $u = 0$, $\Phi(t)$ associe à l'état initial x^0 ce que devient cet état à l'instant t : $x(t) = \Phi(t)x^0$.

Comme $(sI - A)\Phi(s) = I$, on a :

$$\begin{aligned} s\Phi(s) &= I + A\Phi(s) \\ &= I + \frac{A}{s}[I + A\Phi(s)] \\ &= I + \frac{A}{s} + \frac{A^2}{s^2}[I + A\Phi(s)] \dots \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\Phi(s) = \frac{I}{s} + \frac{A}{s^2} + \frac{A^2}{s^3} + \dots + \frac{A^{k-1}}{s^k} + \dots$$

$$\text{et} \quad \Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = e^{At}. \quad (1-10)$$

Il est facile de démontrer que l'exponentielle matricielle e^{At} définie par (1-10) jouit de propriétés similaires à celles d'une exponentielle scalaire e^{at} , à savoir :

$$\begin{aligned} e^{A0} &= I, & e^{A(t_1+t_2)} &= e^{At_1} e^{At_2} = e^{At_2} e^{At_1}, \\ (e^{At})^{-1} &= e^{-At}, & \frac{d(e^{At})}{dt} &= Ae^{At} = e^{At} A. \end{aligned}$$

Réponse

Sachant que la transformée de Laplace d'un produit de convolution $f * h = \int_0^t f(t-\tau)h(\tau)d\tau$ de deux fonctions f et h est le produit algébrique des

transformées de Laplace de ces fonctions, on déduit de (1-9) et de (1-10) que

$$x(t) = e^{At}x^0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau. \quad (1-11)$$

D'après (1-4), la réponse du système à l'instant t est donc :

$$\begin{aligned} y(t) &= Ce^{At}x^0 \\ &+ \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ &+ Du(t) \end{aligned} \quad (1-12)$$

Le premier terme du second membre est la *réponse libre* due seulement à l'état initial. Le deuxième terme et le troisième constituent la *réponse forcée* due seulement à l'entrée u . L'effet cumulé en t des entrées $u(\tau)$ apparaissant avant t ($\tau < t$) est donné par le second terme et l'effet instantané de u à l'instant t est donné par le troisième terme. Souvent ce dernier est nul.

Matrice de transfert

Appliquons sur la $k^{\text{ème}}$ entrée d'un système linéaire une distribution de Dirac $\delta(t)$ sans rien appliquer sur les autres entrées. Le vecteur d'entrée s'écrit alors $u(t) = \delta(t).e^k$ où e^k est le vecteur unitaire canonique dont toutes les composantes sont nulles sauf la $k^{\text{ème}}$ qui vaut 1. Comme, pour toute fonction f et tout instant t ,

$$\int_0^t f(\tau)\delta(\tau)d\tau = f(0),$$

on déduit de (1-12) que, si le système est initialement inerte ($x^0 = 0$), sa réponse à $\delta(t).e^k$ est donnée par le vecteur à q composantes :

$$\begin{aligned} g^k(t) &= Ce^{At}Be^k + De^k\delta(t) \\ &= Ce^{At}b^k + d^k\delta(t) \end{aligned} \quad (1-13)$$

où b^k et d^k sont les $k^{\text{èmes}}$ colonnes respectivement des matrices B et D . Le vecteur $g^k(t)$ est appelée la réponse impulsionnelle à la $k^{\text{ème}}$ entrée et la matrice $G(t)$ dont les colonnes sont les vecteurs $g^k(t)$, $k = 1, \dots, p$, est appelée *la réponse impulsionnelle* du système. Tenant compte de (1-13),

$$\begin{aligned} G(t) &= [g^1(t) \quad \dots \quad g^p(t)] \\ &= Ce^{At}B + D\delta(t) \end{aligned} \quad (1-14)$$

Maintenant, d'après (1-12) et (1-14), la réponse à un vecteur d'entrée quelconque $u(t)$ d'un système initialement inerte est le produit de convolution :

$$y(t) = \int_0^t G(t - \tau)u(\tau)d\tau \quad (1-15)$$

dont la transformée de Laplace est :

$$y(s) = G(s).u(s) . \quad (1-16)$$

La matrice $G(s)$, transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle $G(t)$, est appelée la *fonction (matrice) de transfert* du système. Elle associe à la transformée de Laplace $u(s)$ d'une entrée la transformée de Laplace $y(s)$ de la réponse correspondante quand l'état initial est nul. Un élément $g_{ik}(s)$ de $G(s)$ est la fonction de transfert du système mono-variable d'entrée u_k et de sortie y_i .

L'expression de $G(s)$ peut être obtenue à partir des équations d'état par transformation de Laplace de (1-14). Sachant que la transformée de Laplace de $\delta(t)$ est égale à 1, on a :

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D \\ &= \frac{C[\text{adj}(sI - A)]B}{\det(sI - A)} + D \end{aligned} \quad (1-17)$$

où $\text{adj}(sI - A)$ et $\det(sI - A)$ sont respectivement l'adjoint (matrice des cofacteurs) et le déterminant de la matrice $(sI - A)$. Ce dernier est un polynôme $\pi(s)$ de degré n appelé *polynôme caractéristique* du système. Les racines de ce polynôme, appelées *pôles* de $G(s)$, sont les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de A par définition de ces valeurs. D'où

$$\pi(s) = \det(sI - A) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i) . \quad (1-18)$$

D'autre part, un élément de $\text{adj}(sI - A)$ étant un cofacteur de $sI - A$ (déterminant d'une sous matrice $(n-1) \times (n-1)$), $C[\text{adj}(sI - A)]B$ est une matrice $q \times p$ dont les éléments sont des polynômes $q_{ik}(s)$ de degré strictement inférieur à n . Par conséquent, tenant compte de (1-17) et (1-18) et en désignant par d_{ik} les éléments de D , un élément de $G(s)$ est une fonction rationnelle :

$$g_{ik}(s) = \frac{q_{ik}(s)}{\pi(s)} + d_{ik} .$$

Après simplification éventuelle des facteurs communs à $q_{ik}(s)$ et $\pi(s)$, on obtient :

$$g_{ik}(s) = \frac{n_{ik}(s)}{\Delta_{ik}(s)} + d_{ik} \quad (1-19)$$

où les polynômes $n_{ik}(s)$ et $\Delta_{ik}(s)$ sont premiers entre eux avec le degré de $n_{ik}(s)$ est strictement inférieur au degré de $\Delta_{ik}(s)$. D'où la fonction de transfert $G(s)$ tend vers la matrice finie D quand $s \rightarrow \infty$ et on dit que $G(s)$ est *propre*. Elle est dite *strictement propre* quand $D = 0$.

Exemple 1-2

Considérons un système linéaire à deux entrées et deux sorties dont les équations d'état sont définies par les matrices :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ C &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Pour appliquer (1-17), commençons par le calcul de $\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$. On trouve :

$$\Phi(s) = \begin{pmatrix} \frac{s+3}{s^2+4s+5} & 0 & \frac{2}{s^2+4s+5} \\ \frac{-1}{(s+1)(s^2+4s+5)} & \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s^2+4s+5} \\ \frac{-1}{s^2+4s+5} & 0 & \frac{s+1}{s^2+4s+5} \end{pmatrix}$$

D'où

$$\begin{aligned} G(s) &= C\Phi(s)B + D \\ &= \begin{pmatrix} \frac{s+4}{s^2+4s+5} & \frac{s^2+5s+4}{s^2+4s+5} \\ \frac{s^2+4s+4}{s^2+4s+5} & \frac{-(s+1)}{s^2+4s+5} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et $y_F(s) = G(s)u(s)$

où y_F est la réponse forcée. Par transformation inverse de Laplace, on obtient la réponse temporelle $y_F(t)$ du système à l'entrée $u(t)$ quand son état initial $x^0 = 0$.

Quand $x^0 \neq 0$, il est nécessaire d'ajouter à la réponse $y_F(t)$ précédente la réponse libre $y_L(t) = Ce^{At}x^0$. La matrice de transition $\Phi(t) = e^{At}$ s'obtient par transformation de Laplace inverse de $\Phi(s)$ en remplaçant chaque élément de cette matrice par sa transformée inverse. Par exemple,

$$1/(s^2 + 4s + 5) = 1/[(s + 2)^2 + 1] \rightarrow e^{-2t} \sin t$$

On trouve

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \varphi_c + 3\varphi_s & 0 & 2\varphi_s \\ \frac{1}{2}[-e^{-t} + \varphi_c + 3\varphi_s] & e^{-t} & \varphi_s \\ -\varphi_s & 0 & \varphi_c + 3\varphi_s \end{pmatrix}$$

avec

$$\varphi_c = e^{-2t} \cos t \quad \text{et} \quad \varphi_s = e^{-2t} \sin t$$

Ainsi la réponse totale est donnée par

$$y(t) = y_F(t) + y_L(t).$$

Matlab permet d'éviter ces longs calculs.

L'instruction `-ss-` (state space), définit le système « sys » par ses matrices d'état :

```
>> A = [-1 0 2; 0 -1 1; -1 0 -3];
>> B = [1 0; -1 2; 0 -1];
>> C = [1 0 -1; 0 0 1]; D = [0 1; 1 0];
>> sys = ss(A, B, C, D);
```

`-tf-` (transfer function) produit la fonction de transfert de « sys » :

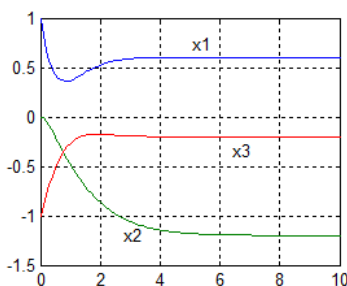
```
>> G = tf(sys)
```

`-lsim-` (linear simulation) calcule l'état x et la réponse y durant un temps t pour un état initial x^0 et une entrée u :

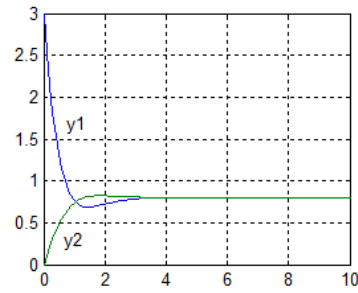
```
>> x0 = [1 0 -1];
>> t = 0 : 0.1 : 10;
>> u = [ones(size(t)); exp(-2*t)];
>> [y, t, x] = lsim(sys, u, t, x0);
```

Enfin `-plot-` représente chaque composante de x et de y en fonction de t :

```
>> plot(t, x)
```



```
>> plot(t, y)
```



Détermination directe de la fonction de transfert

La fonction de transfert d'un système peut être déterminée directement sans passer par les équations d'état comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 1-3

Le circuit de la figure 1.3 est alimenté par un générateur de tension E et un générateur de courant I . Posons u_1 la tension de E et y_1 le courant qui le traverse, u_2 le courant de I et y_2 la tension à ses bornes et déterminons la matrice de transfert $G(s)$ entre l'entrée $u = [u_1; u_2]$ et la sortie $y = [y_1; y_2]$.

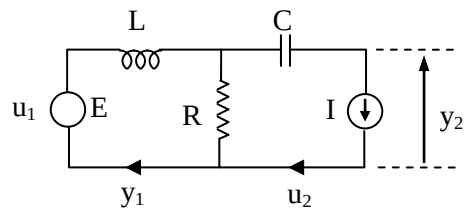


Fig. 1-3 Circuit à 2 entrées deux sorties

Rappelons que l'impédance de l'inductance est Ls et celle de la capacité est $1/Cs$ et supposons que le système est initialement inerte, c'est-à-dire la charge de C et le courant dans L sont nuls à l'instant initial (énergie emmagasinée nulle).

Pour obtenir la première colonne de G on annule u_2 . Dans ce cas, le courant à travers R est y_1 et la tension aux bornes de C reste nulle. D'où

$$y_1 = \frac{1}{Ls + R} u_1 \quad \text{et} \quad y_2 = Ry_1 = \frac{R}{Ls + R} u_1$$

Pour obtenir la deuxième colonne de G on annule u_1 . Dans ce cas L et R seront en parallèle ayant à leurs bornes la tension :

$$v = -\frac{RLs}{Ls + R} u_2$$

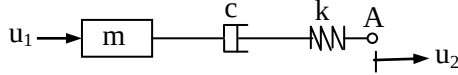
$$\text{D'où} \quad y_2 = v - \frac{1}{Cs} u_2 = -\frac{RLCs^2 + Ls + R}{LCs^2 + RCs} u_2$$

et
$$y_1 = \frac{-v}{Ls} = \frac{R}{Ls + R} u_2.$$

On arrive donc à la fonction de transfert suivante :

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{Ls + R} & \frac{R}{Ls + R} \\ \frac{R}{Ls + R} & -\frac{RLCs^2 + Ls + R}{LCs^2 + RCs} \end{bmatrix}$$

EXERCICE 1-2



Les entrées de ce système sont la force u_1 appliquée à la masse et le déplacement u_2 du point A. Ses sorties sont le déplacement y_1 de la masse et la dilatation y_2 du ressort. Si $m = 1\text{Kg}$, $c = 20\text{N/(m/s)}$ et $k = 500\text{ N/m}$, (a) écrire la matrice de transfert et (b) l'expression de la réponse libre quand à l'instant initial, la masse est au repos et le ressort est dilaté de 20 cm.

Identification

Le système de l'exemple précédent est simple et régit par des lois physiques connues ce qui a permis d'établir analytiquement sa fonction de transfert. Pour un système complexe fonctionnant selon des lois mal connues, le recours à l'expérience devient indispensable et la détermination de la fonction de transfert à partir de données expérimentales est appelée *identification*. Les méthodes d'identification qui constituent une discipline à part entière sortent du cadre de ce cours mais, à titre indicatif, montrons comment peut-on déterminer les éléments $g_{ik}(t)$ de la réponse impulsionnelle $G(t)$ afin de déduire $G(s)$. Par définition, $g_{ik}(t)$ est le signal qui apparaît à la $i^{\text{ème}}$ sortie quand on applique à la $k^{\text{ème}}$ entrée une impulsion de Dirac $\delta(t)$. Malheureusement, $\delta(t)$ n'est pas un signal physiquement réalisable. Par contre, il est possible de produire un signal voisin d'un *bruit blanc* $b(t)$. Ce dernier est un signal aléatoire vérifiant par définition les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \forall t, t_1, t_2 \quad \mathbb{E}[b(t)] &= 0 \\ \text{et} \quad \mathbb{E}[b(t_1)b(t_2)] &= \sigma^2 \delta(t_2 - t_1) \end{aligned} \quad (1-20)$$

où $\mathbb{E}$ désigne l'espérance mathématique (moyenne) et σ^2 la variance (puissance moyenne) de b .

