

Chapitre 2

COMMANDE PAR RETOUR D'ÉTAT

2-1 Introduction

La commande d'un système consiste à produire un vecteur d'entrée $u(t) \in \mathbb{R}^p$ qui maintient le vecteur de sortie $y(t) \in \mathbb{R}^q$ aussi voisin que possible d'un vecteur de référence $r(t) \in \mathbb{R}^q$ et ceci malgré les perturbations (variation de la charge, de l'alimentation, ...), les bruits de mesure et l'imprécision du modèle qui peuvent affecter le fonctionnement du système. Pour accomplir cette tâche, il est évident que l'action u doit dépendre en tout instant de la référence r ainsi que de la réponse y et de l'état $x \in \mathbb{R}^n$ du système commandé. Si le système est linéaire, il est commode que u soit liée à r , y et x par une relation linéaire. La structure de la *commande par retour d'état* d'un système linéaire est donc de la forme

$$u = v - K_c x$$

où v est lié à r et y par un opérateur linéaire ϕ (algébrique ou différentielle) et K_c est une matrice constante ($p \times n$). Généralement certaines composantes de l'état x ne sont pas directement mesurables et il est nécessaire de les estimer à partir de grandeurs physiques mesurables telles que l'entrée u et la sortie y du système commandé. Cette estimation est effectuée par un organe appelé observateur ou filtre dont la fonction de transfert sera désignée par $H(s)$.

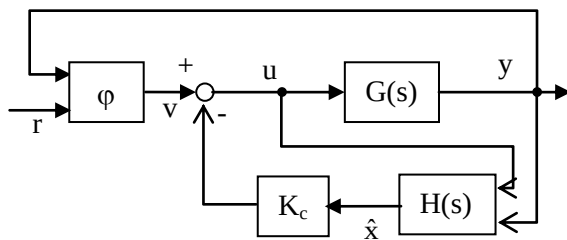


Fig 2.1 Commande par retour d'état

La figure 2-1 montre la structure générale de la commande par retour d'état. Il s'agit de détermi-

ner la matrice de retour d'état K_c , l'opérateur ϕ et la matrice de transfert $H(s)$ de l'observateur de sorte à maintenir la sortie $y(t)$ du système commandé $G(s)$ aussi voisine que possible de la référence $r(t)$.

Dans cet objectif, deux méthodes sont classiquement employées. La première permet de placer les pôles de la boucle fermée et de l'estimateur en des positions convenables du plan complexe et la deuxième optimise la performance du système selon un critère qui sera défini.

A- Placement des pôles (PP)

2-2 Choix de la matrice K_c

Considérons d'abord le cas où l'opérateur ϕ est une simple application linéaire définie dans l'espace $\mathbb{R}^q$ des vecteurs de référence r . La commande u est alors de la forme

$$u = K_r r - K_c x \quad (2-1)$$

où K_r et K_c sont des matrices ($p \times q$) et ($p \times n$) à déterminer. Soit d'autre part

$$\dot{x} = A_c x + B_c u, \quad y = C_c x + D_c u \quad (2-2)$$

la forme canonique de contrôlabilité de $G(s)$. Le choix de la forme de contrôlabilité n'est pas obligatoire mais facilitera le calcul manuel et les démonstrations et nous savons que cette forme est entièrement contrôlable ce qui signifie que toute composante de l'état x est affectée par l'entrée u et peut être conduite à prendre une valeur désirée en un temps arbitrairement petit. En remplaçant dans (2-2) l'entrée u par son expression (2-1), on déduit les équations de la boucle fermée :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A_c - B_c K_c) x + B_c K_r r, \\ y &= (C_c - D_c K_c) x + D_c K_r r \end{aligned} \quad (2-3)$$

L'idéal est d'avoir $y = r$. Mais, quel que soit le choix de K_c et K_r , l'état x et, par conséquent, la sortie y dépendront de l'état initial x^0 du système et il est impossible de réaliser $y = r$ pour tout état initial. Or nous savons, d'après (1-12), que la réponse y est composée de la réponse libre,

$$y_L = (C_c - D_c K_c) e^{(A_c - B_c K_c)t} x^0, \quad (2-4)$$

qui est indépendante de la référence $r(t)$, et de la réponse forcée,

$$y_F = \int_0^t (C_c - D_c K_c) e^{(A_c - B_c K_c)(t-\tau)} B_c K_r r(\tau) d\tau + D_c K_r r(t), \quad (2-5)$$

qui est indépendante de l'état initial.

La méthode de placement des pôles consiste à choisir la matrice K_c de sorte à éliminer rapidement l'effet y_L de l'état initial puis à déterminer K_r qui rapproche le plus possible la réponse forcée y_F de la référence r . K_c et K_r seront respectivement appelés *matrice de commande* ou de retour d'état et *pré-compensateur*.

Voyons d'abord comment choisir la matrice K_c . Comme nous l'avons vu au chapitre 1, l'effet de l'état initial s'élimine si et seulement si le système (2-3) est stable, c.à.d. si et seulement si les valeurs propres μ_i de la matrice $A_c - B_c K_c$ (les pôles de la boucle fermée) ont toutes des parties réelles négatives. Mais ceci n'est pas suffisant car il importe aussi que la convergence vers zéro soit rapide sans trop d'oscillation. Or l'allure avec laquelle y_L tend vers zéro dépend surtout de la position des pôles μ_i dans le plan complexe. Les modes relatifs à une valeur propre μ sont d'autant plus rapides à tendre vers zéros que μ est éloignée (vers la gauche) de l'axe des imaginaires et ils sont d'autant plus oscillatoires que μ est éloignée de l'axe des réels (voir l'expression (1-62) des modes). On peut donc choisir les valeurs propres μ_i de la matrice $A_c - B_c K_c$ de sorte que la réponse y se rapproche rapidement de la réponse forcée y_F sans trop d'oscillations. Il est évident qu'il faut tenir compte dans ce choix de la capacité des actionneurs qui agissent sur le système (à cause de l'inertie du procédé, des grandes accélérations nécessitent des actions fortes qui peuvent dépasser les limites permises). Éloigner trop les μ_i de l'axe des imaginaires peut nuire aux actionneurs ou les

saturer. D'autre part, les pôles μ_i , étant les racines du polynôme caractéristique (à coefficients réels) de $A_c - B_c K_c$, doivent être réels ou des paires conjugués.

Une fois les pôles μ_i sont convenablement choisis, la matrice K_c est calculée par identification de l'égalité

$$\det(sI - A_c + B_c K_c) = \prod_{i=1}^n (s - \mu_i) \quad (2-6)$$

comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 2-1

Considérons la fonction de transfert

$$G(s) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-s^2 + 3}{(s+1)^2(s+2)} \\ \frac{3s}{(s+2)(s-1)} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

et déterminons sa forme canonique de contrôlabilité en appliquant la méthode donnée au paragraphe 1-3 (exemples 1-5 et 1-6). On a :

$$g_{\bullet 1}(s) = \frac{1}{s^2 + s - 2} \begin{bmatrix} 0 \\ 3s \end{bmatrix},$$

$$g_{\bullet 2}(s) = \frac{1}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2} \begin{bmatrix} -s^2 + 3 \\ s^2 + 2s + 1 \end{bmatrix}.$$