À partir d'un état initial nul, en appliquant sur la

$k^{\text{ème}}$ entrée un bruit blanc $b(t)$ de puissance σ^2 , les autres entrées restant nulles, on obtient à la $i^{\text{ème}}$ sortie la réponse (voir (1-15))

$$y_i(t) = \int_0^t g_{ik}(t - \tau) b(\tau) d\tau.$$

D'où, tenant compte de (1-20), on a pour tout t'

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[y_i(t)b(t - t')] &= \int_0^t g_{ik}(t - \tau) \mathbb{E}[b(\tau)b(t - t')].d\tau, \\ &= \sigma^2 \int_0^t g_{ik}(t - \tau) \delta(t - t' - \tau) d\tau, \end{aligned}$$

donc

$$\mathbb{E}[y_i(t)b(t - t')] = \sigma^2 g_{ik}(t'). \quad (1-21)$$

Le premier membre de cette équation est appelée la *fonction de corrélation* entre l'entrée k et la sortie i et il est désigné par $R_{ik}(t')$. En mesurant la sortie y_i aux instants $t_1, t_2, \dots, t_N$ et l'entrée b aux instants $t_1 - t', t_2 - t', \dots, t_N - t'$, on estime cette fonction en t' par

$$R_{ik}(t') \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_i(t_j) b(t_j - t').$$

De (1-21) on tire $g_{ik}(t') = R_{ik}(t')/\sigma^2$ et par transformation de Laplace (ou son approximation) on déduit les éléments $g_{ik}(s)$ de la fonction de transfert $G(s)$. La question maintenant est de savoir comment associer des équations d'état à une fonction de transfert obtenue d'une manière directe, analytiquement ou par identification.

1-3 RÉALISATION D'UNE FONCTION DE TRANSFERT

Nous avons vu au paragraphe précédent que la fonction de transfert obtenue à partir des équations d'état est nécessairement rationnelle et propre ($\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) < \infty$). Par conséquent, pour pouvoir associer des équations d'état à une fonction de transfert $G(s)$ (obtenue d'une manière directe ou par identification), il est nécessaire qu'elle soit rationnelle et propre c'est-à-dire ayant des éléments de la forme :

$$g_{ik}(s) = \frac{n_{ik}(s)}{\Delta_{ik}(s)} + d_{ik}$$

avec $\deg(n_{ik}) < \deg(\Delta_{ik})$. On appelle *réalisation* de $G(s)$ un quadruplet de matrices $\Gamma = (A, B, C, D)$ définissant des équations d'état dont la fonc-

tion de transfert est $G(s)$. Comme le vecteur x qui caractérise l'état d'un système n'est pas unique, il en est de même de la réalisation Γ de $G(s)$. Soit $n(\Gamma)$ le nombre de composantes du vecteur d'état x d'une réalisation Γ . Si, pour toute autre réalisation Γ' , $n(\Gamma) \leq n(\Gamma')$, on dit que Γ est une *réalisation minimale* de $G(s)$.

Règles générales

Les règles suivantes permettent de déduire la réalisation d'état d'un système complexe à partir des réalisations des sous-systèmes qui le constituent.

Réalisation de $F.G(s)$ et $F + G(s)$

Soit (A, B, C, D) une réalisation de $G(s)$ et F une matrice constante. La réponse de G à une entrée u étant $Cx + Du$, les réponses de $F.G(s)$ et $F + G(s)$ à cette entrée sont respectivement $FCx + FDu$ et $Cx + (D + F)u$. On en déduit les correspondances suivantes :

$$\begin{aligned} F.G(s) &\leftarrow (A, B, FC, FD), \\ F + G(s) &\leftarrow (A, B, C, D + F). \end{aligned} \quad (1-22)$$

Réalisation de $G_1(s) + G_2(s)$

La réponse y d'une fonction de transfert $G(s) = G_1(s) + G_2(s)$ à une entrée u est la somme des réponses y^1 et y^2 de G_1 et G_2 à la même entrée u . Si $\Gamma_1 = (A_1, B_1, C_1, D_1)$ est la réalisation de $G_1(s)$ et $\Gamma_2 = (A_2, B_2, C_2, D_2)$ la réalisation de $G_2(s)$, la réalisation $\Gamma = (A, B, C, D)$ de $G(s)$ s'obtient en écrivant :

$$y = y^1 + y^2 = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} + (D_1 + D_2)u$$

avec

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u.$$

D'où

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}, \quad D = D_1 + D_2. \end{aligned}$$

Souvent on représente la réalisation en groupant ses matrices dans un tableau à 4 cases :

$$G_1 + G_2 \leftarrow \left(\begin{array}{cc|cc} A_1 & 0 & B_1 & \\ 0 & A_2 & B_2 & \\ \hline C_1 & C_2 & D_1 + D_2 & \end{array} \right). \quad (1-23)$$

Réalisation de $G_2(s)G_1(s)$

La réponse y de $G(s) = G_2(s)G_1(s)$ à une entrée u est la réponse y^2 de $G_2(s)$ à la réponse y^1 de $G_1(s)$ à u . En d'autres termes :

$$\begin{aligned} y &= y^2 = C_2 x^2 + D_2 y^1, \\ &= C_2 x^2 + D_2 (C_1 x^1 + D_1 u), \\ &= \begin{bmatrix} D_2 C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} + D_2 D_1 u, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= A_1 x^1 + B_1 u, \\ \dot{x}^2 &= A_2 x^2 + B_2 y^1 = A_2 x^2 + B_2 (C_1 x^1 + D_1 u). \end{aligned}$$

D'où

$$G_2 G_1 \leftarrow \left(\begin{array}{cc|cc} A_1 & 0 & B_1 & \\ B_2 C_1 & A_2 & B_2 D_1 & \\ \hline D_2 C_1 & C_2 & D_2 D_1 & \end{array} \right). \quad (1-24)$$

Réalisation de $G^{-1}(s)$

La réponse y^- de $G^{-1}(s)$ à une entrée u^- est égale à l'entrée u de $G(s)$ qui produit la réponse $y = u^-$. En d'autres termes :

$$y^- = u \quad \text{et} \quad u^- = y = Cx + Du$$

$$\Rightarrow y^- = -D^{-1}Cx + D^{-1}u^-$$

avec

$$\dot{x} = Ax + Bu = Ax + B(-D^{-1}Cx + D^{-1}u^-)$$

D'où

$$G^{-1} \leftarrow \left(\begin{array}{c|c} A - BD^{-1}C & BD^{-1} \\ \hline -D^{-1}C & D^{-1} \end{array} \right). \quad (1-25)$$

Il est évident que cette réalisation n'est possible que si G et D sont des matrices carrées inversibles.

Exemple 1-4

Soit $\Gamma = (A, B, C, 0)$ la réalisation d'une fonction de transfert $G(s)$ strictement propre. Posons $G^*(s) = [G(-s)]^T$ et déterminons une réalisation de la fonction de transfert

$$G_H(s) = [\gamma^2 I - G^*(s)G(s)]^{-1}, \quad \gamma^2 = c^{te}.$$

Comme $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ et que la transposée de l'inverse d'une matrice est l'inverse de sa transposée ($I = (AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T \Rightarrow (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$), on a :

$$G^*(s) = [G(-s)]^T = -B^T (sI - (-A^T))^{-1} C^T$$

$$\Rightarrow G^* \leftarrow \left(\begin{array}{c|c} -A^T & -C^T \\ \hline B^T & 0 \end{array} \right).$$

Appliquons (1-24) puis (1-22):

$$G^*G \leftarrow \left(\begin{array}{cc|c} A & 0 & B \\ -C^T C & -A^T & 0 \\ \hline 0 & B^T & 0 \end{array} \right),$$

$$\gamma^2 I - G^*G \leftarrow \left(\begin{array}{cc|c} A & 0 & B \\ -C^T C & -A^T & 0 \\ \hline 0 & -B^T & \gamma^2 I \end{array} \right).$$

Donc, d'après (1-25),

$$G_H(s) = (\gamma^2 I - G^*G)^{-1}$$

$$\leftarrow \left(\begin{array}{cc|c} A & BB^T/\gamma^2 & B/\gamma^2 \\ -C^T C & -A^T & 0 \\ \hline 0 & B^T/\gamma^2 & I/\gamma^2 \end{array} \right) \quad (1-26)$$

Cette réalisation, dite *hamiltonienne*, jouera un rôle important dans les prochains chapitres.

EXERCICE 1-3

Soit (A, B, C, D) la réalisation de G . Écrire les réalisations de $G^{-1}G$ et de GG^{-1} . Sous quelle condition la sortie y de $G^{-1}G$ (resp. GG^{-1}) est égale à son entrée u ?

Nous allons maintenant construire des réalisations de formes simples, facilement manipulables mais non nécessairement minimales. Sachant que pour toute réalisation $\Gamma = (A, B, C, D)$ $D = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s)$, le problème revient à déterminer les

matrices A, B, C qui réalisent la fonction de transfert strictement propre

$$G_0(s) = G(s) - D = C(sI - A)^{-1}B$$

dont les éléments ont la forme :

$$g_{ik}(s) = \frac{n_{ik}(s)}{\Delta_{ik}(s)}$$

où $n_{ik}(s)$ et $\Delta_{ik}(s)$ sont premiers entre eux et $\deg(n_{ik}) < \deg(\Delta_{ik})$.

On peut obtenir ces réalisations particulières à partir de la réalisation des colonnes ou des lignes de $G_0(s)$. Ceci peut se faire de plusieurs manières selon la forme désirée de la réalisation. Les trois

formes que nous allons donner sont dites *canoniques*.

Forme compagne de contrôlabilité

La réalisation d'une colonne peut se faire selon la procédure détaillée dans l'exemple suivant.

Exemple 1-5

Considérons la matrice de transfert strictement propre à deux entrées et deux sorties

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{2s+1}{s(s+1)} & \frac{s+2}{(s+1)(s+3)} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{s^2+4}{s(s+1)^2} \end{bmatrix}.$$

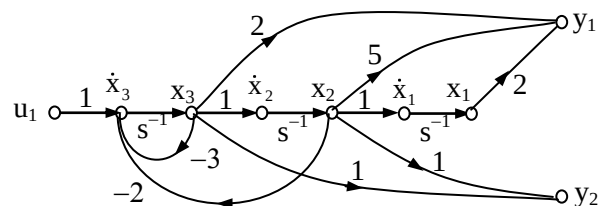
La première colonne $g_{\bullet 1}(s)$ est la fonction de transfert entre la première entrée u_1 et le vecteur de sortie y . En mettant en facteur le dénominateur commun de ses éléments, on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{pmatrix} = \frac{1}{s(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} (2s+1)(s+2) \\ s(s+1) \end{bmatrix} u_1(s)$$

$$= \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 2s} \begin{bmatrix} 2s^2 + 5s + 2 \\ s^2 + s \end{bmatrix} u_1(s)$$

$$= \frac{1}{1 + 3s^{-1} + 2s^{-2}} \begin{bmatrix} 2s^{-1} + 5s^{-2} + 2s^{-3} \\ s^{-1} + s^{-2} \end{bmatrix} u_1(s).$$

Cette relation peut être représentée par le graphe suivant où toutes les boucles passent par le premier nœud et leurs gains sont les opposés des termes du dénominateur. Les gains des chemins vers y_1 et y_2 sont les termes des numérateurs.



Les variables d'état x_1, x_2, x_3 sont les sorties des intégrateurs dont les entrées sont donc les dérivées de ces variables. À partir de ce graphe, on tire les équations d'état suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= -0x_1 - 2x_2 - 3x_3 + u_1, \end{aligned}$$

et
$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 + 5x_2 + 2x_3, \\ y_2 = 0x_1 + x_2 + x_3. \end{cases}$$

La réalisation (A_1, B_1, C_1) de la colonne $g_{\bullet 1}(s)$ est donc

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

On voit d'après cet exemple que toute colonne peut être réalisée sous la forme suivante appelée *forme de contrôlabilité* :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} b_{10} & b_{11} & \cdots & b_{1,n-2} & b_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{q0} & b_{q1} & \cdots & b_{q,n-2} & b_{q,n-1} \end{bmatrix}. \quad (1-27)$$

La dernière ligne de A est formée par les opposés des coefficients du dénominateur commun de la colonne (sans tenir compte du coefficient 1 de s^n)

$$\Delta(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0$$

La $i^{\text{ème}}$ ligne de C est formée par les coefficients du $i^{\text{ème}}$ numérateur de la colonne :

$$n_i(s) = b_{i,n-1}s^{n-1} + \cdots + b_{ii}s + b_{i0}$$

et les composantes de B sont nulles sauf la dernière qui vaut 1.

Exemple 1-6

En appliquant la règle (1-27) précédente, la réalisation de la deuxième colonne $g_{\bullet 2}(s)$ de la matrice de transfert $G(s)$ de l'exemple 1-5 s'obtient en écrivant

$$g_{\bullet 2}(s) = \frac{1}{s(s+3)(s+1)^2} \begin{bmatrix} s(s+1)(s+2) \\ (s^2+4)(s+3) \end{bmatrix},$$

$$= \frac{1}{s^4 + 5s^3 + 4s^2 + 3s} \begin{bmatrix} s^3 + 3s^2 + 2s \\ s^3 + 3s^2 + 4s + 12 \end{bmatrix}.$$

D'où

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0 & -3 & -4 & -5 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 12 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Ayant les réalisations des deux colonnes, la réalisation $(A, B, C, 0)$ de $G(s)$ s'obtient en groupant leurs réalisations comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -4 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 12 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Forme compagne d'observabilité

On dit que la réalisation (A, B, C, D) d'une matrice de transfert $G(s)$ a la forme d'observabilité si sa *duale* (A^T, C^T, B^T, D^T) a la forme de contrôlabilité. Comme

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

et que la transposée de l'inverse d'une matrice est l'inverse de sa transposée, on a

$$G^T(s) = B^T(sI - A^T)^{-1}C^T + D^T$$

d'où (A^T, C^T, B^T, D^T) est la réalisation de $G^T(s)$. Ainsi, la forme d'observabilité de $G(s)$ s'obtient à partir de la forme de contrôlabilité de $G^T(s)$ comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 1-7

La transposée de la matrice de transfert de l'exemple 1-5 est

$$G^T(s) = \begin{bmatrix} \frac{2s+1}{s(s+1)} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{s+2}{(s+1)(s+3)} & \frac{s^2+4}{s(s+1)^2} \end{bmatrix}$$

Ses colonnes s'écrivent :

$$\frac{1}{s^3 + 4s^2 + 3s} \begin{pmatrix} 2s^2 + 7s + 3 \\ s^2 + 2s \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{s^4 + 4s^3 + 5s^2 + 2s} \begin{pmatrix} s^3 + 2s^2 + s \\ s^3 + 2s^2 + 4s + 8 \end{pmatrix}.$$

De ces expressions, on obtient directement la réalisation de contrôlabilité $(A^T, C^T, B^T, 0)$ de $G^T(s)$ et par transposition on déduit la réalisation d'observabilité $(A, B, C, 0)$ de $G(s)$ avec

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 8 \\ 1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

EXERCICE 1-4

Considérant les lignes de $G(s)$, énoncer une règle semblable à celle de la forme de contrôlabilité pour construire sa forme d'observabilité.