D'où

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -4 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Posons

$$K_c = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} \end{bmatrix}.$$

Les lignes 2 et 5 de la matrice $B_c K_c$ sont respectivement égales aux lignes 1 et 2 de K_c et les autres

lignes de $B_c K_c$ sont nulles. Par conséquent, l'équation (2-6) s'écrit :

$$\det \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^5 (s - \mu_i) \quad (2-7)$$

avec

$$F_{11} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ -2 + k_{11} & s + 1 + k_{12} \end{bmatrix},$$

$$F_{22} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 2 + k_{23} & 5 + k_{24} & s + 4 + k_{25} \end{bmatrix},$$

$$F_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k_{13} & k_{14} & k_{15} \end{bmatrix}, \quad F_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}.$$

La détermination des k_{ij} se fait par identification des deux membres de (2-7), ce qui donne 5 équations à 10 inconnues fournissant une infinité de solutions possibles. Une solution simple consiste à annuler les matrices F_{12} et F_{21} , ce qui permet d'écrire l'équation (2-7) sous la forme :

$$\det F_{11} \cdot \det F_{22} = \prod_{i=1}^2 (s - \mu_i) \prod_{i=3}^5 (s - \mu_i)$$

d'où l'on tire par identification les égalités suivantes :

$$-2 + k_{11} = \mu_1 \mu_2,$$

$$1 + k_{12} = -(\mu_1 + \mu_2),$$

$$2 + k_{23} = -\mu_3 \mu_4 \mu_5,$$

$$5 + k_{24} = (\mu_3 \mu_4 + \mu_3 \mu_5 + \mu_4 \mu_5),$$

$$4 + k_{25} = -(\mu_3 + \mu_4 + \mu_5).$$

Par exemple, pour obtenir en boucle fermée les pôles

$$\mu_1 = -1 + j, \quad \mu_2 = -1 - j,$$

$$\mu_3 = -1 + j/2, \quad \mu_4 = -1 - j/2, \quad \mu_5 = -1,$$

La résolution des équations ci-dessus donne

$$K_c = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3/4 & -7/4 & -1 \end{bmatrix}.$$

L'instruction

`>> Kc = place(A, B, p)`

calcule une matrice K_c telle que les valeurs propres de $A - BK_c$ sont les composantes du vecteur p . Comme il existe une infinité de solutions, la matrice K_c que fournit « place » n'est pas nécessairement la même que la matrice calculée selon la méthode manuelle de cet exemple. À noter que l'instruction « place » s'applique pour toute réalisation contrôlable de $G(s)$ et il n'est pas nécessaire qu'elle ait la forme de contrôlabilité.

EXERCICE 2-1

Remplacer la réalisation $\dot{x} = Ax + B, y = Cx$ suivante par une forme de contrôlabilité $\dot{z} = A_c z + B_c, y = Cz$ et, sachant que x et non z est mesuré par les capteurs, déterminer la matrice K_c de retour d'état qui place les pôles de la boucle fermée en $-2(1 \pm j\sqrt{3})$ et -2 .

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = (0 \quad -1 \quad 1).$$

Avant de dire comment choisir la matrice K_r de la commande (2-1), voyons d'abord comment obtenir en chaque instant le vecteur d'état x afin de le multiplier par la matrice K_c . En effet, l'état x relatif à la forme canonique de contrôlabilité (2-2) est purement mathématique et il n'est pas généralement mesurable par des capteurs. Il est donc nécessaire de l'estimer à partir de grandeurs mesurables telles que l'entrée u et la sortie y . C'est le rôle de l'observateur que nous allons maintenant apprendre à le concevoir.

2-3 Observateur $H(s)$

Considérons la forme canonique d'observabilité de $G(s)$:

$$\dot{z} = A_o z + B_o u, \quad (2-8)$$

$$y = C_o z + D_o u. \quad (2-9)$$

Nous savons que cette forme est entièrement observable ce qui signifie que toute composante de l'état z affecte la sortie et sa valeur en un instant t peut être déduite de la réponse y et de l'entrée u mesurées durant un intervalle de temps arbitrairement petit $[t, t+\tau]$. Le rôle de l'observateur est

d'estimer en tout instant l'état z du système en mesurant l'entrée u et la sortie y . Pour que l'état estimé $\hat{z}$ soit voisin de z il doit vérifier l'équation (2-8) avec la moindre erreur. Cette erreur est reflétée par l'écart entre la vraie sortie y donnée par (2-9) et son estimation $\hat{y} = C_o \hat{z} + D_o u$. On peut donc écrire l'équation de $\hat{z}$ sous la forme :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{z}} &= A_o \hat{z} + B_o u + K_o (y - C_o \hat{z} - D_o u) \\ &= A_o \hat{z} + B_o u + K_o C_o (z - \hat{z})\end{aligned}\quad (2-10)$$

K_o étant une matrice qui doit être choisie de sorte à rapprocher le plus vite $\hat{z}$ de z . En posant $\varepsilon = z - \hat{z}$ et en retranchant (2-10) de (2-8), on déduit que l'écart ε vérifie l'équation :

$$\dot{\varepsilon} = (A_o - K_o C_o) \varepsilon.$$

Cette équation montre que $\varepsilon \rightarrow 0$ si les valeurs propres de $A_o - K_o C_o$ ont toutes des parties réelles négatives. Comme l'observateur est un système électronique ou numérique d'inertie négligeable, on peut éloigner ses pôles η_i de l'axe des imaginaires sans risquer la saturation. Cependant, si les modules de ces pôles sont trop grands, l'observateur aura une large bande passante et filtrera moins bien les signaux parasites. En pratique, les pôles η_i de l'observateur sont choisis 4 ou 5 fois plus éloignés de l'axe des imaginaires que les pôles μ_i de la boucle fermée. Ceci permet d'admettre, au moins pour une première analyse, que la convergence de l'estimation de $\hat{z}$ vers z est presque instantanée relativement à la rapidité du système de commande global.

Une fois les pôles η_i sont convenablement choisis, la matrice K_o se déduit à partir de l'égalité

$$\det(sI - A_o + K_o C_o) = \prod_{s=1}^n (s - \eta_i) \quad (2-11)$$

comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 2-2

Considérons de nouveau la fonction de transfert de l'exemple 2-1

$$G(s) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-s^2 + 3}{(s+1)^2(s+2)} \\ \frac{3s}{(s+2)(s-1)} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

et déterminons sa forme canonique d'observabilité selon la méthode donnée au paragraphe 1-3 (exemples 1-7 et 1-8 et exercice 1-4). On a :

$$\begin{aligned}g_{1\bullet}(s) &= \frac{1}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2} \begin{bmatrix} 0 & -s^2 + 3 \end{bmatrix}, \\ g_{2\bullet}(s) &= \frac{1}{s^2 + s - 2} \begin{bmatrix} 3s & s - 1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}A_o &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_o = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \\ C_o &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Posons $K_o = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} \\ \kappa_{31} & \kappa_{32} \\ \kappa_{41} & \kappa_{42} \\ \kappa_{51} & \kappa_{52} \end{bmatrix}$

Les colonnes 3 et 5 de la matrice $K_o C_o$ sont respectivement égales aux colonnes 1 et 2 de K_o et les autres colonnes de $K_o C_o$ sont nulles. Par conséquent, l'équation (2-11) s'écrit :

$$\det \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{11} & \mathcal{F}_{12} \\ \mathcal{F}_{21} & \mathcal{F}_{22} \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^5 (s - \eta_i)$$

et les éléments de la matrice K_o s'obtiennent par identification des 2 membres ce qui donne un système de 5 équations à 10 inconnues possédant une infinité de solutions. Une solution simple s'obtient en annulant $\mathcal{F}_{21}$ et $\mathcal{F}_{12}$ ce qui réduit l'équation précédente à la suivante :

$$\det \mathcal{F}_{11} \det \mathcal{F}_{22} = \prod_{i=1}^3 (s - \eta_i) \prod_{i=4}^5 (s - \eta_i)$$

avec

$$\mathcal{F}_{11} = \begin{bmatrix} s & 0 & 2 + \kappa_{11} \\ -1 & s & 5 + \kappa_{21} \\ 0 & -1 & s + 4 + \kappa_{31} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{F}_{22} = \begin{bmatrix} s & -2 + \kappa_{42} \\ -1 & s + 1 + \kappa_{52} \end{bmatrix}.$$