Forme canonique de Jordan (ou modale)

On procède ici par lignes en décomposant leurs éléments en facteurs simples selon la procédure détaillée dans l'exemple suivant.

Exemple 1-9

Considérons la matrice de transfert

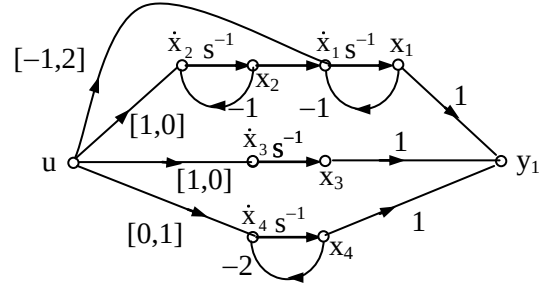
$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{2s+1}{s(s+1)^2} & \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{1}{(s+2)(s+3)} & \frac{2s^2+4}{(s+2)^3} \end{bmatrix}.$$

Pour réaliser la première ligne $g_{1\bullet}(s)$, on commence par décomposer ses éléments en facteurs simples puis on groupe sous forme vectorielle les termes de même dénominateur :

$$y_1 = \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{(s+1)^2} \right] \frac{2}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)} u$$

$$= \left(\frac{[-1 \ 2]}{(s+1)} + \frac{[1 \ 0]}{(s+1)^2} \right) u + \frac{[1 \ 0]}{s} u + \frac{[0 \ 1]}{(s+2)} u.$$

Le graphe de cette relation à 3 termes est composé de 3 sous-graphes en parallèle :



On lit sur ce graphe les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 + [-1, 2]u \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + [1, 0]u \\ \dot{x}_3 &= [1, 0]u \\ \dot{x}_4 &= -2x_4 + [0, 1]u \\ y_1 &= x_1 + x_3 + x_4. \end{aligned}$$

La réalisation $(A_1, B_1, C_1, 0)$ de $g_{1\bullet}(s)$ est donc

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = [1 \ 0 \ 1 \ 1].$$

À remarquer que ces matrices sont subdivisées en blocs chacun étant relatif à un pôle de $g_{1\bullet}(s)$ c.à.d. à une branche du graphe ci-dessus.

On voit d'après cet exemple que toute ligne de $G(s)$ peut être réalisée sous la forme dite de *Jordan* qui s'obtient

1) en décomposant la ligne en termes simples :

$$g(s) = \sum_{k=1}^r g_k(s) \quad \text{avec} \quad g_k(s) = \sum_{j=1}^{n_k} \frac{\alpha_{kj}}{(s - \lambda_k)^j},$$

λ_k est un pôle de multiplicité n_k et α_{kj} un vecteur ligne constant ($\lambda_k \in \mathcal{C}$ et $\alpha_{kj} \in \mathcal{C}^p$).

2) La réalisation d'un terme $g_k(s)$ est de la forme

$$A_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_k & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_k \end{bmatrix}, \quad B_k = \begin{bmatrix} \alpha_{k1} \\ \alpha_{k2} \\ \vdots \\ \alpha_{k(n_k-1)} \\ \alpha_{kn_k} \end{bmatrix}$$

$$C_k = [1 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 0] \quad (1-28)$$

- 3) La réalisation de la ligne $g(s)$ se déduit par juxtaposition des réalisations de ses termes $g_k(s)$.

Exemple 1-10

Pour obtenir la réalisation de la deuxième ligne $g_{2\bullet}(s)$ de la matrice de transfert de l'exemple 1-9, on écrit :

$$g_{2\bullet}(s) = \left[\frac{1}{s+2} + \frac{-1}{s+3} \quad \frac{2}{s+2} + \frac{-8}{(s+2)^2} + \frac{12}{(s+2)^3} \right]$$

$$= \frac{[-1 \ 0]}{s+3} + \frac{[1 \ 2]}{s+2} + \frac{[0 \ -8]}{(s+2)^2} + \frac{[0 \ 12]}{(s+2)^3}$$

En appliquant la règle (1-38) à chaque pôle, on obtient la réalisation $(A_2, B_2, C_2, 0)$ de $g_{2\bullet}(s)$ avec

$$A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -8 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = [1 \ 1 \ 0 \ 0]$$

On obtient la réalisation $(A, B, C, 0)$ de $G(s)$ par groupement des réalisations de ses lignes :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -8 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

EXERCICE 1-5

Réaliser sous les trois formes de contrôlabilité, d'observabilité et de Jordan la matrice

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{2s+1}{(s^2+4)(s+2)} & \frac{s^2+1}{(s+2)^2} \end{bmatrix}$$

Matrice de Jordan

La matrice A de la forme de Jordan est donc diagonale en blocs, chaque bloc étant de la forme A_k définie dans (1-28). Comme les colonnes de A sont les images des vecteurs de la base V par rapport à laquelle est écrite A , les vecteurs $v^{k1}, v^{k2}, \dots, v^{kn_k}$ de V relatifs au bloc A_k vérifient les équations suivantes :

$$\begin{aligned} Av^{k1} &= \lambda_k v^{k1} \\ Av^{k2} &= v^{k1} + \lambda_k v^{k2} \\ &\vdots \\ Av^{kn_k} &= v^{k(n_k-1)} + \lambda_k v^{kn_k}. \end{aligned} \quad (1-29)$$

Par conséquent, v^{k1} est un vecteur propre de A relatif à λ_k et les vecteurs $v^{k2}, \dots, v^{kn_k}$, appelés vecteurs propres généralisés, se déduisent de v^{k1} en résolvant successivement les équations

$$(A - \lambda_k I)v^{ki} = v^{k(i-1)}, \quad i = 2, \dots, n_k. \quad (1-30)$$

Inversement, considérons une matrice carrée A de forme quelconque et désignons par $v^{11}, \dots, v^{r1}$ ses vecteurs propres indépendants de valeurs propres respectives $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ (non nécessairement distinctes). En résolvant successivement les équations (1-30) pour chaque vecteur propre v^{k1} de A , on obtient une famille de vecteurs

$$V = \{v^{11}, \dots, v^{1n_1}, \dots, v^{k1}, \dots, v^{kn_k}, \dots, v^{r1}, \dots, v^{rm_r}\}$$

où n_k est le plus grand entier pour lequel (1-30) admet une solution. On démontre alors que la famille V constitue une base dans $\mathcal{C}^n$. Les vecteurs de cette base vérifient les équations (1-29) $\forall k$. D'où, en désignant par T la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de V , les équations (1-29) pour $k = 1, \dots, r$ sont équivalentes à l'égalité matricielle $AT = T\mathcal{A}$ où $\mathcal{A} = T^{-1}AT$ est la forme de Jordan de la matrice A .

Exemple 1-11

Soit
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & -3 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres λ_k et les vecteurs propres correspondants v^{k1} s'obtiennent en résolvant les équations $\det(A - \lambda I) = 0$ et $(A - \lambda_k I)v^{k1} = 0$ ou à l'aide de l'instruction « eig » de Matlab. Il est important de rappeler que le nombre v des vecteurs propres indépendants relatifs à une valeur propre λ peut être inférieur à la multiplicité m de λ . Pour cette raison le nombre de vecteurs propres indépendants peut être inférieur à la dimension n de l'espace et dans ce cas il est nécessaire d'ajouter d'autres vecteurs pour compléter la base. La matrice A considérée a une valeur propre simple 2 de vecteur propre $v^{11} = [0 \ 1 \ -1 \ 0]^T$ et une valeur propre triple -1 ayant deux vecteurs propres indépendants $v^{21} = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ et $v^{31} = [0 \ 2 \ 0 \ 1]^T$. Pour compléter la base dans laquelle A s'écrit sous la forme de Jordan, on associe à la valeur propre -1 un troisième vecteur v^{22} solution de l'équation (1-29) :

$$(A + I)v^{22} = v^{21}.$$

On obtient $v^{22} = [1 \ 0 \ 1 \ 0]^T$ (à noter que l'équation $(A + I)v^{23} = v^{22}$ n'a pas de solution).

Ainsi, en posant $T = [v^{11} \ v^{21} \ v^{22} \ v^{31}]$, on vérifie que la matrice $\mathcal{A} = T^{-1}AT$ est effectivement de la forme de Jordan à 3 blocs :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1-4 Contrôlabilité

Un système est dit à *état contrôlable* si, partant d'un état initial quelconque x^0 , il est possible de l'amener à n'importe quel état final x en un temps fini arbitraire t . En d'autres termes,

$$\forall x^0, \forall x, \forall t, \exists \text{ une entrée } u(\tau) \\ \text{telle que } x(0) = x^0 \text{ et } x(t) = x.$$

Nous savons que l'état x à l'instant t d'un système linéaire d'équation $\dot{x} = Ax + Bu$, est donné en fonction de l'état initial x^0 et de l'entrée u par

$$x = e^{At}x^0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau. \quad (1-31)$$

Les états x et x^0 sont connus ainsi que l'instant final t . Il s'agit de savoir sous quelle condition il existe une entrée $u(\tau)$, $0 \leq \tau \leq t$, qui vérifie l'équation (1-31). Pour alléger cette équation, choisissons l'origine de l'espace au point initial x^0 , c.à.d. posons $x^0 = 0$. En effectuant le changement de variable $t - \tau \rightarrow \tau$ et en désignant $u(t - \tau)$ par $u'(\tau, t)$, nous obtenons :

$$x = \int_0^t e^{A\tau}Bu'(\tau, t)d\tau. \quad (1-32)$$

Voyons donc sous quelle condition il existe une fonction $u'(\tau, t)$ qui vérifie (1-32).

Gramien de contrôlabilité

Un système d'état x défini par $\dot{x} = Ax + Bu$ est contrôlable si et seulement si la matrice

$$\mathcal{G}_c(t) = \int_0^t e^{A\tau}BB^Te^{A^T\tau}d\tau, \quad (1-33)$$

appelée *gramien de contrôlabilité*, est inversible $\forall t$ (c.à.d. $\text{rang}(\mathcal{G}_c(t)) = n \ \forall t$).

Preuve

a) Supposons que $\mathcal{G}_c(t)$ est inversible $\forall t$ et choisissons u' de la forme

$$u'(\tau, t) = B^Te^{A^T\tau}h(t)$$

où la fonction $h(t)$ doit être déterminée de sorte à satisfaire (1-32). En remplaçant dans cette équation u' par son expression, on obtient :

$$x = \left(\int_0^t e^{A\tau}BB^Te^{A^T\tau}d\tau \right) h(t)$$

$$\text{ou } x = \mathcal{G}_c(t)h(t).$$

Comme $\mathcal{G}_c(t)$ est inversible $\forall t$, la fonction $h(t)$ et, par conséquent, u se déterminent d'une manière unique pour tout instant final t et quel que soit l'état final x . Le système est donc contrôlable.

b) Inversement, supposons que le système est contrôlable et montrons que le gramien $\mathcal{G}_c(t)$ est inversible $\forall t$. S'il ne l'était pas, il existerait un vecteur $\xi \neq 0$ tel que $\mathcal{G}_c(t)\xi = 0$, d'où

$$\begin{aligned} \xi^T \mathcal{G}_c(t) \xi &= \int_0^t \xi^T e^{A\tau}BB^Te^{A^T\tau} \xi d\tau = \int_0^t \|\xi^T e^{A\tau}B\|^2 d\tau = 0 \\ &\Rightarrow \xi^T e^{A\tau}B = 0 \quad \forall \tau \in [0, t]. \end{aligned}$$

Or le système étant contrôlable, il existe une entrée u' qui vérifie (1-32) $\forall x$. Tenant compte de l'égalité précédente, on aurait :

$$\xi^T X = \int_0^t \xi^T e^{A\tau} B u'(\tau, t) d\tau = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow \xi = 0$$

ce qui contredit $\xi \neq 0$. ■

Les définitions suivantes, sur lesquelles nous reviendrons ailleurs, interviennent dans deux autres propriétés utiles du gramien.

1) Une matrice $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est *définie positive* (dp) si, pour tout vecteur non nul $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi^T Q \xi > 0$. On écrit $Q > 0$.

2) Un système est *stable* si, pour tout état initial x^0 , l'état libre $e^{At} x^0$ tend vers 0 quand t tend vers l'infini, c.à.d. si et seulement si $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} = 0$. On dit dans ce cas que la matrice A est stable ou de Hurwitz.

Autres propriétés de G_c

P1. Un système est contrôlable si et seulement si son gramien $G_c(t)$ est défini positif $\forall t$.

Preuve

De la définition (1-33) on déduit que

$$\xi^T G_c(t) \xi = \int_0^t (B^T e^{A^T \tau} \xi)^T B^T e^{A \tau} \xi d\tau$$

$$= \int_0^t \|B^T e^{A \tau} \xi\|^2 d\tau \geq 0 \quad \forall t, \forall \xi.$$

a) $G_c(t)$ inversible $\Rightarrow G_c(t) > 0$. En effet, s'il existait un vecteur $\xi \neq 0$ tel que $\xi^T G_c(t) \xi = 0$, la relation ci-dessus impliquerait $B^T e^{A \tau} \xi = 0 \forall \tau$ d'où, d'après (1-33), il existerait $\xi \neq 0$ tel que $G_c(t) \xi = 0$ en contradiction avec $G_c(t)$ inversible.

b) $G_c(t) > 0 \Rightarrow G_c(t)$ inversible. En effet, s'il existait un vecteur $\xi \neq 0$ tel que $G_c(t) \xi = 0$, on aurait $\xi^T G_c(t) \xi = 0$ en contradiction avec $G_c(t) > 0$. ■

P2. Si A est stable, l'équation dite de *Liapunov*,

$$AX + XA^T = -BB^T, \quad (1-34)$$

admet une solution unique donnée par

$$X = \lim_{t \rightarrow \infty} G_c(t).$$

Preuve

a) En multipliant (1-33) par la matrice A et en intégrant par parties, on obtient :

$$A G_c(t) = e^{At} B B^T e^{A^T t} \Big|_0^t - \int_0^t e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} A^T d\tau$$

$$\text{ou } A G_c(t) + G_c(t) A^T = e^{At} B B^T e^{A^T t} \Big|_0^t.$$

Le système étant stable, $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} = 0$ et la matrice $X = \lim_{t \rightarrow \infty} G_c(t)$ vérifie (1-34). La solution existe.

b) D'après la définition (1-33) du gramien, si X est une solution de (1-34), on a :

$$G_c(t) = - \int_0^t e^{A\tau} (AX + XA^T) e^{A^T \tau} d\tau$$

$$= - \int_0^t \frac{d}{d\tau} (e^{A\tau} X e^{A^T \tau}) d\tau = - e^{At} X e^{A^T t} \Big|_0^t.$$

Comme A est stable, $X = \lim_{t \rightarrow \infty} G_c(t)$. La solution est unique. ■

Des deux propriétés précédentes on déduit que pour un système stable et contrôlable la solution X de l'équation de Lyapunov (1-34) est unique et définie positive. Inversement, nous montrerons au chapitre suivant que si (1-34) admet une solution X définie positive, A est stable, (A, B) est contrôlable et X est unique.

Exemple 1-12

a) Considérons le système stable (de valeurs propres -1 et -2)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [a \quad b], D = 0.$$

La transformée inverse de $(sI - A)^{-1}$ est

$$e^{A\tau} = \begin{pmatrix} e^{-\tau} & -e^{-\tau} + e^{-2\tau} \\ 0 & e^{-2\tau} \end{pmatrix}$$

$$\text{et } e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} = 2 \begin{pmatrix} e^{-4\tau} & e^{-4\tau} \\ e^{-4\tau} & e^{-4\tau} \end{pmatrix}.$$

L'intégrale de cette matrice est le gramien

$$G_c(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - e^{-4t} & 1 - e^{-4t} \\ 1 - e^{-4t} & 1 - e^{-4t} \end{pmatrix}$$

dont le rang est $1 < n = 2$. Le système n'est donc pas contrôlable. D'autre part,

$$X = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{G}_c(t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

vérifie (1-34) mais elle n'est pas définie positive car $\xi^T X \xi = (\xi_1 + \xi_2)^2 / 4$ s'annule pour tout ξ appartenant à la droite $\xi_1 + \xi_2 = 0$.

- Pour un système « sys » stable, l'instruction `>> gram(sys,'c')` produit le gramien limite X de contrôlabilité.

Matrice de contrôlabilité

Au lieu de calculer par intégration le gramien $\mathcal{G}_c(t)$ puis tester sa régularité pour tout instant t , il est plus commode de tester directement la régularité d'une matrice constante M_c appelée *matrice de contrôlabilité*. Pour construire cette matrice, rappelons d'abord le théorème suivant.

Théorème de Cayley-Hamilton

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres d'une matrice carrée A et

$$\begin{aligned} \pi(s) &= (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_n) \\ &= s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 \end{aligned}$$

son polynôme caractéristique. Alors

$$\begin{aligned} \pi(A) &= (A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \dots (A - \lambda_n I) \\ &= A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I = 0. \end{aligned} \quad (1-35)$$

Preuve

$\pi(A) = 0$ signifie que l'image par la matrice $\pi(A)$ de tout vecteur de base est nulle. Or nous avons vu que pour toute matrice carrée A , il existe une base $\{v^1, \dots, v^n\}$ qui réduit A à la forme de Jordan. Les vecteurs v^i de cette base vérifient les équations suivantes (voir (1-38)) :

$$Av^1 = \lambda_1 v^1,$$

$$Av^i = \varepsilon_i v^{i-1} + \lambda_i v^i, \quad i = 2, \dots, n$$

où ε_i est une constante valant 0 ou 1. D'où

$$(A - \lambda_1 I)v^1 = 0$$

$$(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I)v^2 = \varepsilon_2 (A - \lambda_1 I)v^1 = 0$$

⋮

$$\prod_{i=1}^n (A - \lambda_i I)v^n = \varepsilon_n \dots \varepsilon_3 \varepsilon_2 (A - \lambda_1 I)v^1 = 0$$

En remarquant que le produit $(A - \lambda_i I)(A - \lambda_j I)$ est commutatif, on déduit des égalités précédentes que $\pi(A)v^k = 0$ pour tout $k = 1, \dots, n$, donc $\pi(A) = 0$. ■

D'après ce théorème, toute matrice carrée A annule son polynôme caractéristique comme le font ses valeurs propres. D'autre part, partant de l'égalité (1-35), il est facile de déduire par récurrence que, pour toute puissance $k \geq n$, la matrice A^k peut s'écrire comme une combinaison des matrices $I, A^1, \dots, A^{n-1}$. Ce fait nous aidera à démontrer le théorème suivant.

Test de contrôlabilité de Kalman

Le couple (A, B) est contrôlable si et seulement si la matrice $(n \times np)$ définie par

$$M_c = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] \quad (1-36)$$

est de rang n . M_c est appelée *matrice de contrôlabilité*.

Preuve

a) $\text{rg}(M_c) = n \Rightarrow (A, B)$ contrôlable $\Leftrightarrow \mathcal{G}_c(t) > 0$.

En effet, s'il existait un vecteur $\xi \neq 0$ tel que

$$\xi^T \mathcal{G}_c(t) \xi = \int_0^t \|\xi^T e^{A\tau} B\|^2 d\tau = 0,$$

la fonction continument dérivable $\xi^T e^{A\tau} B$ et ses dérivées $\xi^T A e^{A\tau} B, \xi^T A^2 e^{A\tau} B, \dots$ seraient nulles $\forall \tau \in [0, t]$. Quand $\tau \rightarrow 0$, on aurait $\xi^T B = \xi^T AB = \xi^T A^2 B = \dots = 0$ d'où $\xi^T M_c = 0$ pour un certain $\xi \neq 0$ ce qui est en contradiction avec $\text{rg}(M_c) = n$.

b) (A, B) contrôlable $\Rightarrow \text{rg}(M_c) = n$. En effet, s'il existait un vecteur $\xi \neq 0$ tel que $\xi^T M_c = 0$ c'est-à-dire $\xi^T A^k B = 0 \quad \forall k = 0, \dots, n-1$, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on aurait $\xi^T A^k B = 0 \quad \forall k$ et $\xi^T (\sum A^k \tau^k / k!) B = \xi^T e^{A\tau} B = 0 \quad \forall \tau$. Mais ceci implique, d'après (1-33), qu'il existe $\xi \neq 0$ tel que $\xi^T \mathcal{G}_c(t) = 0$ en contradiction avec $\mathcal{G}_c(t)$ inversible $\Leftrightarrow (A, B)$ contrôlable. ■

Une réalisation (A, B) de la forme de contrôlabilité est contrôlable car, comme nous allons le voir dans l'exemple ci-dessous, sa matrice M_c comporte des colonnes formant une sous matrice carrée diagonale en blocs chacun de la forme :

$$[b^i \quad Ab^i \quad \dots \quad A^{n-1}b^i] = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 1 & * & \dots & * \end{bmatrix} \quad (\diamond)$$

où * représente un scalaire quelconque. Les déterminants de ces blocs n'étant pas nuls, M_c est de rang n .

Exemples 1-12

a) La matrice de contrôlabilité relative à

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

est

$$M_c = \begin{array}{c|cc|cc|cc} & B & AB & A^2B & & & \\ \hline & 1 & 0 & -2 & 3 & 4 & -9 \\ \hline & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Comme les 3 premières colonnes de M_c sont indépendantes, on a $\text{rang}(M_c) = n = 3$ et l'état du système est contrôlable.

b) Considérons la forme de contrôlabilité

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

M_c peut s'écrire sous la forme :

$$M_c = [b^1, Ab^1, b^2, Ab^2] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & d \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est diagonale en blocs chacun de la forme (♦) ci-dessus. Elle est évidemment de rang 4 et le couple (A, B) est contrôlable.

c) La matrice de contrôlabilité du système monovarié suivant

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [a \quad b], \quad D = 0$$

est
$$M_c = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

On voit que $\text{rang}(M_c) = 1 < n = 2$ et l'état de ce système n'est pas contrôlable. À remarquer que sa fonction de transfert est

$$\begin{aligned} g(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\ &= [a \quad b] \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{(a+b)(s+1)}{(s+1)(s+2)} = \frac{(a+b)}{(s+2)}. \end{aligned}$$

À cause de la simplification par $(s+1)$, $g(s)$ est d'ordre 1 (le degré de son dénominateur) et on peut la réaliser par une seule variable d'état au lieu de deux, l'autre variable n'étant pas contrôlable par l'entrée. La réalisation (A, B, C, D) ci-dessus n'est donc pas minimale, par contre, les réalisations (A_1, B_1, C_1, D_1) et (A_2, B_2, C_2, D_2) suivantes le sont :

$$A_1 = [-2], \quad B_1 = [1], \quad C_1 = [a+b], \quad D_1 = 0$$

$$A_2 = [-2], \quad B_2 = [a+b], \quad C_2 = [1], \quad D_2 = 0.$$

- L'instruction

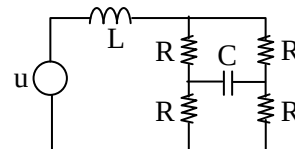
`>> Mc = ctrb(A,B)`

de Matlab calcule la matrice de contrôlabilité M_c dont le rang s'obtient par l'instruction

`>> rank(Mc).`

EXERCICE 1-6

En désignant par x_1 le courant traversant l'inductance et par x_2 la tension aux bornes de la capacité, écrire les équations d'état du circuit suivant. Est-il contrôlable ? Donner une interprétation physique de ce résultat.



Contrôlabilité partielle

Quand un système est contrôlable, on peut trouver une commande u qui amène en un temps arbitraire donné chaque composante de l'état x à prendre une valeur désirée. Pour cette raison, on dit qu'un système contrôlable est *entièrement contrôlable*. Cependant, si le système n'est pas contrôlable, il est généralement partiellement contrôlable dans le sens que certaines composantes de x peuvent être conduites par la commande u à avoir des valeurs désirées tandis que les autres composantes ne sont pas affectées par u . Le théorème suivant permet de séparer les variables d'état contrôlables de celles qui ne le sont pas.

Décomposition de Kalman

Si le couple (A, B) n'est pas contrôlable, il existe une base dans laquelle les matrices A et B s'écrivent sous la forme :

$$\mathcal{Q}_c = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1-37)$$

où le couple (A_{11}, B_1) est contrôlable.

Preuve

a) Soit $r = \text{rg}(M_c) < n$. Toute colonne de la matrice de contrôlabilité M_c est une combinaison linéaire de r colonnes indépendantes $v^1, \dots, v^r$ de M_c . Ajoutons à ces vecteurs $n - r$ autres vecteurs ϖ^j de sorte que $V = \{v^1, \dots, v^r, \varpi^1, \dots, \varpi^{n-r}\}$ soit une base. Pour $1 \leq i \leq r$, la $i^{\text{ème}}$ colonne de l'écriture $\mathcal{Q}_c$ de la matrice A dans la base V est $Av^i = A(A^k b^s) = A^{k+1} b^s$ où b^s est une colonne de B et $0 \leq k \leq n - 1$. Si $k < n - 1$, Av^i est une colonne de M_c et s'écrit dans V comme une combinaison linéaire des v^j (ses composantes selon les ϖ^j sont donc toutes nulles). Si $k = n - 1$, $Av^i = A^n b^s$ n'est pas une colonne de M_c mais, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, il est une combinaison linéaire des colonnes de M_c qui sont à leur tour des combinaisons linéaires des v^j . Ainsi, $\forall i = 1, \dots, r$, les composantes de Av^i selon les vecteurs de base ϖ^j sont toutes nulles ce qui montre que l'écriture $\mathcal{Q}_c$ de A dans la base V a la forme (1-37).

b) Comme toute colonne de B est une colonne de M_c , elle est une combinaison linéaire des v^j d'où ses composantes selon les ϖ^j sont toutes nulles ce qui montre que l'écriture $\mathcal{B}$ de B dans la base V a la forme (1-37).

c) L'écriture de M_c dans la base V est

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_c &= [\mathcal{B} \quad \mathcal{Q}_c \mathcal{B} \quad \mathcal{Q}_c^2 \mathcal{B} \quad \dots \quad \mathcal{Q}_c^{n-1} \mathcal{B}] \\ &= \begin{bmatrix} B_1 & A_{11} B_1 & A_{11}^2 B_1 & \dots & A_{11}^{n-1} B_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Comme $\text{rg}(\mathcal{M}_c) = \text{rg}(M_c) = r$, le rang de la matrice $(r \times np)$ de contrôlabilité de (A_{11}, B_1) ,

$$\begin{bmatrix} B_1 & A_{11} B_1 & A_{11}^2 B_1 & \dots & A_{11}^{n-1} B_1 \end{bmatrix},$$

est plein ($= r$) d'où (A_{11}, B_1) est contrôlable. ■

Pour interpréter la décomposition de Kalman, considérons l'écriture $\xi = [\xi^1; \xi^2]$ de l'état x du système dans la base V , ξ^1 étant constitué des r premières composantes de ξ et ξ^2 de ses $n - r$ dernières composantes. D'après (1-37), les équations d'état du système peuvent s'écrire sous la

forme :

$$\begin{aligned} \dot{\xi}^1 &= A_{11} \xi^1 + A_{12} \xi^2 + B_1 u, \\ \dot{\xi}^2 &= A_{22} \xi^2. \end{aligned}$$

On voit que la commande u n'affecte pas ξ^2 mais seulement ξ^1 . Comme $\xi^2(t)$ se déduit de sa valeur initiale et le couple (A_{11}, B_1) est contrôlable, il existe u qui conduit les composantes de ξ^1 à prendre des valeurs désirées en un temps arbitraire. Les composantes de ξ^1 sont les variables d'état contrôlables et les composantes de ξ^2 sont les variables d'état non contrôlables.