D'où l'on tire par identification les équations :

$$2 + \kappa_{11} = -\eta_1 \eta_2 \eta_3$$

$$5 + \kappa_{21} = (\eta_1 \eta_2 + \eta_1 \eta_3 + \eta_2 \eta_3)$$

$$4 + \kappa_{31} = -(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3)$$

$$-2 + \kappa_{42} = \eta_4 \eta_5$$

$$1 + \kappa_{52} = -(\eta_4 + \eta_5)$$

Choisissons pour l'observateur des pôles 5 fois plus éloignés de l'axe des imaginaires que les pôles μ_i de la boucle fermée de l'exemple 2-1 (pour éviter les oscillations rapides, la partie imaginaire d'un pôle est choisie inférieure à sa partie réelle).

$$\eta_1 = -5 + j, \quad \eta_2 = -5 + j, \quad \eta_3 = -5,$$

$$\eta_4 = -5 + 2j, \quad \eta_5 = -5 - 2j.$$

Pour ces pôles la résolution des équations d'identification précédentes conduit à

$$K_o = \begin{bmatrix} 128 & 0 \\ 71 & 0 \\ 11 & 0 \\ 0 & 31 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Une autre matrice K_o peut être directement obtenue par l'instruction

$$>> K_o = \text{place}(A', C', q)'$$

où $A' = A^T$ et $C' = C^T$. Pour « place », il n'est pas exigé que les matrices A et C aient la forme d'observabilité mais le couple (A, C) doit être observable.

Ayant la matrice K_o , les paramètres de l'équation (2-10) sont maintenant connus ce qui permet de déduire $\hat{z}$ à partir des signaux mesurables u et y . L'estimation $\hat{x}$ de l'état x qui doit multiplier K_c est liée à $\hat{z}$ par la relation

$$\hat{x} = T^{-1} \hat{z} \quad (2-12)$$

où T^{-1} est la matrice de passage de la forme d'observabilité à la forme de contrôlabilité. On obtient cette matrice à partir des équations :

$$A_c = T^{-1} A_o T \quad \text{et} \quad B_c = T^{-1} B_o$$

$$\text{ou} \quad T A_c = A_o T \quad \text{et} \quad T B_c = B_o. \quad (2-13)$$

À noter que (2-12) et (2-13) ne sont valables que si x et z ont la même dimension. Ceci sera vrai si et seulement si les réalisations (2-2) et (2-8) de $G(s)$ sont minimales, c'est-à-dire toutes les deux contrôlables et observables.

La résolution des équations (2-13) est simplifiée grâce à la forme particulière des matrices A_c , B_c de contrôlabilité et des matrices A_o et B_o d'observabilité comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 2-3

Revenons à la fonction de transfert des exemples 2-1 et 2-2.

$$G(s) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-s^2 + 3}{(s+1)^2(s+2)} \\ \frac{3s}{(s+2)(s-1)} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

Ses matrices A_c , B_c de contrôlabilité et A_o , B_o d'observabilité obtenues dans ces exemples sont

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -4 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_o = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

On détermine la matrice de passage $T = [v^1, \dots, v^5]$ en appliquant (2-13). D'abord

$$T B_c = B_o \Leftrightarrow v^2 = \beta_{\bullet 1} \quad \text{et} \quad v^5 = \beta_{\bullet 2}$$

où $\beta_{\bullet 1}$ et $\beta_{\bullet 2}$ sont les colonnes de B_o . Comme T doit être inversible, il est nécessaire que les co-

lonnes de B_o soient indépendantes. Si elles ne le sont pas, cela signifie que l'une des entrées est redondante (inutile). D'autre part, tenant compte des formes de A_o et A_c , l'équation matricielle $A_o T = T A_c$ est équivalente aux équations vectorielles suivantes :

$$\begin{cases} A_o v^1 = 2v^2 & (a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_o v^2 = v^1 - v^2 & (b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_o v^3 = -2v^5 & (c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_o v^4 = v^3 - 5v^5 & (d) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_o v^5 = v^4 - 4v^5 & (e) \end{cases}$$

Connaissant v^2 et v^5 , on déduit des équations (b), (e) et (d) les 3 autres colonnes de T :

$$(b) \rightarrow v^1 = (A_o + I)\beta_1$$

$$(e) \rightarrow v^4 = (A_o + 4I)\beta_2$$

$$(d) \rightarrow v^3 = A_o v^4 + 5\beta_2 \\ = (A_o^2 + 4A_o + 5I)\beta_2$$

d'où la matrice de passage

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 15 & 14 & 3 \\ 0 & 0 & 14 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Remarquer que

$$(a) \rightarrow (A_o^2 + A_o - 2I)\beta_1 = 0$$

$$(c) \rightarrow (A_o^3 + 4A_o^2 + 5A_o + 2I)\beta_2 = 0$$

ce qui est vrai à cause du théorème de Cayley-Hamilton appliqué aux dénominateurs des lignes $g_{1\bullet}(s)$ et $g_{2\bullet}(s)$ de $G(s)$.

EXERCICE 2-2

Considérant de nouveau le système $\Gamma = (A, B, C)$ de l'exercice 2-1, écrire sa forme d'observabilité $\Gamma_o = (A_o, B_o, C_o)$. Calculer la matrice K_o de l'observateur de l'état de Γ_o et construire la boucle fermée dont les pôles sont ceux donnés dans l'exercice 2-1.

Sachant que $\hat{x} = T^{-1}\hat{z}$, on déduit de l'équation (2-10) de l'observateur que

$$\hat{x}(s) = H(s) \begin{bmatrix} u(s) \\ y(s) \end{bmatrix} \text{ avec}$$

$$H(s) = T^{-1}(sI - A_o + K_o C_o)^{-1} [B_o - K_o D_o \quad K_o]$$

$H(s)$ est la fonction de transfert liant l'entrée u et la sortie y à l'estimation $\hat{x}$ de l'état x relatif à la forme de contrôlabilité. La structure de commande par imposition des pôles est la boucle fermée représentée par la figure 2-1.

Elle a une entrée v et elle est constituée du système commandé $G(s)$, de l'observateur $H(s)$ et de la matrice de retour d'état K_c . Les équations d'état de cette boucle s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A_c \hat{x} - B_c K_c \hat{x} + B_c v \\ &= A_c \hat{x} - B_c K_c \hat{x} + B_c K_c (x - \hat{x}) + B_c v \\ &= (A_c - B_c K_c) \hat{x} + B_c K_c T^{-1} \varepsilon + B_c v \\ \dot{\varepsilon} &= (A_o - K_o C_o) \varepsilon \end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique du système global (avec commande et observation) est donné par

$$\begin{aligned} \pi(s) &= \det \begin{pmatrix} sI_n - A_c + B_c K_c & B_c K_c T^{-1} \\ 0 & sI_n - A_o + K_o C_o \end{pmatrix} \\ &= \det(sI_n - A_c + B_c K_c) \det(sI_n - A_o + K_o C_o) \end{aligned}$$

ce qui justifie la détermination séparée des matrices K_c et K_o . C'est le principe de séparation entre commande et observation.