Exemple 1-13

Considérons le couple de matrices

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & -5 & -6 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Leur matrice de contrôlabilité s'obtient par

$$>> M_c = \text{ctrb}(A, B);$$

ce qui donne

$$M_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & -4 & -2 & 8 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

On remarque que toutes les colonnes de cette matrice dépendent des deux premières. En ajoutant à ces dernières le troisième vecteur $[0; 0; 1]$, on obtient une base V dont les vecteurs sont les colonnes de la matrice de passage

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Les écritures des matrices A et B dans la base V sont donc

$$\mathcal{Q}_c = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = P^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On voit que ces matrices ont la forme (1-37) et que la troisième composante du vecteur d'état écrit dans la base V est non contrôlable.

Autres tests de contrôlabilité

La décomposition de Kalman va nous permettre de déduire un test de contrôlabilité à partir de la forme de Jordan. Considérons la réalisation (A, B, C, D) d'une fonction de transfert d'un système. Nous savons qu'il existe toujours une base dans $\mathcal{C}^n$, $V = \{v^1, v^2, \dots, v^n\}$, dans laquelle la matrice A prend la forme de Jordan. Dans cette base le vecteur d'état x s'écrit

$$x = z_1 v^1 + \dots + z_n v^n = Tz, \quad z_i \in \mathcal{C},$$

avec

$$T = \begin{bmatrix} v^1 & \dots & v^n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad z = \begin{bmatrix} z_1 & \dots & z_n \end{bmatrix}^T.$$

En remplaçant x par Tz dans les équations d'état $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$ et en multipliant la première par T^{-1} , on obtient :

$$\dot{z} = \mathcal{A}z + Bu$$

$$y = Cz + Du$$

où $\mathcal{A} = T^{-1}AT$, $\mathcal{B} = T^{-1}B$, $C = CT$ ont la forme de Jordan. Les composantes de z sont appelées les *modes* du système ; les lignes de $\mathcal{B}$ et les colonnes de C sont respectivement données par

$$\beta_{i\bullet} = w^{i*} B \quad \text{et} \quad \gamma_{\bullet i} = Cv^i \quad (1-38)$$

où w^{i*} (le transposé du conjugué de w^i) est la $i^{\text{ème}}$ ligne de T^{-1} et v^i est la $i^{\text{ème}}$ colonne de T. Comme $T^{-1}T = I$, $w^{j*} v^i = \delta_{ij}$ avec $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$. D'autre part, en examinant la forme de la matrice $\mathcal{A}$, il est facile de constater que si les indices i et j correspondent respectivement à la première colonne et la dernière ligne d'un bloc de $\mathcal{A}$ relatif à une valeur propre λ , la colonne v^i de T est un vecteur propre à droite de A ($Av^i = \lambda v^i$) et la ligne w^{j*} de T^{-1} est un vecteur propre à gauche de A ($w^{j*}A = \lambda w^{j*}$ car $T^{-1}A = \mathcal{A}T^{-1}$).

Soit $\mathcal{W}'_\lambda$ le sous-espace engendré par les lignes w^{i*} de T^{-1} correspondantes aux dernières lignes des blocs de $\mathcal{A}$ relatifs à une même valeur propre λ . Tout vecteur propre à gauche w^* de A relatif à λ appartient à $\mathcal{W}'_\lambda$, c.à.d. $w^* = \sum_i^r \alpha_i w^{i*}$, les α_i étant des scalaires non tous nuls. D'où

$$\forall w^* \in \mathcal{W}'_\lambda,$$

$$\begin{aligned} w^* M_c &= [w^* B \quad w^* AB \quad \dots \quad w^* A^{n-1} B] \\ &= [w^* B \quad \lambda w^* B \quad \dots \quad \lambda^{n-1} w^* B] \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} w^* M_c = 0 &\Leftrightarrow w^* B = \sum_i^r \alpha_i w^{i*} B = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_i^r \alpha_i \beta_{i\bullet} = 0 \end{aligned} \quad (1-39)$$

où les $\beta_{i\bullet}$ sont les dernières lignes des blocs de $\mathcal{B}$ relatifs à la valeur propre λ . L'équivalence (1-39) intervient dans la démonstration de la propriété suivante :

Test modal

Le système est contrôlable si et seulement si les dernières lignes des blocs de $\mathcal{B}$ relatifs à une même valeur propre sont indépendantes.

Preuve

$\Rightarrow$) Si les dernières lignes $\beta_{i\bullet}$ des r blocs de $\mathcal{B}$ relatifs à une même valeur propre λ de A étaient dépendantes, il existerait des scalaires α_i non tous nuls tels que $\sum_i^r \alpha_i \beta_{i\bullet} = 0$.

Mais (1-39) $\Rightarrow w^* M_c = 0$ avec $w^* \neq 0$. Donc $\text{rg}(M_c) < n$ en contradiction avec la contrôlabilité du système.

$\Leftarrow$) Si le couple (A, B) n'était pas contrôlable, la matrice A_{22} de la forme $\mathcal{Q}_c = P^{-1}AP$ et $\mathcal{B} = P^{-1}B$ de la décomposition de Kalman (1-37) serait non nulle. Soit η^* un vecteur propre à gauche de A_{22} correspondant à une valeur propre λ de cette matrice (λ est aussi une valeur propre de A). Tenant compte de la forme (1-37) de $\mathcal{Q}_c$ et $\mathcal{B}$, on aurait :

$$\begin{aligned} [0 \quad \eta^*] P^{-1} A P &= [0 \quad \eta^*] \mathcal{Q}_c = [0 \quad \eta^* A_{22}] \\ &= \lambda [0 \quad \eta^*] \\ \Rightarrow [0 \quad \eta^*] P^{-1} A &= \lambda [0 \quad \eta^*] P^{-1} \end{aligned}$$

$$\text{et} \quad 0 = [0 \quad \eta^*] \mathcal{B} = [0 \quad \eta^*] P^{-1} B.$$

D'où $w^* = [0 \quad \eta^*] P^{-1} \in \mathcal{W}'_\lambda$ et $w^* B = 0$. Mais $w^* \in \mathcal{W}'_\lambda \Rightarrow w^* = \sum_i^r \alpha_i w^{i*}$ où les w^{i*} sont les dernières lignes des blocs de T^{-1} relatifs à λ et les α_i ne sont pas tous nuls car $\eta^* \neq 0$. Par conséquent,

$$w^* B = \sum_i^r \alpha_i w^{i*} B = \sum_i^r \alpha_i \beta_{i\bullet} = 0$$

et les dernières lignes $\beta_{i\bullet}$ des blocs de $\mathcal{B}$ relatifs à λ seraient dépendantes. ■

En particulier, si la dernière ligne d'un bloc de $\mathcal{B}$ est complètement nulle le système n'est pas contrôlable.

Test de Hautus

Le couple (A, B) est contrôlable si et seulement si, pour toute valeur propre λ de A ,

$$\begin{aligned} \text{rg}([\lambda I - A \quad B]) &= n \\ \Leftrightarrow \text{rg}([sI - A \quad B]) &= n \quad \forall s \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Preuve

Par contraposition du test modal, le couple (A, B) est non contrôlable si et seulement s'il existe une valeur propre λ de A et un vecteur non nul $w^* = \sum_1^r \alpha_i w_i^* \in \mathcal{W}'_\lambda$ tel que $w^* B = 0$. En d'autres termes,

$$\begin{aligned} (A, B) \text{ non contrôlable} \\ \Leftrightarrow \exists \lambda \text{ et } w^* \neq 0 \text{ tels que} \\ w^* (\lambda I - A) = 0 \text{ et } w^* B = 0 \\ \Leftrightarrow \exists \lambda \text{ et } w^* \neq 0 \text{ tels que } w^* [(\lambda I - A) \quad B] = 0 \\ \Leftrightarrow \exists \lambda \text{ tel que } \text{rg}([\lambda I - A \quad B]) < n. \end{aligned}$$

Donc (A, B) est contrôlable si et seulement si, pour toute valeur propre λ , $\text{rg}([\lambda I - A \quad B]) = n$.

Mais, $\forall s \in \mathbb{C}$ qui n'est pas une valeur propre de A , $\text{rg}(sI - A) = n$, d'où $\text{rg}([sI - A \quad B]) = n$.

Par conséquent, (A, B) est contrôlable si et seulement si

$$\text{rg}([sI - A \quad B]) = n \quad \forall s \in \mathbb{C}. \quad \blacksquare$$

Exemples 1-14

a) Considérons 3 systèmes ayant tous la même matrice A mais des matrices B différentes :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \\ B_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Seul le premier système est à état contrôlable. Le système 2 n'est pas contrôlable car la seule ligne de B_2 relative à la valeur propre -2 est nulle et le système 3 n'est pas contrôlable car les dernières lignes des blocs de B_3 relatifs à la valeur propre -1 sont dépendantes.

b) Considérons 3 systèmes ayant tous la même matrice A mais des matrices B différentes :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

>> $\text{eig}(A) \rightarrow \lambda = -1, -1, -1, -2$. La valeur propre -1 est triple, -2 est simple.

>> $\text{rank}([-1 \cdot \text{eye}(4) - A \quad B_1]) \rightarrow 4$

>> $\text{rank}([-2 \cdot \text{eye}(4) - A \quad B_1]) \rightarrow 4$

Donc (A, B_1) est contrôlable.

>> $\text{rank}([-1 \cdot \text{eye}(4) - A \quad B_2]) \rightarrow 4$

>> $\text{rank}([-2 \cdot \text{eye}(4) - A \quad B_2]) \rightarrow 3$

Donc (A, B_2) n'est pas contrôlable car le mode de valeur propre -2 est non contrôlable.

>> $\text{rank}([-1 \cdot \text{eye}(4) - A \quad B_3]) \rightarrow 3$

>> $\text{rank}([-2 \cdot \text{eye}(4) - A \quad B_3]) \rightarrow 4$

Donc (A, B_3) n'est pas contrôlable car l'un au moins des modes de valeur propre -1 est non contrôlable.

EXERCICE 1-7

Construire les graphes de $\dot{x} = Ax + B_i u$, $i = 1, 2, 3$, de la partie a) de l'exemple 1-14 pour déduire une interprétation concernant leur contrôlabilité.

EXERCICE 1-8

Montrer que (A, B) est contrôlable si et seulement si $(A - aI, B)$ est contrôlable $\forall a \in \mathbb{C}$.

1-5 Observabilité

Un système est observable si la connaissance de l'entrée $u(t)$ et de la sortie $y(t)$ sur un intervalle fini $[0, t]$ permet de déterminer l'état initial x^0 .

Nous avons vu (éq. (1-12)) que

$$y(t) = Ce^{At} x^0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + Du(t)$$

qui s'écrit

$$m(t) = Ce^{At} x^0 \quad (1-40)$$

où

$$m(t) = y(t) - \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau - Du(t). \quad (1-41)$$

Connaissant l'entrée u et la sortie y , la relation (1-41) détermine la fonction $m(t)$ et il s'agit de savoir sous quelle condition peut-on déduire d'une manière unique l'état initial x^0 à partir de $m(t)$.

Gramien d'observabilité

Un système défini par les équations $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$ est observable si et seulement si la matrice

$$\mathcal{G}_o(t) = \int_0^t e^{A^T \tau} C^T C e^{A \tau} d\tau, \quad (1-42)$$

appelée *gramien d'observabilité*, est inversible $\forall t$ (c.à.d. $\text{rang}(\mathcal{G}_o(t)) = n \forall t$).

Preuve

a) En multipliant l'équation (1-40) par $e^{A^T t} C^T$ et en intégrant entre 0 et t , on obtient :

$$v(t) = \left(\int_0^t e^{A^T \tau} C^T C e^{A \tau} d\tau \right) x^0 = \mathcal{G}_o(t) x^0 \quad (1-43)$$

où $v(t)$ est connu dépendant de l'entrée et de la sortie entre 0 et t . Si, $\forall t$, $\mathcal{G}_o(t)$ est inversible (de rang n), (1-43) admet une solution unique x^0 quel que soit $v(t)$, d'où le système est observable.

b) Si $\mathcal{G}_o(t)$ n'était pas inversible pour un certain t , il existerait un vecteur réel $x^0 \neq 0$ tel que

$$\begin{aligned} x^{0T} \mathcal{G}_o(t) x^0 &= \int_0^t x^{0T} e^{A^T \tau} C^T C e^{A \tau} x^0 d\tau \\ &= \int_0^t \|C e^{A \tau} x^0\|^2 d\tau = 0. \end{aligned}$$

D'où $C e^{A \tau} x^0 = 0$ pour tout τ entre 0 et t et en particulier pour $\tau = t$. D'où le rang de $C e^{A t}$ ne serait pas plein et la solution de (1-40) ne serait pas unique, en contradiction avec l'observabilité. ■

En comparant les grammiens de contrôlabilité et d'observabilité définis par (1-33) et (1-42), on constate qu'un système (A, B, C, D) est observable si et seulement si son dual (A^T, C^T, B^T, D^T) est contrôlable. Ceci conduit directement aux tests d'observabilités suivants (duals des tests de contrôlabilité).

Tests d'observabilité

Un système est observable si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaites.

- 1) Le gramien $\mathcal{G}_o(t)$ défini par (1-42) est inversible $\forall t$.
- 2) Le gramien $\mathcal{G}_o(t)$ est défini positif $\forall t$.
- 3) Le rang de la *matrice d'observabilité*

$$M_o = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \text{ est n.} \quad (1-44)$$

- 4) $\mathcal{A}$ et $\mathcal{C}$ étant les formes de Jordan de A et C , les premières colonnes des blocs de $\mathcal{C}$ relatifs à une même valeur propre de $\mathcal{A}$ sont non nulles et indépendantes.

- 5) Pour toute valeur propre λ de A ,

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix} = n \Leftrightarrow \text{rang} \begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix} = n \quad \forall s \in \mathbb{C}.$$

De même, la propriété P2 de l'équation de Lyapunov (1-34) conduit par dualité à la propriété suivante :

Si A est stable, l'équation dite de *Liapunov*,

$$A^T Y + Y A = -C^T C, \quad (1-45)$$

admet une solution unique donnée par

$$Y = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{G}_o(t).$$

Pour un système stable et observable, la solution de (1-45) est unique et définie positive et nous montrerons que si (1-45) admet une solution Y définie positive, elle est unique, A est stable et (A, C) est observable.