2-4 Choix de K_r et intégration

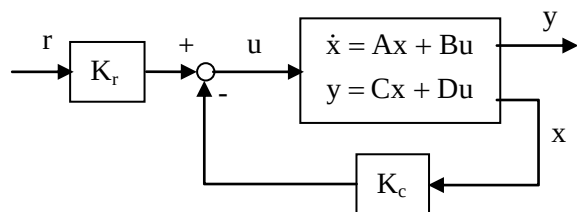


Fig 2-2 Boucle simplifiée

Comme nous l'avons signalé ci-dessus, en choisissant pour l'observateur des pôles suffisamment éloignés de l'axe des imaginaires, l'estimation $\hat{x}$ tend presque instantanément vers le vrai état x ce qui permet de négliger la dynamique $H(s)$ de

l'observateur et d'admettre que la boucle fermée est pratiquement celle de la figure 2-2.

Ici, la forme de la réalisation (A, B, C, D) de G(s) est quelconque. La fonction de transfert entre la référence r et la sortie y s'obtient en commençant par remplacer u par $K_r r - K_c x$ dans les équations en transformée de Laplace du système commandé, ce qui donne :

$$\begin{aligned} x(s) &= (sI - A + BK_c)^{-1} BK_r r(s), \\ y(s) &= (C - DK_c)x(s) + DK_r r(s). \end{aligned}$$

Puis, par élimination de x(s), on tire

$$y(s) = T(s)K_r r(s)$$

avec

$$T(s) = [(C - DK_c)(sI - A + BK_c)^{-1}B + D].$$

Généralement, on choisit K_r de sorte à minimiser le module de l'erreur stationnaire $e_{sp} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$ pour une référence r(t) qui tend vers un vecteur constant ρ . Or, d'après le théorème de la valeur finale,

$$\begin{aligned} e_{sp} &= \lim_{s \rightarrow 0} s e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s [r(s) - y(s)] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s [I - T(s)K_r] r(s). \end{aligned}$$

Comme $\lim_{s \rightarrow 0} s r(s) = \rho$,

$$e_{sp} = (I - T_0 K_r) \rho \quad (2-14)$$

où

$$T_0 = [(C - DK_c)(-A + BK_c)^{-1}B + D]. \quad (2-15)$$

K_r est donc la matrice qui minimise

$$\begin{aligned} f(K_r) &= \|e_{sp}\|^2 = e_{sp}^T e_{sp} \\ &= \rho^T \rho - 2\rho^T K_r^T T_0^T \rho + \rho^T K_r^T T_0^T T_0 K_r \rho \end{aligned}$$

Le minimum s'obtient en annulant la dérivée de f(K_r) par rapport à chaque élément de K_r . Sachant que la dérivée de K_r par rapport à son élément k_{ij} est la matrice (1_{ji}) dont tous les éléments sont nuls sauf celui de la case (i, j) qui vaut 1, on a :

$$\frac{\delta f}{\delta k_{ij}} = -2\rho^T (1_{ji}) T_0^T \rho + 2\rho^T (1_{ji}) T_0^T T_0 K_r \rho$$

$$= -2\rho^T (1_{ji}) T_0^T (I - T_0 K_r) \rho = 0 \quad \forall \rho, i, j$$

On déduit que la matrice K_r qui vérifie

$$T_0^T (I - T_0 K_r) = 0. \quad (2-16)$$

minimise le module de l'erreur stationnaire e_{sp} .

L'équation (2-16) est un système de pq équations linéaires à pq inconnues (les k_{ij}) dont la solution, notée $T_0^\dagger$, est appelée *pseudo-inverse* de T_0 . Le pseudo inverse d'une matrice peut être obtenu par Matlab à l'aide de l'instruction « pinv ». Ayant $K_r = T_0^\dagger$, on calcule l'erreur stationnaire minimum de position en appliquant (2-14).

Souvent $\text{rang}(T_0) = \min\{q, p\}$ (T_0 de rang plein) ce qui revient à écrire :

$$p < q \Rightarrow T_0^T T_0 \text{ inversible,}$$

$$q < p \Rightarrow T_0 T_0^T \text{ inversible,}$$

$$q = p \Rightarrow T_0 \text{ inversible.}$$

Dans ce cas, il est facile de vérifier par substitution dans (2-16) que

$$K_r = T_0^\dagger = \begin{cases} T_0^T (T_0 T_0^T)^{-1} & \text{si } q < p, \\ (T_0^T T_0)^{-1} T_0^T & \text{si } p < q, \\ T_0^{-1} & \text{si } p = q. \end{cases}$$

Si T_0 est de rang plein et $p \geq q$ (le nombre des entrées est au moins égal au nombre des sorties), la substitution de K_r par $T_0^\dagger$ dans (2-14) montre que l'erreur stationnaire de position sera nulle.

À noter que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y = y_L \Leftrightarrow y_L = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) u(s) = G(0) \lim_{t \rightarrow \infty} u,$$

d'où y_L appartient à l'espace engendré par les colonnes indépendantes de $G(0)$. Par conséquent, pour qu'une politique de commande annule l'erreur stationnaire $\forall \rho = \lim_{t \rightarrow \infty} r(t) \in \mathbb{R}^q$, il est nécessaire que $G(0)$ soit de rang q.

Exemple 2-4

Pour déterminer la matrice K_r de la commande $u = K_r r - K_c x$ du système G(s) considéré dans les exemples précédents, on calcule par Matlab la

signal v devient constant en régime stationnaire. Il suffit donc de stabiliser la boucle fermée pour annuler en même temps l'erreur stationnaire de position et l'effet de toute perturbation qui tend vers une constante.

Pour déterminer K_c et K_i , considérons le nouveau signal de commande

$$u = -K_c \cdot x + v = -K_c \cdot x + K_i \cdot z \quad (2-17)$$

$$\text{avec } z = \int_0^t e(\tau) \cdot d\tau \quad \text{ou } \dot{z} = e = r - y.$$

En ajoutant les composantes de z aux variables d'état et en remplaçant l'expression de u dans les équations du système commandé, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A \cdot x - B \cdot K_c \cdot x + B \cdot K_i \cdot z, \\ \dot{z} &= r - y = r - (C \cdot x + D \cdot u) - d \\ &= -C \cdot x + D \cdot K_c \cdot x - D \cdot K_i \cdot z + r - d, \\ y &= C \cdot x - D \cdot K_c \cdot x + D \cdot K_i \cdot z + d. \end{aligned} \quad (2-18)$$

Ces équations peuvent aussi s'écrire sous la forme compacte :

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= (\hat{A} - \hat{B} \cdot \hat{K}) \cdot \xi + \hat{I} \cdot (r - d), \\ y &= (\hat{C} - D \cdot \hat{K}) \cdot \xi + d \end{aligned} \quad (2-19)$$

avec

$$\begin{aligned} \xi &= \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{B} &= \begin{pmatrix} B \\ -D \end{pmatrix}, \quad \hat{C} = (C \quad 0), \\ \hat{K} &= (K_c \quad -K_i) \quad \text{et} \quad \hat{I} = \begin{pmatrix} 0 \\ I_q \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2-20)$$

Le polynôme caractéristique,

$$\det(s \cdot I_{n+q} - \hat{A} + \hat{B} \hat{K}) = \prod_{i=1}^{n+q} (s - \mu_i)$$

du système (2-19) étant de la même forme que (2-6), la matrice $\hat{K} = [K_c \quad -K_i]$ se calcule en suivant la même méthode donnée à la section 2-2 (ou à l'aide de l'instruction « place ») à condition de remplacer A par $\hat{A}$, B par $\hat{B}$ et à choisir $n + q$ pôles au lieu de n pôles. Si par ce moyen on arrive à stabiliser le système (2-19) et si la référence r et la perturbation d tendent vers des constantes,

l'état ξ devient constant en régime stationnaire, d'où le vecteur $\dot{\xi} = [\dot{x}; \dot{z}]$ s'annule et l'erreur $e = \dot{z}$ tend vers zéro. Cependant, comme nous l'avons indiqué plus haut, si $G(0)$ n'est pas de rang q , il n'existe aucune politique de commande u qui annule l'erreur stationnaire pour toute référence r et toute perturbation d de limites finies. Dans ce cas, d'après ce qui précède, le régime stationnaire ne sera jamais atteint ce qui signifie que l'intégrateur déstabilise le système lorsque $\text{rang}[G(0)] < q$.