Aussi par dualité, la décomposition de Kalman pour l'observabilité s'énonce comme suit :

Si le couple (A, C) n'est pas observable, il existe une base dans laquelle les matrices A et C s'écrivent sous la forme :

$$\mathcal{Q}_o = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C} = (C_1 \quad 0) \quad (1-46)$$

où le couple (A_{11}, C_1) est observable.

Les variables d'état correspondantes à la sous-matrice nulle de $\mathcal{C}$ n'affectent pas la sortie. Elles sont donc inobservables tandis que les autres variables d'état le sont.

Exemple 1-15

- a) La matrice d'observabilité relative à

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est

$$M_o = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & -9 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{matrix}.$$

Comme les 3 premières lignes de M_o sont indépendantes, elle est de rang 3 = n et l'état est entièrement observable.

b) La matrice d'observabilité du système SISO défini par les matrices :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, C = [1 \quad -1], D = 0$$

est

$$M_o = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Comme $\text{rang}(M_o) = 1 < 2 = n$, l'état de ce système n'est pas entièrement observable. Sa fonction de transfert est

$$\begin{aligned} g(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\ &= [1 \quad -1] \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\ &= \frac{(a-b)(s+2)}{(s+1)(s+2)} = \frac{(a-b)}{(s+1)}. \end{aligned}$$

À cause de la simplification par $(s+2)$, $g(s)$ est d'ordre 1 et on peut la réaliser par une seule variable d'état au lieu de deux, l'autre variable étant non observable par la sortie. La réalisation (A, B, C, D) ci-dessus n'est donc pas minimale, par contre, les réalisations (A_1, B_1, C_1, D_1) et (A_2, B_2, C_2, D_2) suivantes le sont :

$$A_1 = [-1], B_1 = [1], C_1 = [a-b], D_1 = 0$$

$$A_2 = [-1], B_2 = [a-b], C_2 = [1], D_2 = 0.$$

- L'instruction

>> Mo = obsv(A,C)

de Matlab calcule la matrice d'observabilité M_o dont le rang s'obtient par l'instruction

>> rank(Mo).

c) Considérons de nouveau le système monovariable

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, C = [1 \quad -1], D = 0.$$

On a :

$$e^{A\tau} = \begin{pmatrix} e^{-\tau} & -e^{-\tau} + e^{-2\tau} \\ 0 & e^{-2\tau} \end{pmatrix}$$

D'où

$$e^{A^T\tau} C^T C e^{A\tau} = \begin{pmatrix} e^{-2\tau} & -e^{-2\tau} \\ -e^{-2\tau} & e^{-2\tau} \end{pmatrix}$$

dont l'intégrale est le gramien

$$\mathcal{G}_o(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - e^{-2\tau} & -(1 - e^{-2\tau}) \\ -(1 - e^{-2\tau}) & 1 - e^{-2\tau} \end{pmatrix}$$

et

$$Y = \lim_{t \rightarrow \infty} W_o(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

vérifie (1-45). Comme $\text{rang}(Y) = 1 < n = 2$, l'état du système n'est pas complètement observable.

- Pour un système « sys » stable, l'instruction >> gram(sys,'o') produit directement le gramien Y.

d) Considérons 3 systèmes ayant tous la même matrice A mais des matrices C différentes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Seul le premier système est entièrement observable. Le système 2 n'est pas observable car la colonne de C_2 relative à la valeur propre -2 est nulle et le système 3 est aussi non observable car les premières colonnes des 2 blocs de C_3 relatifs à la valeur propre triple -1 sont dépendantes.

e) Considérons 3 systèmes ayant tous la même matrice A mais des matrices C différentes :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

>> eig(A) $\rightarrow \lambda = -1, -1, -1, 2$. La valeur propre -1 est triple, -2 est simple.

```
>> rank([-1*eye(4)-A; C1]) -> 4
```

```
>> rank([-2*eye(4)-A; C1]) -> 4
```

Donc (A, C₁) est observable.

```
>> rank([-1*eye(4)-A; C2]) -> 4
```

```
>> rank([-2*eye(4)-A; C2]) -> 3
```

Donc (A, C₂) n'est pas observable car le mode de valeur propre -2 ne l'est pas.

```
>> rank([-1*eye(4)-A; C3]) -> 3
```

```
>> rank([-2*eye(4)-A; C3]) -> 4
```

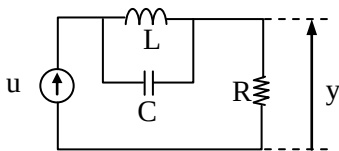
Donc (A, C₃) n'est pas observable car l'un au moins des modes de valeur propre -1 est non observable.

EXERCICE 1-9

Construire les graphes de $\dot{x} = Ax$, $y = C_i x$, $i = 1, 2, 3$, de la partie d) de l'exemple 1-15 pour déduire une interprétation concernant leur observabilité.

EXERCICE 1-10

En désignant par x_1 le courant traversant l'inductance et par x_2 la tension aux bornes de la capacité, écrire les équations d'état du circuit suivant dont la sortie est la tension y et l'entrée est la source de courant u . Est-il observable et contrôlable ? Donner une interprétation physique de ce résultat.



1-6 TRANSFORMATION DES RÉALISATIONS

Réalisation minimale

Nous avons vu qu'une réalisation d'une fonction de transfert $G(s)$ est minimale si le nombre de ses variables d'état est le plus petit parmi toutes les réalisations possibles de $G(s)$. Or, par définition, la fonction de transfert d'un système associée à une entrée la réponse de ce système quand il est initialement inerte (état initial nul). Mais un mode initialement nul il restera nul s'il n'est pas affecté par l'entrée. On peut donc supprimer un mode non contrôlable sans modifier la fonction de transfert. D'autre part, il est évident qu'on peut aussi supprimer tout mode qui n'affecte pas la sortie (non observable). Par contre, tout mode contrôlable et observable doit être conservé. On

en déduit qu'une réalisation (A, B, C, D) est minimale si et seulement si (A, B) est contrôlable et (A, C) est observable.

Exemple 1-16

En décomposant en facteurs simples chaque ligne de la matrice de transfert

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{s+2}{(s+1)^2} & \frac{1}{s+2} & \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+2} & \frac{2}{s+2} \end{pmatrix},$$

on déduit sa réalisation ($\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, 0) de Jordan :

$$\Gamma_J = \left(\begin{array}{ccc|cc|ccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Comme $\lambda_4 = \lambda_2$ et $\beta_{4\bullet} = \beta_{2\bullet}$, on a $z_4 = z_2$. De même $\lambda_5 = \lambda_3$ et $\beta_{5\bullet} = 2\beta_{3\bullet} \Rightarrow z_5 = 2z_3$. On peut donc supprimer les lignes z_4 et z_5 de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ et remplacer dans la dernière ligne de $\mathcal{C}$ les 1 de z_4 et z_5 par 1 et 2 aux positions 2 et 3 de z_2 et z_3 . La réalisation minimale (A_m , B_m , C_m , 0) de $G(s)$ est donc la suivante :

$$\Gamma_{\min} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

qu'on peut l'obtenir par l'instruction «minreal».

Les 3 modes de $\Gamma_{\min}$ sont contrôlables et observables et on peut vérifier que

$$G(s) = C_m (sI - A_m)^{-1} B_m.$$

EXERCICE 1-11

Déterminer une réalisation minimale du système

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = (0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1)x.$$

Quand on associe à une fonction de transfert $G(s)$ une réalisation minimale (A, B, C, D), les valeurs propres de A sont les pôles relatifs seulement aux

modes contrôlables et observables du système, les autres pôles, s'ils existent, restent *cachés*.

Les modes des pôles cachés, qui sont nécessairement non contrôlables ou non observables, ne sont pas affectés par l'entrée ou n'influencent pas la sortie et, par conséquent, ils n'ont pas en général une importance pratique. Cependant, lorsque ces modes sont instables, ils peuvent diverger vers l'infini et nuire au système. Pour pouvoir les stabiliser, il est nécessaire de restructurer les moyens d'action (les entrées) et de mesure (les sorties) afin de modifier les matrices B et C de sorte à rendre ces modes contrôlables et observables. Ceci nous conduit aux définitions suivantes.

- Un système est *stabilisable* si tous ses modes instables sont contrôlables.
- Un système est *déTECTABLE* si tous ses modes instables sont observables.

Aucune commande par retour d'état observé (déduit de l'entrée et de la sortie) ne peut stabiliser un système qui n'est pas stabilisable et détectable. Nous allons voir qu'un système est stable si et seulement si la partie réelle de chaque valeur propre de A est négative. Des tests de Hautus pour la contrôlabilité et l'observabilité, on déduit directement qu'un système est stabilisable et détectable si et seulement si chacune des matrices suivantes

$$\begin{bmatrix} sI - A & B \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix}$$

est de rang n $\forall s$ tel que $\Re(s) \geq 0$.

EXERCICE 1-12

Montrer que les équations d'état S_1 et S_2 suivantes sont deux réalisations d'une même fonction de transfert et que S_1 est stabilisable mais non détectable tandis que S_2 est détectable mais non stabilisable.

$$S_1 \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + x_2 + u \\ y = -2x_1 + x_2 \end{cases} \quad S_2 \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 2u \\ y = x_1 \end{cases}$$

Réalisations équivalentes.

Soit un système d'équations

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du$$

dont la matrice de contrôlabilité est

$$M_c = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B].$$

Si P est la matrice de passage à une nouvelle base ($x = Pz$), les équations de ce système deviennent

$$\dot{z} = A_1 z + B_1 u, \quad y = C_1 z + Du$$

avec

$$A_1 = P^{-1}AP, \quad B_1 = P^{-1}B, \quad C_1 = CP \quad (1-47)$$

et on dit que les réalisations (A, B, C, D) et (A₁, B₁, C₁, D) sont équivalentes. En remarquant que $A_1 B_1 = P^{-1} A P P^{-1} B = P^{-1} A B$, $A_1 A_1 B_1 = P^{-1} A^2 B$, ..., la matrice de contrôlabilité dans la nouvelle base sera

$$\begin{aligned} M_{1c} &= [B_1 \quad A_1 B_1 \quad A_1^2 B_1 \quad \dots \quad A_1^{n-1} B_1] \\ &= P^{-1} [B \quad AB \quad A^2 B \quad \dots \quad A^{n-1} B] \end{aligned}$$

$$\text{ou} \quad M_{1c} = P^{-1} M_c. \quad (1-48)$$

Comme P^{-1} est inversible, on déduit que le couple (A₁, B₁) est contrôlable ($\text{rg}(M_{1c}) = n$) si et seulement si (A, B) l'est. La contrôlabilité d'une réalisation n'est donc pas affectée par un changement de base. Par dualité, il en est de même de l'observabilité. Par conséquent, une forme de contrôlabilité, n'est jamais équivalente à une réalisation non contrôlable et une forme d'observabilité, n'est jamais équivalente à une réalisation non observable.

D'autre part, le changement de base conserve le polynôme caractéristique et, par conséquent, les valeurs propres puisque

$$\begin{aligned} \det(sI - A_1) &= \det(P^{-1}sIP - P^{-1}AP) \\ &= \det(P^{-1}) \det(sI - A) \det(P) \\ &= \det(sI - A). \end{aligned}$$

De même, deux réalisations équivalentes ont la même matrice de transfert puisque

$$\begin{aligned} C_1(sI - A_1)^{-1}B_1 &= CP(P^{-1}sIP - P^{-1}AP)^{-1}P^{-1}B \\ &= C(sI - A)^{-1}B. \end{aligned}$$

Passage à la forme compagne.

Nous verrons que la forme compagne d'une réalisation minimale facilitera la commande du système. Nous montrons ici qu'on peut transformer sous cette forme toute réalisation contrôlable et/ou observable.

Considérons d'abord un système à une seule entrée ayant une réalisation contrôlable de matrice d'état A et de vecteur d'entrée b. Sa matrice de contrôlabilité,

$$M_c = [b \quad Ab \quad A^2b \quad \dots \quad A^{n-1}b],$$

est carrée et inversible et ses colonnes constituent donc une base V . Les écritures de A et b dans cette base sont

$$\mathcal{Q} = [Ab \ A^2b \ \dots \ A^n b] \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = b \quad (1-49)$$

où les colonnes de $\mathcal{Q}$ et de $\mathcal{B}$ sont écrites dans la base V . Or, d'après Cayley-Hamilton, si

$$\pi(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$$

est le polynôme caractéristique de A , on a

$$A^n = -a_0I - a_1A - \dots - a_{n-1}A^{n-1}.$$

Par conséquent, en écrivant dans la base V les colonnes de $\mathcal{Q}$ et de $\mathcal{B}$ données par (1-49), on obtient :

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1-50)$$

D'après (1-48), la matrice de passage de $(\mathcal{Q}, \mathcal{B})$ à la forme de contrôlabilité

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad B_c = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

est $T = \mathcal{M}_c \mathcal{M}_c^{-1}$ où $\mathcal{M}_c$ et $\mathcal{M}_c$ sont respectivement les matrices de contrôlabilité de $(\mathcal{Q}, \mathcal{B})$ et (A_c, B_c) . Il est facile de vérifier que $\mathcal{M}_c = I$ et nous savons que $\mathcal{M}_c$ est de la forme

$$\mathcal{M}_c = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 1 & * & \dots & * \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1}\mathcal{B} = \mathcal{M}_c \mathcal{B} = B_c.$$

En fait, d'après (1-48), on peut directement passer de (A, B) à (A_c, B_c) par la transformation $x = Pz$ où $P = \mathcal{M}_c \mathcal{M}_c^{-1}$ ($\mathcal{M}_c^{-1}$ est donné à l'exercice 1-21).

La forme de contrôlabilité équivalente à une ré-

alisation contrôlable (A, B) à p entrées avec $B = (b^1, b^2, \dots, b^p)$ s'obtient en appliquant sur A et B la transformation

$$Q = (b^1 \ Ab^1 \ \dots \ A^{n_1-1}b^1 \ b^2 \ Ab^2 \ \dots \ A^{n_2-1}b^2 \ \dots)$$

où $\sum n_k = n$ (nombre des variables d'état), n_k étant la plus petite puissance de A pour la quelle la colonne $A^{n_k}b^k$ dépend des colonnes précédentes. Ceci décompose A et B en des sous-matrices de la forme (1-50). Il suffit ensuite d'appliquer à chaque bloc la règle des systèmes à entrée unique.