Exemple 2-5

Pour le procédé considéré dans les exemples précédents, $\text{rang}[G(0)] = 1 < q = 2$ d'où l'intégration de l'erreur déstabilise ce système. Considérons donc un autre système obtenu à partir du précédent en ajoutant 1 au numérateur de l'élément $g_{21}(s)$. Pour ce nouveau système, le rang de $G(0)$ devient $2 = q$, les matrices A , B et D ne se modifient pas mais, à la place de $c_{21} = 0$ de la matrice C on a maintenant $c_{21} = 1$. En introduisant dans Matlab les matrices (2-20) et en appliquant « place » à (2-19) avec deux nouvelles composantes (-0.5 et -2) ajoutées au vecteur p des pôles désirés, on obtient les matrices K et K_i par les instructions suivantes (A et B déjà définies) :

```
>> C = [0 0 3 0 -1; 1 3 1 2 1];
>> pa = [-1+j, -1-j, -1+j/2, -1-j/2, -1, -0.5, -2];
>> Ach = [A zeros(5,2); -C zeros(2,2)];
>> D = zeros(2,2);
>> Bch = [B; -D];
>> Kch = place(Ach, Bch, pa);
```

On tire K_c et K_i en écrivant

```
>> Kc = Kch(:,1:5)

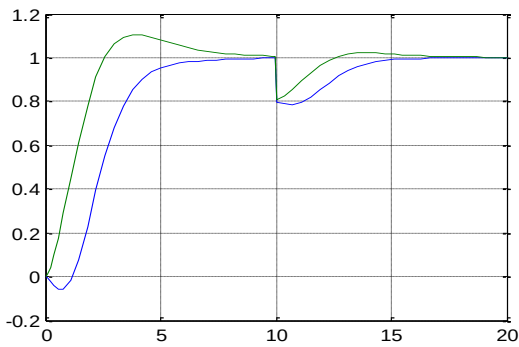
2.2693    1.6202   -3.2215   -2.2733   -0.0430
0.1777    0.3521    6.5729    5.3853    0.8798

>> Ki = -Kch(:, 6:7)

-0.5622    0.7579
1.0483    0.0691
```

Pour ces matrices, la simulation du système de la figure 2-4 avec une référence $r = [1, 1]$ appliquée à partir de l'instant initial et une perturbation $d = [0.2 \ 0.2]$ apparaissant à partir de l'instant 10 sec, donne la réponse ci-dessus. On voit bien que l'erreur stationnaire s'annule et l'effet de la perturbation est éliminé au bout de quelques se-

condes.



EXERCICE 2-4

Refaire l'exercice 2-3 en remplaçant le pré-compensateur par un intégrateur de l'erreur.

B- Commande par optimisation quadratique (LQG)

2-5 Introduction

Comme pour l'imposition des pôles, la commande par optimisation quadratique est aussi de la forme $u = v - Kx$ où v est lié à la référence r et à la sortie y par une relation algébrique ou dynamique.

Comme estimateur de l'état, nous allons employer dans cette section le filtre de Kalman dont la structure sera donnée plus loin. C'est un observateur d'état qui filtre les bruits aléatoires pouvant affecter l'état du système commandé $G(s)$ et les mesures de son entrée u et de sa sortie y .

La différence entre la commande par imposition des pôles et celle de l'optimisation quadratique réside surtout dans la manière de déterminer la matrice K_c . Au lieu de chercher à placer les pôles de la boucle fermée en des positions jugées convenables, la commande par optimisation quadratique consiste à déterminer une matrice de retour d'état K_c qui minimise une fonction J caractérisant l'écart entre le comportement réel du système et son comportement idéal. Cette fonction J , appelée *indice de performance*, est de la forme :

$$J[u, x(0)] = \int_0^{\infty} [x^T(\tau) \cdot Q \cdot x(\tau) + u^T(\tau) \cdot R \cdot u(\tau)] \cdot d\tau \quad (2-21)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ et $u \in \mathbb{R}^p$ désignent respectivement l'état et l'entrée du système commandé, Q est une matrice symétrique définie positive ou semi-définie positive et R est une matrice symétrique définie positive. Ces notions et l'interprétation pratique de l'indice de performance seront éclaircies au paragraphe suivant. La commande par optimisation quadratique est généralement désignée par LQG (Linear Quadratic Gaussian control) pour dire que l'action u est linéaire en r , y et x , que l'indice de performance est l'intégrale d'une forme quadratique en x et u et que le filtre de Kalman estime l'état à partir de la mesure de u et y en filtrant les bruits aléatoires supposés gaussiens. Dans le cas où l'état x du système est directement mesurable et que les bruits de mesure sont négligeables, le filtre de Kalman ne sera plus utile, et la commande LQG se réduit à une commande dite LQR (Linear Quadratic Regulator).

2-6 Notions préliminaires

Nous rappelons dans cette section les propriétés essentielles des formes quadratiques et nous établissons un théorème fondamental sur la stabilité des systèmes linéaires qui sera par la suite employé pour construire la politique LQG. Nous concluons la section par un exemple qui servira à interpréter physiquement l'indice de performance (2-21) et à mettre en évidence son utilité.

Formes quadratiques

On dit qu'une fonction $V : x \in \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est *définie positive* (resp. *semi-définie positive*) si et seulement si

$$\begin{aligned} V(0) &= 0 \\ \text{et } \forall x \neq 0, V(x) &> 0 \text{ (resp. } \geq 0) \end{aligned} \quad (2-22)$$

On dit que V est *définie négative* (resp. *semi-définie négative*) si et seulement si

$$\begin{aligned} V(0) &= 0 \\ \text{et } \forall x \neq 0, V(x) &< 0 \text{ (resp. } \leq 0). \end{aligned} \quad (2-23)$$

Si la fonction V ne vérifie aucune des deux conditions (2-22) ou (2-23), on dit qu'elle est *non-définie*. La figure 2-5 montre l'allure de ces 3 types de fonctions pour $x \in \mathbb{R}^2$.

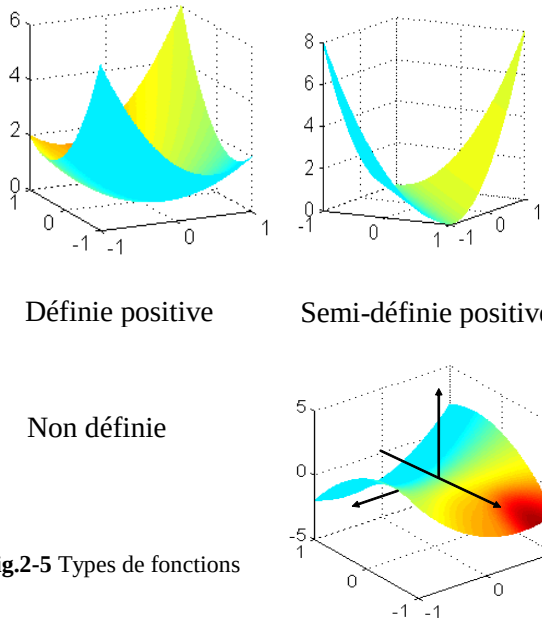


Fig.2-5 Types de fonctions

On dit qu'une matrice $Q = \{a_{ij}\} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ est hermitienne si $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$, $\forall i, j$. Les éléments diagonaux de Q sont donc réels et on a $Q = Q^*$ où le symbole « $*$ » signifie le conjugué du transposé de la matrice ou du vecteur. Il est évident qu'une matrice réelle symétrique est hermitienne.

La *forme quadratique* associée à une matrice hermitienne Q est la fonction $V : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$V(x) = x^* Q x, \quad x \in \mathbb{C}^n, \quad (2-24)$$

$$= \sum_i a_{ii} |x_i|^2 + \sum_{i \neq j} a_{ij} \bar{x}_i x_j.$$

On dit qu'une matrice hermitienne Q est définie positive (et on écrit $Q > 0$), négative (< 0), semi-définie positive (≥ 0), semi-définie négative (≤ 0) ou non-définie si $V(x) = x^* Q x$ a la propriété correspondante. La détermination de la définition de Q revient donc à examiner le signe de $V(x)$ et ceci sera facilité si l'on arrive à diagonaliser Q c'est-à-dire à trouver une base formée par les vecteurs propres de Q . Or

- Les valeurs propres de toute matrice hermitienne Q sont réelles.

Preuve

Si λ est une valeur propre de Q à laquelle correspond le vecteur propre v , sa conjuguée $\bar{\lambda}$ est une valeur propre de $\bar{Q}$ à laquelle correspond le vecteur propre $\bar{v}$. D'où

$$\bar{v}^T Q v = \lambda \|v\|^2 \quad \text{et} \quad v^T \bar{Q} \bar{v} = \bar{\lambda} \|v\|^2.$$

Mais le transposé du scalaire $\bar{v}^T Q v$ est égal à lui-même et comme $Q^T = \bar{Q}$, on a :

$$\bar{v}^T Q v = (\bar{v}^T Q v)^T = v^T \bar{Q} \bar{v},$$

ce qui montre que $\lambda = \bar{\lambda}$ d'où λ est réel. ■

- Les vecteurs propres unitaires d'une matrice Q hermitienne ($n \times n$) forment une base orthonormée de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$.

Preuve

Pour démontrer cette propriété rappelons que deux vecteurs a et b de $\mathbb{C}^n$ sont dit orthogonaux si $a^* b = 0$ et raisonnons par récurrence :

La propriété est trivialement vraie pour $n = 1$. Admettons qu'elle est vraie pour $n = k - 1$ et montrons qu'elle reste vraie pour $n = k$.

Soit v^1 un vecteur propre unitaire de Q . Cette matrice représente une application linéaire $f : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^k$. Posons λ_1 la valeur propre relative à v^1 et $\mathbb{C}^{k-1}$ le sous espace de $\mathbb{C}^k$ orthogonal à v^1 . Pour tout vecteur w de $\mathbb{C}^{k-1}$ on a $v^{1*} w = 0$ d'où

$$v^{1*} f(w) = v^{1*} (Qw) = (Qv^1)^* w = \lambda_1 v^{1*} w = 0$$

$$\Rightarrow f(w) \perp v^1 \Rightarrow f(w) \in \mathbb{C}^{k-1}.$$

Par conséquent, la restriction de f à $\mathbb{C}^{k-1}$ est une application $\underline{f} : \mathbb{C}^{k-1} \rightarrow \mathbb{C}^{k-1}$. Par hypothèse de récurrence, les vecteurs propres unitaires, $v^2, \dots, v^k$ de $\underline{f}$, qui sont aussi des vecteurs propres de f (de Q), forment une base orthonormée dans $\mathbb{C}^{k-1}$. Comme ces vecteurs sont tous orthogonaux à v^1 , ils constituent avec v^1 une base orthonormée dans $\mathbb{C}^k$ et la propriété est démontrée. ■

Tout $x \in \mathbb{C}^n$ est donc une combinaison linéaire des vecteurs propres de Q :

$$x = \xi_1 v^1 + \dots + \xi_n v^n = S \xi.$$

$\xi = [\xi_1 \ \xi_2 \ \dots \ \xi_n]^T$ est l'écriture de x dans la base des vecteurs propres et $S = [v^1 \ v^2 \ \dots \ v^n]$ est la matrice de passage de ξ à x . D'autre part, du fait que les colonnes de S sont orthonormées, on a $S^* S = I$, c'est-à-dire $S^{-1} = S^*$ et on dit que S est unitaire. Il est facile de vérifier que

$$S^*QS = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \quad (2-25)$$

où les μ_i sont les valeurs propres (réelles) de Q .
Comme

$$x^*Qx = \xi^*S^*QS\xi = \sum \mu_i |\xi_i|^2, \quad (2-26)$$

la matrice Q est définie positive (respectivement semi-définie positive) si et seulement si toutes ses valeurs propres μ_i sont > 0 (respectivement ≥ 0). Elle est définie négative (respectivement semi-définie négative) si toutes ses valeurs propres λ_i sont < 0 (respectivement ≤ 0) et elle est non-définie si ses valeurs propres ne sont pas toutes de même signe. Le théorème suivant montre l'utilité des formes quadratiques pour les problèmes de commande.

Théorème de Liapunov

Soient

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2-27)$$

l'équation de l'état libre x d'un système linéaire, Q une matrice réelle symétrique définie positive et X une autre matrice réelle symétrique vérifiant l'équation de Liapunov :

$$A^T X + XA = -Q. \quad (2-28)$$

Le système est stable si et seulement si la solution X de (2-28) est définie positive.

Preuve

a) Supposons que $X > 0$ et démontrons que les valeurs propres de A ont toutes des parties réelles négatives. Soit λ une valeur propre de A , $\bar{\lambda}$ la valeur propre conjuguée et soient v et $\bar{v}$ des vecteurs propres associés à λ et $\bar{\lambda}$ (si $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \bar{\lambda} = \lambda$). Comme $Q > 0$, tenant compte de (2-28), on a

$$\begin{aligned} 0 &> -v^*Qv = v^*A^T Xv + v^*XAv, \\ &= (A\bar{v})^T Xv + v^*X(Av), \\ &= (\bar{\lambda} + \lambda)v^*Xv. \end{aligned}$$

Comme la matrice $X > 0$, on a $v^*Xv > 0$ d'où $\lambda + \bar{\lambda} = 2\Re(\lambda) < 0 \Rightarrow$ système stable.

b) Réciproquement, si le système est stable, X est définie positive. En effet, d'après (2-27) et (2-28),

la dérivée par rapport au temps de la fonction dite de Liapunov, $V(x) = x^T X x$, $x \in \mathbb{R}^n$, est

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T X x + x^T X \dot{x}, \\ &= x^T A^T X x + x^T X A x, \\ &= -x^T Q x. \end{aligned} \quad (2-29)$$

Comme, par hypothèse, Q est définie positive, $\dot{V}(x) < 0$, $\forall x \neq 0$, d'où

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \dot{V}[x(t)] dt &= V[x(\infty)] - V[x(0)] \\ &= x^T(\infty)Xx(\infty) - x^T(0)Xx(0) < 0 \end{aligned}$$

Comme le système est stable, $x(\infty) = 0$, donc

$$x^T(0)Xx(0) > 0 \quad \forall x(0) \neq 0$$

ce qui montre que $X > 0$. ■

Remarque : Si $\dot{V} \leq 0$ mais non toujours nul, son intégrale sera aussi strictement négative. Le théorème précédent reste vrai si $Q \geq 0$ et si, pour toute solution non nulle $x(t)$, $\dot{V}[x(t)] = -x^T(t).Q.x(t)$ n'est pas nulle $\forall t$. On peut donc choisir $Q \geq 0$ et non nécessairement $Q > 0$ si, pour tout état initial $x(0) \neq 0$ la trajectoire de $x(t)$ ne reste pas à l'intérieur du domaine Ω des points où la forme quadratique $x^T.Q.x$ est nulle.