Exemple 1-17

Cherchons la forme de contrôlabilité équivalente au système contrôlable

$$\dot{x} = A.x + B.u = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u$$

À remarquer que les colonnes b_1 et b_2 de B sont indépendantes et ceci est toujours vrai pour un système bien conçu car si ces colonnes étaient dépendantes, une des entrées serait inutile. D'autre part, il n'est pas nécessaire que la matrice A soit de Jordan mais nous l'avons considérée ainsi pour la simplicité des calculs et pour constater directement, selon le test de contrôlabilité de Jordan, que (A, B) est contrôlable.

La matrice Q de décomposition de (A, B) est constituée des deux sous-matrices $Q_1 = [b^1, Ab^1]$ et $Q_2 = [b^2, Ab^2, A^2b^2]$:

$$Q = \begin{pmatrix} b^1 & Ab^1 & b^2 & Ab^2 & A^2b^2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (Q_1 \quad Q_2)$$

À noter que $A^2b^1 = 2b^1 - Ab^1$
et $A^3b^2 = -2b^2 - 5Ab^2 - 4A^2b^2$.

La transformée $\mathcal{Q}$ de A par Q s'obtient en écrivant dans la base $V = \{b^1, Ab^1, b^2, Ab^2, A^2b^2\}$ les images de ces vecteurs par A et la transformée $\mathcal{B}$

de B s'obtient en écrivant dans V les vecteurs de B ce qui donne, tenant compte des équations précédentes :

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} b^1 \\ Ab^1 \\ b^2 \\ Ab^2 \\ A^2b^2 \end{matrix}$$

Ainsi la transformation $(\mathcal{Q}, \mathcal{B})$ de (A, B) est décomposée en deux sous-systèmes contrôlables chacun à une seule entrée. La transformation $\mathcal{M}_{ic}^{-1}$, $i = 1, 2$, appliquée à ces sous-systèmes, conduit directement à la forme de contrôlabilité (A_c, B_c) équivalente à (A, B) :

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -4 \end{pmatrix}, \quad B_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

La matrice de passage de l'état z de la forme de contrôlabilité (A_c, B_c) à l'état x de (A, B) est

$$P = Q \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{1c}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathcal{M}_{2c}^{-1} \end{pmatrix} = (Q_1 \mathcal{M}_{1c}^{-1} \quad Q_2 \mathcal{M}_{2c}^{-1}).$$

EXERCICE 1-13

Considérant le système (A, B) de l'exemple précédent, écrire les décompositions $(\mathcal{Q}_1, \mathcal{B}_1)$ et $(\mathcal{Q}_2, \mathcal{B}_2)$ de Kalman des sous-systèmes (A, b^1) et (A, b^2) et transformer les couples contrôlables de ces décompositions sous la forme de contrôlabilité. Comparer avec le résultat de l'exemple.

1-7 Pôles et zéros

Pôles. Les pôles d'un système (A, B, C, D) sont les valeurs propres de A (voir (1-17)). Ils sont donc les racines $p_i \in \mathbb{C}$ du polynôme caractéristique :

$$\pi(s) = \det(sI - A) = \prod_{i=1}^n (s - p_i).$$

L'instruction

`>> pole(sys)`

fournit les pôles d'un système linéaire.

Les vecteurs propres à droite relatifs à un pôle p_i sont appelés *directions droites* de ce pôle et les vecteurs propres à gauche relatifs à p_i sont ses *directions gauches*.

Nous savons que les pôles p_i (les valeurs propres de A) sont les éléments diagonaux de la forme de Jordan $\mathcal{A} = T^{-1}AT$ où T est la matrice de passage dont les colonnes sont définies par (1-38). À chaque pôle p_i correspond un ou plusieurs blocs de $\mathcal{A}$. Quand l'entrée $u = 0$, les composantes $z_{r,k}(t)$ de l'état transformé $z(t) = T^{-1}x(t)$ relatives à un bloc r de $\mathcal{A}$ de valeur propre p_i vérifient les équations :

$$\dot{z}_{r,k} = p_i z_{r,k} + z_{r,k+1}, \quad k = 1, \dots, v-1,$$

$$\dot{z}_{r,v} = p_i z_{r,v}$$

où v est le nombre de lignes du bloc considéré. On déduit que

$$z_{r,v} = \frac{z_{r,v}(0)}{s - p_i},$$

$$z_{r,v-1} = \frac{z_{r,v-1}(0)}{s - p_i} + \frac{z_{r,v}(0)}{(s - p_i)^2}$$

$$z_{r,v-2} = \frac{z_{r,v-2}(0)}{s - p_i} + \frac{z_{r,v-1}(0)}{(s - p_i)^2} + \frac{z_{r,v}(0)}{(s - p_i)^3}, \quad \dots$$

Donc, pour $k = 1, \dots, v$,

$$z_{r,k}(t) = e^{p_i t} \sum_{j=k}^v \frac{t^{(j-k)}}{(j-k)!} z_{r,j}(0), \quad (1-51)$$

Par conséquent, les modes relatifs à p_i sont stables (leur réponse libre $\rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$) si et seulement si la partie réelle de p_i est strictement négative : $\Re(p_i) < 0$.

À remarquer qu'un mode libre ne dépend que de sa valeur initiale et de celles des modes qui le suivent dans son bloc.

Supposons que les composantes du vecteur $z(0)$ sont toutes nulles sauf la $i^{\text{ème}}$, $z_i(0)$, où i est l'indice de la première colonne d'un bloc $\mathcal{A}_r$ de $\mathcal{A}$ de valeur propre p . D'après (1-51), toutes les composantes de $z(t)$ seront nulles sauf la $i^{\text{ème}}$ qui aura l'expression $z_i(t) = z_i(0)e^{p_i t}$. Ceci arrive quand l'état initial est $x(0) = Tz(0) = z_i(0)v^i$ où v^i est le vecteur propre de A relative au bloc $\mathcal{A}_r$. Dans ce cas on obtient :

$$x(t) = Tz(t) = z_i(0)e^{pt}v^i. \quad (1-52)$$

Par conséquent, si l'état initial est un vecteur propre v de la matrice A , il n'excite que le mode relatif à v (les autres modes restent nuls) et l'état libre $x(t)$ sera toujours colinéaire avec v , $\forall t$. De même, $\forall t$, la réponse libre $y(t)$ sera dans la même direction que le vecteur

$$y^p = Cv \quad (1-53)$$

appelé *direction de sortie* du pôle p . Rappelons que Cv est la première colonne d'un bloc relatif à p de la matrice C de Jordan. Nous savons que si ce vecteur est nul ou s'il est linéairement dépendant d'autres directions de sortie du même pôle p , le système ne sera pas observable.

Considérons maintenant l'effet d'une entrée u sur le dernier mode z_i d'un bloc r relatif au pôle p . Ce mode évolue selon l'équation

$$\dot{z}_i = pz_i + w^{i*}Bu$$

où w^i est un vecteur propre à gauche de la valeur propre p (w^{i*} est la dernière ligne du bloc r de T^{-1}). On voit que si l'entrée u est orthogonale au vecteur

$$u^p = B^T w^i \quad (1-54)$$

elle n'aura aucun effet sur le mode z_i . u^p est appelé *direction d'entrée* du pôle p . Rappelons que si ce vecteur est nul ou s'il est linéairement dépendant d'autres directions d'entrée du même pôle p , le système ne sera pas contrôlable.

Exemple 1-19

Considérons un système d'équations

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y = Cx$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & -3 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nous avons vu à l'exemple 1-11 que la forme de Jordan de la matrice A est

$$J = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

où la matrice de passage est

$$T = [v^1 \quad v^2 \quad v^3 \quad v^4] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et son inverse est

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} w^{*1} \\ w^{*2} \\ w^{*3} \\ w^{*4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On voit que le système a un pôle simple en 2 de direction droite v^1 et de direction gauche w^1 et un pôle triple -1 ayant 2 directions droites v^2 et v^4 et 2 directions gauches w^3 et w^4 . La direction de sortie du pôle 2 est $Cv^1 = [-1; 0]$ et celles du pôle -1 sont $Cv^2 = [-1; 1]$ et $Cv^4 = [0; 0]$. À remarquer que si l'état initial $x(0)$ est dans la direction de v^4 , la réponse libre du système sera nulle et il est impossible de déduire de la sortie l'amplitude de $x(0)$. D'autre part, la direction d'entrée du pôle 2 est $B^T w^1 = [1; -1]$ et celles du pôle -1 sont $B^T w^3 = [-1; -1]$ et $B^T w^4 = [0; 1]$. Par exemple, toute entrée de la forme $u = [u_1(t); 0]$ est orthogonale à $B^T w^4$ et n'affecte pas le mode z_4 ($= w^{*4}x$). Par conséquent, pour une telle entrée, si l'état initial $x(0)$ est orthogonal à w^4 , on a $z_4(0) = 0$ d'où $z_4(t) = 0 \forall t$ et l'état $x(t)$ restera orthogonal à w^4 .

EXERCICE 1-14

Écrire, selon la valeur de a une réalisation minimale de

$$G(s) = \frac{1}{s+a} \begin{pmatrix} \frac{s+2}{s(s+1)} & \frac{1}{s+1} \\ 0 & \frac{s+1}{s(s+2)} \end{pmatrix}$$

et déterminer ses pôles et leurs directions.

Zéros. On dit que $z \in \mathbb{C}$ est un zéro d'une matrice de transfert $G(s)$ si le rang r de la matrice $G(z)$ n'est pas plein, c.à.d. si $r < \min\{p, q\}$. En particu-

lier, z est un zéro d'une fonction de transfert $g(s)$ d'un système SISO si et seulement si $g(z) = 0$. Les colonnes de $G(z)$ étant dépendantes ainsi que ses lignes, il existe un vecteur non nul $u^z \in \mathbb{C}^p$ et un vecteur non nul $y^z \in \mathbb{C}^q$ tels que

$$G(z)u^z = 0, \quad (1-55)$$

$$y^{zT}G(z) = 0. \quad (1-56)$$

Les vecteurs u^z et y^z sont appelés respectivement *direction d'entrée* et *direction de sortie* du zéro z .

Soit (A, B, C, D) une réalisation de $G(s)$. La réalisation de $G^T(s)$ est (A^T, C^T, B^T, D^T) et, en supposant que $(zI - A)$ est inversible c.à.d. que z n'est pas un pôle de cette réalisation de $G(s)$, les équations (1-55) et (1-56) peuvent s'écrire sous la forme :

$$[C(zI - A)^{-1}B + D]u^z = 0$$

$$\text{et } [B^T(zI - A^T)^{-1}C^T + D^T]y^z = 0.$$

Soient $\xi = (zI - A)^{-1}Bu^z$ et $\eta = (zI - A^T)^{-1}C^Ty^z$.

Ces notations et les relations précédentes sont équivalentes aux équations suivantes :

$$z\xi = A\xi + Bu^z, \quad (1-57)$$

$$0 = C\xi + Du^z$$

$$z\eta = A^T\eta + C^Ty^z, \quad (1-58)$$

$$0 = B^T\eta + D^Ty^z.$$

Considérons les équations (1-57). En les multipliant par e^{zt} , on constate que si l'entrée est $u(t) = u^ze^{zt}$, de direction constante u^z , l'état à l'instant t sera $x(t) = \xi e^{zt}$, de direction constante ξ , et la sortie $y(t)$ restera nulle $\forall t$. Les équations (1-58) ont, pour le système dual, une interprétation semblable. D'autre part, si D est inversible (donc carré), on tire des équations (1-57) que $[zI - (A - BD^{-1}C)]\xi = 0$. Or $u^z = -D^{-1}C\xi \neq 0 \Rightarrow \xi \neq 0$. z est donc une valeur propre de $A - BD^{-1}C$. Tenant compte de la formule d'inversion (1-25), on déduit que si G est inversible, un zéro de G est un pôle de G^{-1} .

En posant maintenant

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad I_g = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

les solutions non triviales des équations (1-57) et (1-58) vérifient :

$$(M - zI_g) \begin{bmatrix} \xi \\ u^z \end{bmatrix} = 0, \quad u^z \neq 0 \text{ ou } \xi \neq 0. \quad (1-59)$$

et

$$(M - zI_g)^T \begin{bmatrix} \eta \\ y^z \end{bmatrix} = 0, \quad y^z \neq 0 \text{ ou } \eta \neq 0. \quad (1-60)$$

Inversement, si les colonnes de $(M - zI_g)$ sont dépendantes, il existe deux vecteurs ξ et u^z , non tous les deux nuls, qui vérifient (1-59) et on dit que z est un zéro à droite de *direction d'état* ξ et de *direction d'entrée* u^z . De même, si les lignes de $(M - zI_g)$ sont dépendantes, il existe deux vecteurs η et y^z , non tous les deux nuls, qui vérifient (1-60) et on dit que z est un zéro à gauche de *direction d'état* η et de *direction de sortie* y^z . z est à la fois un zéro à droite et à gauche si la matrice $(M - zI_g)$ n'est pas de rang plein, c'est-à-dire si

$$\text{rang}[M - zI_g] = r < \min\{n + q, n + p\}.$$

À remarquer que I_g n'est pas une matrice unité et M n'est pas nécessairement carré. La résolution de l'équation (1-59) ou (1-60) est un problème de *valeurs propres généralisées*. À chaque zéro z correspond un ou plusieurs vecteurs propres généralisés indépendants $[\xi; u^z]$ (ou $[\eta; y^z]$).

Le polynôme caractéristique des zéros est par définition le produit

$$\zeta(s) = \prod_{i=1}^{n_z} (s - z_k)$$

où n_z est le nombre des zéros (à droite ou à gauche). Si la matrice M est carrée (même nombre d'entrées que de sorties), les zéros à droite et à gauche sont confondus car, dans les deux cas, ils sont les racines de

$$\zeta(s) = \det(M - sI_g) = 0. \quad (1-61)$$

À remarquer que si la matrice G est carrée, l'équation (1-55) implique que les zéros de la fonction de transfert $G(s)$ sont les racines de

$$\det[G(z)] = 0. \quad (1-62)$$

Nous attirons cependant l'attention que l'équation (1-62) a généralement moins de racines que (1-61) car certains zéros peuvent se simplifier en passant des équations d'état à la fonc-

tion de transfert ou en calculant le déterminant de $G(z)$. Pour obtenir tous les zéros à gauche et à droite d'un système, il est nécessaire de résoudre (1-59) et (1-60) mais, dans le cas où la matrice M est carrée, il est plus simple de résoudre (1-61). L'instruction

```
>> tzero(sys)
```

fournit les zéros d'un système linéaire.