Exemple 2-5

Soit
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

la matrice de l'état libre d'un système. En écrivant dans Matlab

```
>> eig(A),
```

on obtient les valeurs propres de A : $\lambda_1 = -1 + i$, $\lambda_2 = -1 - i$ et $\lambda_3 = -3$ et le système est donc stable. D'après le théorème de Liapunov, la solution X de (2-28) doit être définie positive pour toute matrice Q définie positive. Pour le vérifier, choisissons par exemple $Q = I$. La solution X de l'équation de Liapunov s'obtient en écrivant :

```
>> Q = eye(3);
```

```
>> X = lyap(A, Q)
```

```
X =
```

```
0.7941  0.2059  0.1471
0.2059  0.3676  0.2353
0.1471  0.2353  0.4118
```

Remarque que X est symétrique. Elle est en plus définie positive car ces valeurs propres μ_i ,

```
>> mu = eig(X),
```

```
mu =
```

```
0.1479, 0.4520, 0.9736,
```

sont toutes positives.

Exemple d'introduction

L'exemple suivant servira à interpréter l'indice de performance et à montrer son utilité pour la recherche d'une commande convenable.

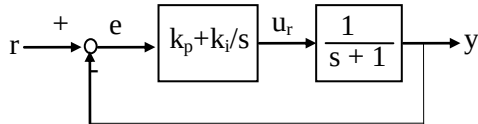


Fig.2-6 Commande PI d'un moteur cc

La figure 2-6 représente un système SISO de fonction de transfert $G(s) = 1/(s+1)$ commandé par un organe de type PI dont la fonction de transfert est $K(s) = k_p + k_i/s$.

Les variations en fonction du temps des signaux traversant le système peuvent se déduire de ses équations d'état. Or, la réalisation d'état du système commandé $G(s)$ est

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1r} &= -x_{1r} + u_r, \\ y &= x_{1r}.\end{aligned}\quad (2-30)$$

La réponse y sera égale à la référence r si l'état et l'action deviennent x_{1d} et u_d tels que

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1d} &= -x_{1d} + u_d, \\ r &= x_{1d}.\end{aligned}\quad (2-31)$$

Durant ce régime, l'action sera donc $u_d = \dot{r} + r$.

En retranchant (2-31) de (2-30), on trouve les équations des écarts $x_1 = x_{1r} - x_{1d}$, $u = u_r - u_d$ et $e = r - y$ entre les variables réelles et leurs valeurs désirées :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + u, \\ e &= -x_1.\end{aligned}\quad (2-32)$$

De même, la réalisation d'état de l'organe de commande $K(s)$ est

$$\begin{aligned}\dot{x}_{2r} &= e, \\ u_r &= k_i x_{2r} + k_p e.\end{aligned}\quad (2-33)$$

Comme on désire une erreur e nulle, l'état x_{2d} désiré de $K(s)$ doit être lié à u_d par les équations :

$$\begin{aligned}\dot{x}_{2d} &= 0, \\ u_d &= k_i x_{2d}.\end{aligned}\quad (2-34)$$

En retranchant (2-34) de (2-33) et sachant, d'après (2-32), que $e = -x_1$, les écarts $x_2 = x_{2r} - x_{2d}$, x_1 et u sont liés par les équations :

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= -x_1, \\ u &= k_i x_2 - k_p x_1.\end{aligned}\quad (2-35)$$

Des équations (2-32) et (2-35), on déduit que le vecteur $x = [x_1 \ x_2]^T$, qui représente l'écart entre l'état réel et l'état désiré du système global, a pour équation

$$\dot{x} = Ax$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} -(1+k_p) & k_i \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est important de noter que l'écart d'état x ne dépend que de sa valeur initiale et qu'il est indépendant de la référence r . D'autre part, on vérifie facilement que les valeurs propres de A ont des parties réelles négatives $\forall k_p$ et k_i positifs. D'où x et, par conséquent, e et u tendent vers 0 quel que soit l'état initial. Mais ceci ne suffit pas car, en plus, on exige généralement que la convergence vers 0 de ces variables soit rapide sans passer par des fortes actions. Dans ce but, nous allons déterminer les paramètres k_p et k_i de l'organe de commande de sorte à minimiser l'indice de performance :

$$J = \int_0^{\infty} (e^2 + a.u^2).dt, \quad a \geq 0. \quad (2-37)$$

Par cette minimisation, on réduit vite la valeur de l'écart $|e(t)|$ tout en évitant l'éventuelle saturation

des actionneurs causée par des grandes valeurs de l'action $|u(t)|$. Nous verrons plus loin comment choisir la constante a . Pour le moment, en remplaçant dans (2-37) e et u par leurs expressions données en (2-32) et (2-35), on trouve :

$$J = \int_0^{\infty} F(x) dt \quad (2-38)$$

$$\text{avec } F(x) = x_1^2 + a(k_i x_2 - k_p x_1)^2 \quad (2-39)$$

qui peut s'écrire sous la forme $F(x) = x^T Q x$ avec

$$Q = \begin{pmatrix} (1 + ak_p^2) & -ak_i k_p \\ -ak_i k_p & ak_i^2 \end{pmatrix}. \quad (2-40)$$

Il est clair d'après (2-39) que, pour $a > 0$, la fonction $F(x)$ est définie positive mais, pour $a = 0$, elle est semi-définie positive et s'annule sur la droite Ω d'équation $x_1 = 0$. Cependant, comme $k_i > 0$, il n'existe aucune trajectoire non nulle $x(t)$ qui reste incluse dans Ω car, d'après (2-36),

$$(x_1(t) = 0 \quad \forall t) \Rightarrow (x_2(t) = 0 \quad \forall t).$$

D'où la seule trajectoire incluse dans Ω se confond avec le point $(0, 0)$. Par conséquent, le théorème de Lyapunov s'applique $\forall a \geq 0$. Comme le système est stable, il existe une matrice X symétrique définie positive telle que $A^T X + X A = -Q$. En posant

$$X = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix}$$

et tenant compte de (3-17), on a :

$$\begin{pmatrix} -(1+k_p) & -1 \\ k_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(1+k_p) & k_i \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} (1+ak_p^2) & -ak_i k_p \\ -ak_i k_p & ak_i^2 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned} -2[(1+k_p)\alpha + \gamma] &= -(1+ak_p^2) \\ \alpha k_i - [(1+k_p)\gamma + \beta] &= ak_i k_p \\ 2\gamma k_i &= -ak_i^2 \end{aligned}$$