Exemple 1-20

Déterminons les zéros de la fonction de transfert

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{2s+1}{s+1} & \frac{s+1}{s+2} \\ 0 & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix}.$$

En appliquant d'abord (1-62) :

$$\det[G(z)] = \frac{(2z+1)}{(z+1)(z+3)} \Rightarrow z = -\frac{1}{2},$$

on trouve un seul zéro au point $-1/2$. Cherchons maintenant les zéros du système à partir de sa réalisation de Jordan :

$$\Gamma = \left(\begin{array}{ccc|cc} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

En appliquant (1-61), on trouve :

$$\det(zI_g - M) = \det \begin{bmatrix} z+1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & z+2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & z+3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -(z+2)(2z+1) = 0$$

$$\Rightarrow z_1 = -2 \quad \text{et} \quad z_2 = -\frac{1}{2}.$$

On voit que le zéro z_1 n'apparaît pas dans (1-61). Remarquer aussi qu'il n'existe pas un élément dans $G(s)$ qui s'annule pour $s = z_1$ ce qui montre qu'un zéro de $G(s)$ n'est pas nécessairement un zéro d'un élément de cette matrice. D'après (1-

59), les directions ξ et u^z de $z = -2$, en tant que zéro à droite, vérifient

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ u_1^z \\ u_2^z \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \xi = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad u^z = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

à une constante multiplicative près. Les directions de $z = -2$ en tant que zéro à gauche sont, d'après (1-60), $\eta = [0 ; 1 ; 1]$ et $y^z = [0 ; 1]$. D'autre part, comme le zéro $z = -2$ se simplifie par un pôle, le vecteur u^z ne vérifie pas (1-55) pour $z = -2$ bien que l'entrée $u = u^z e^{zt}$ annule la sortie quand l'état initial est ξ . Comme nous le savons, les équations d'état fournissent plus d'informations sur le système que la fonction de transfert.

EXERCICE 1-15

Soit le système

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{s+1}{s+2} \end{bmatrix}.$$

Déterminer ses pôles et ses zéros ainsi que leurs directions.

On dit qu'un système est à *phase minimale* si les parties réelles de ses zéros sont toutes négatives. C'est le cas de l'exemple précédent. Nous verrons qu'il est plus difficile de trouver une politique de commande performante pour un système à phase non minimale que pour un système à phase minimale.

Calcul des pôles et des zéros à partir de la matrice de transfert

Rappelons qu'un mineur d'ordre m d'une matrice de transfert $G(s)$ est le déterminant d'une sous matrice carrée $m \times m$ de $G(s)$.

Posons $r = \min\{p, q\}$, p étant le nombre des colonnes de $G(s)$ et q le nombre de ses lignes. On démontre que

- 1) le polynôme caractéristique $\pi(s)$ des pôles de $G(s)$ est le plus petit commun dénominateur de tous les mineurs non nuls de $G(s)$.
- 2) Le polynôme caractéristique $\zeta(s)$ des zéros de $G(s)$ est le plus grand commun diviseur des numérateurs des mineurs d'ordre r de $G(s)$ à condition d'ajuster ces mineurs de sorte que leur dénominateur commun soit $\pi(s)$.

Ces deux règles conduisent à des polynômes $\pi(s)$ et $\zeta(s)$ dont les racines sont respectivement les pôles et les zéros de la réalisation minimale de $G(s)$.

Exemple 1-21

Considérons la fonction de transfert

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{s+2}{(s+1)^2} & \frac{1}{s+2} & \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{1}{s+1} & 0 & \frac{1}{s+2} \end{pmatrix}.$$

Les mineurs d'ordre 1 sont les éléments non nuls de $G(s)$ et les mineurs d'ordre 2 sont

$$\begin{aligned} M_1 &= \begin{vmatrix} \frac{s+2}{(s+1)^2} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{1}{s+1} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ M_2 &= \begin{vmatrix} \frac{s+2}{(s+1)^2} & \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} \end{vmatrix} = \frac{-1}{(s+1)(s+2)} \\ M_3 &= \begin{vmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{vmatrix} = \frac{1}{(s+2)^2} \end{aligned}$$

Le plus petit commun dénominateur de tous les mineurs (d'ordre 1 et 2) est

$$\pi(s) = (s+1)^2 (s+2)^2.$$

La réalisation minimale de $G(s)$ possède donc deux pôles doubles en -1 et en -2 . Pour déterminer les zéros de $G(s)$, ajustons les mineurs d'ordre 2 ci-dessus de sorte que leur dénominateur commun soit $\pi(s)$:

$$M_1 = \frac{(s+1)(s+2)}{\pi(s)},$$

$$M_2 = \frac{-(s+1)(s+2)}{\pi(s)},$$

$$M_3 = \frac{(s+1)^2}{\pi(s)}.$$

Le plus grand commun diviseur des numérateurs de ces 3 mineurs est

$$\zeta(s) = (s+1).$$

On voit que $G(s)$ possède un seul zéro en -1 .

Cet exemple montre, une fois de plus, qu'un zéro de $G(s)$ n'est pas nécessairement un zéro de ses éléments et, contrairement aux systèmes mono-variables, un zéro peut avoir la même position qu'un pôle sans le simplifier.

Simplification d'un pôle par un zéro

Nous allons démontrer qu'un zéro et un pôle égaux se simplifient si et seulement s'ils ont une même direction.

Si le vecteur v^i est une direction droite (un vecteur propre) d'un pôle p_i , on a :

$$Av^i = p_i v^i. \quad (1-63)$$

Le vecteur Av^i est une colonne de la matrice $\mathcal{A}$ de Jordan ne comportant pas un 1 au dessus de la valeur propre. Supposons qu'il existe un zéro à droite z_i égal au pôle p_i et de direction $\xi^i = v^i$. D'après la définition (1-58) du zéro, il existe une entrée u^i telle que

$$\begin{aligned} p_i v^i &= Av^i + Bu^i, \\ 0 &= Cv^i + Du^i. \end{aligned} \quad (1-64)$$

Tenant compte de (1-63), la première équation de (1-64) devient $Bu^i = 0$. En admettant que le système ne comporte pas des entrées redondantes (inutiles), les colonnes de B sont indépendantes, d'où $u^i = 0$ et la deuxième équation de (1-64) devient $Cv^i = 0$. Mais Cv^i n'est autre que la colonne de la matrice C de Jordan correspondante à la colonne Av^i de $\mathcal{A}$. On déduit que le mode relatif à p_i est non observable et se simplifie dans la matrice de transfert.

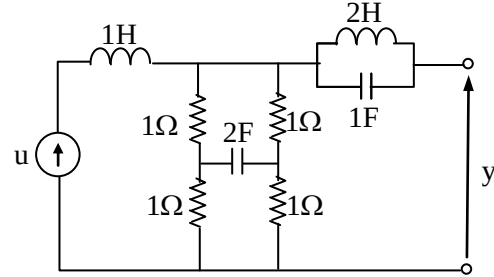
Inversement, si le mode relatif à p_i de direction droite v^i est non observable, on a $Cv^i = 0$. Par conséquent, pour une entrée u^i nulle les équations (1-64) seront vérifiées d'où p_i est un zéro de direction v^i .

Ainsi, un pôle p_i de direction v^i est non observable (simplifiable) si et seulement s'il existe un zéro $z_i = p_i$ de direction $\xi^i = v^i$.

D'une manière analogue, on démontre qu'un pôle p_i de direction gauche w^i est non contrôlable (simplifiable) si et seulement s'il existe un zéro gauche $z_i = p_i$ de direction $\eta^i = w^i$.

AUTRES EXERCICES ET COMPLÉMENTS

1-16. L'entrée du circuit suivant est la source de courant u et sa sortie est la tension y . Étudier la contrôlabilité et l'observabilité des variables d'état définies par les tensions aux bornes des capacités et par les courants à travers les inductances et déduire que la fonction de transfert est égale à 1. Interpréter physiquement ce résultat.



1-17. Utiliser la fonction «ctrbf» de Matlab pour effectuer la décomposition de contrôlabilité de Kalman du système suivant et éliminer les variables d'états non contrôlables.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1/2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour obtenir une réalisation minimale, effectuer par «obsvf» la décomposition d'observabilité de Kalman du système restant et éliminer les variables d'états non observables.

Retrouver ce résultat par «minreal».

1-18. Montrer que l'état d'équation

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} u$$

est non contrôlable si et seulement si (A_{22}, A_{21}) est non contrôlable.

1-19. Montrer que les systèmes suivants ont la même fonction de transfert mais non équivalents.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad y = (-1 \ 0 \ 1)x,$$

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad y = (-1 \ 0 \ 1)z.$$

1-20. En effectuant le changement de variables $z_2 = x_2 + jx_3$ et $z_3 = x_2 - jx_3$ et en supposant que tous les paramètres sont réels, donner les conditions pour que le système suivant soit minimal :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix} x + bu, \quad y = cx.$$

1-21. Pour un système à une entrée de polynôme caractéristique $\pi(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$, montrer que l'inverse de la matrice de contrôlabilité $\mathcal{M}_c$ de la forme de contrôlabilité est

$$\mathcal{M}_c^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ a_{n-1} & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1-22. Soit m le rang de la matrice de contrôlabilité $\mathcal{M}_c$ d'un système S d'ordre n ($> m$) d'équations

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad y = Cx + Du.$$

1) Q étant une matrice constituée de m colonnes indépendantes de $\mathcal{M}_c$ et $P = (Q^T Q)^{-1} Q^T$, montrer que

$$\dot{x}^1 = QAPx^1 + QBu, \quad y = CPx^1 + Du$$

est une réalisation contrôlable de S .

2) Comment construire une réalisation observable de S quand (A, C) est non observable ?

3) Appliquer ce qui précède au système de l'exercice 1-17 pour obtenir une réalisation minimale.

1-23. Équivalence des réalisations minimales.

Soient $\Gamma = (A, B, C, 0)$ et $\Gamma_1 = (A_1, B_1, C_1, 0)$ deux réalisations minimales d'un système S .

1) En développant $(sI - A)^{-1}$, montrer que

$$CA^k B = C_1 A_1^k B_1 \quad \forall k$$

et déduire que

$$M_o M_c = M_{1o} M_{1c} \text{ et } M_o A M_c = M_{1o} A_1 M_{1c},$$

les M étant les matrices de contrôlabilité et d'observabilité.

2) Montrer que si une réalisation Γ est minimale, $M_c M_c^T$ et $M_o^T M_o$ sont inversibles. Les matrices

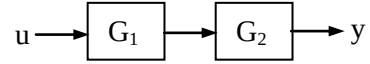
$$M_c^\dagger = M_c^T (M_c M_c^T)^{-1} \text{ et } M_o^\dagger = (M_o^T M_o)^{-1} M_o^T$$

sont appelées les pseudo-inverses de M_c et M_o car

$$M_c M_c^\dagger = M_o^\dagger M_o = I.$$

3) Soit $P = M_c M_{1c}^\dagger$ et $P^{-1} = M_{1o}^\dagger M_o$. Montrer que $P^{-1}P = I$, $M_o P = M_{1o}$ et $P^{-1}M_c = M_{1c}$. Déduire que $C_1 = CP$, $B_1 = P^{-1}B$ et $A_1 = P^{-1}AP$.

1-24. Soient $(A_1, B_1, C_1, 0)$ et $(A_2, B_2, C_2, 0)$ des réalisations minimales des systèmes G_1 et G_2 montés en série.



1) Écrire la réalisation $(A, B, C, 0)$ de $G_2 G_1$ en fonction de celles de G_1 et G_2 .

2) Montrer que si λ est une valeur propre de A_1 (un pôle p de G_1), il est une valeur propre de A .

3) Soit $v = [v^1; v^2]$ un vecteur propre de A associé à λ . Montrer que v^1 est un vecteur propre de A_1 et que le vecteur $C_1 v^1 \neq 0$.

4) Écrire l'expression de v^2 en fonction de v^1 et déduire que si $Cv = 0$ ($G_2 G_1$ est non observable) λ est un zéro z de G_2 , $u^z = C_1 v^1$ est une direction d'entrée de z et v^2 est une direction d'état de z .

5) Inversement, si λ est un pôle p de G_1 et un zéro z de G_2 et si la direction d'entrée u^z de z est colinéaire avec $C_1 v^1$, le système $G_2 G_1$ est non observable.

1-25. Décomposition de Smith-McMillan.

1) Écrire les matrices carrées U qui effectuent sur une matrice $A_{q \times p}$ les opérations suivantes en multipliant A par U à gauche ou à droite :

- Multiplier une ligne (resp. colonne) de A par une constante.

- Permuter 2 lignes (resp. 2 colonnes) de A .

- Multiplier une ligne (resp. colonne) i de A par un polynôme $p(s)$ et l'ajouter à une ligne (resp. colonne) j .

2) Montrer que toutes les matrices U sont *uni-modulaires* c.à.d. des matrices polynomiales dont le déterminant vaut une constante non nulle.

3) Montrer qu'une matrice uni-modulaire n'a pas de zéros ni de pôles et que le produit de deux matrices uni-modulaires est une matrice uni-modulaire.

4) Soit la matrice de transfert

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{s+2}{(s+1)^2} & \frac{1}{s+2} & \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{1}{s+1} & 0 & \frac{1}{s+2} \end{pmatrix}.$$

En en mettant le dénominateur commun des éléments de G en facteur et en effectuant sur la matrice des numérateurs les opérations ci-dessus, déterminer les matrices uni-modulaires U et V telles que

$$UGV = (S/d(s) \ 0) \quad \text{avec} \quad S = \begin{pmatrix} \varepsilon_1(s) & 0 \\ 0 & \varepsilon_2(s) \end{pmatrix}$$

où $d(s)$ est le dénominateur commun des éléments de $G(s)$ et le polynôme $\varepsilon_i(s)$ divise $\varepsilon_{i+1}(s)$.

5) Soit χ_i le plus grand commun diviseur des mineurs de $G(s)$ d'ordre i et $\chi_0 = 1$. Vérifier que $\varepsilon_i(s) = \chi_i/\chi_{i-1}$.

6) Soit $M(s)$ la matrice diagonale obtenue après simplification de $S/d(s)$. Montrer que les zéros et les pôles de $G(s)$ sont ceux de $M(s)$ et comparer avec l'exemple 1-21.