En résolvant ces équations, on obtient :

$$\gamma = -\frac{ak_i}{2}, \quad \alpha = \frac{1+ak_p^2+ak_i}{2(1+k_p)}, \quad (2-41)$$

$$\text{et } \beta = \frac{k_i + ak_i^2 + ak_i}{2(1+k_p)}.$$

Considérons maintenant la fonction de Liapunov $V(x) = x^T X x$. En démontrant le théorème de Liapunov, nous avons vu que pour un système stable,

$$J = -\int_0^{\infty} \dot{V}(x) dt = x^T(0) X x(0). \quad (2-42)$$

Le problème se ramène à déterminer les paramètres k_p et k_i qui minimisent l'expression (2-42) de l'indice de performance J . Or, à l'instant initial, au moment où le système est mis en marche, $y(0) = 0$, $e(0) = r(0)$ et, en cet instant, l'intégrale de e est encore nulle. On déduit de (2-32) et (2-35) que $x_1(0) = -r(0)$ et $x_2(0) = 0$ et en remplaçant dans (2-42), on trouve

$$\begin{aligned} J &= \begin{pmatrix} -r(0) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r(0) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \alpha r^2(0). \end{aligned}$$

Minimiser J revient donc à minimiser α donné par (2-41) et dont les dérivées par rapport aux paramètres k_p et k_i sont :

$$\frac{\delta \alpha}{\delta k_p} = \frac{ak_p^2 + 2ak_p - (1 + ak_i)}{2(1 + k_p)^2}, \quad (2-43)$$

$$\frac{\delta \alpha}{\delta k_i} = \frac{a}{2(1 + k_p)}. \quad (2-44)$$

L'équation (2-44) montre que α croît avec $k_i \forall k_p \geq 0$, d'où la valeur de k_i doit être voisine de 0 (sans l'annuler afin de conserver l'effet de l'intégration de e). En choisissant $k_i = 0.1$, l'équation (2-43) montre que α est minimum pour

$$k_p = -1 + \sqrt{1.1 + 1/a}. \quad (2-45)$$

Pour ce choix de k_i et k_p , les instructions suivantes de Matlab permettent de simuler l'écart e et l'action u pour différentes valeurs de a et pour une référence r égale à un échelon unité.

```
>> a = [0.25 1 4];
>> kp = -1 + sqrt(1.1 + 1./a);
>> for i = 1 : 3
>> A = [-(1 + kp(i)) 0.1; -1 0];
>> B = [0; 0];
```

```

>> C = [-1 0; -kp(i) 0.1];
>> D = [0; 0];
>> sys = ss(A, B, C, D);
>> t = 0 : 0.1 : 5; r = ones(size(t));
>> x0 = [-1; 0];
>> lsim(sys, r, t, x0)
>> hold on
>> end

```

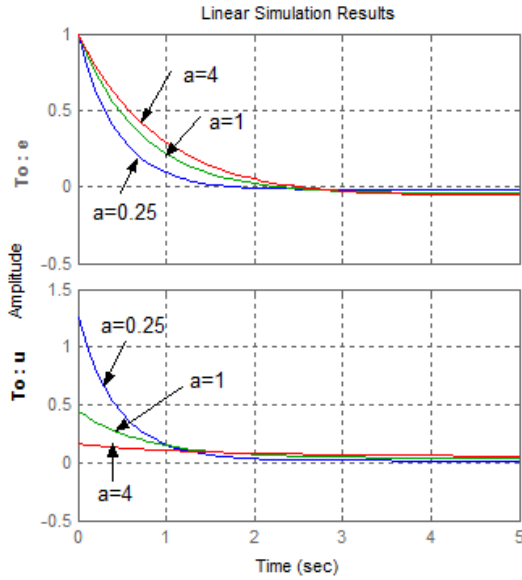


Fig.2-7 Erreur et action du système 3-3 pour $a = 0.25, 1$ et 4

On remarque sur la figure 2-7 que l'action u est d'autant plus forte et la convergence de e vers 0 est d'autant plus rapide que le poids « a » est faible. Ceci provient du fait que la minimisation de l'indice de performance J tend à diminuer les termes à grands coefficients au dépend des termes à faibles coefficients.

D'une manière générale, les matrices Q et R de l'indice de performance

$$J = \int_0^{\infty} [x^T(\tau).Q.x(\tau) + u^T(\tau).R.u(\tau)].d\tau$$

se déduisent d'une forme quadratique :

$$a_1 \xi_1^2 + \dots + a_n \xi_n^2$$

où ξ_i sont des variables physiques (l'erreur, le signal de commande, l'effet des perturbations, vitesse de variation de la réponse ...), dépendantes de x et u , qu'on cherche à minimiser autant que possible. Le choix des paramètres a_i est basée

sur la directive suivante : *Une variable décroît d'autant plus rapidement que son coefficient est grand relativement aux autres coefficients.*

2-7 Commande LQR

Considérons un système d'équations

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= A.x_r + B.u_r, \\ y_r &= C.x_r + D.u_r, \end{aligned} \quad (2-46)$$

où $x_r \in \mathbb{R}^n$, $u_r \in \mathbb{R}^p$ et $y_r \in \mathbb{R}^q$. La réponse désirée y_d définie par la référence r ($y_d = r$) sera obtenue s'il existe un état x_d et une commande u_d tels que

$$\begin{aligned} \dot{x}_d &= A.x_d + B.u_d, \\ y_d &= C.x_d + D.u_d. \end{aligned} \quad (2-47)$$

Les équations des écarts $x = x_r - x_d$, $u = u_r - u_d$ et $y = y_r - y_d$ s'obtiennent en retranchant (2-47) de (2-46) :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A.x + B.u, \\ y &= C.x + D.u. \end{aligned} \quad (2-48)$$

Remarquer que ces équations ne diffèrent des équations (2-46) du système que par l'interprétation de leurs variables.

Pour une commande de la forme $u_r = K_r r - K_c x_r$, on a $u_d = K_r r - K_c x_d$ d'où

$$u = u_r - u_d = -K_c x \quad (2-49)$$

où K_c est une matrice ($p \times n$) à déterminer. En remplaçant u par son expression dans les équations (2-48), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A - BK_c).x, \\ y &= (C - DK_c).x. \end{aligned} \quad (2-50)$$

Le problème de l'optimisation quadratique consiste à déterminer la matrice K_c de sorte que x tende vers 0 selon une trajectoire qui minimise l'indice de performance :

$$J = \int_0^{\infty} (x^T.Q.x + u^T.R.u).d\tau. \quad (2-51)$$

où Q est une matrice symétrique ($n \times n$) définie

positive ou semi-définie positive et R est une matrice ($p \times p$) symétrique définie positive.

En remplaçant dans (2-51) u par $-K_c x$, on obtient :

$$J = \int_0^{\infty} x^T (Q + K_c^T R K_c) x d\tau \quad (2-52)$$

où $(Q + K_c^T R K_c) > 0$. D'après le théorème de Lyapunov la boucle fermée (2-50) sera stable si et seulement s'il existe une matrice symétrique $X(K_c)$ définie positive vérifiant

$$(A - BK_c)^T X(K_c) + X(K_c)(A - BK_c) = -(Q + K_c^T R K_c) \quad (2-53)$$

Tenant compte de (2-50) et (2-53), la dérivée par rapport au temps de la fonction de Liapunov $V(x) = x^T X(K_c) x$ est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T X(K_c) x + x^T X(K_c) \dot{x}, \\ &= -x^T (Q + K_c^T R K_c) x. \end{aligned}$$

Par conséquent, (2-52) s'écrit

$$\begin{aligned} J &= -\int_0^{\infty} \dot{V}(x) dt = V(0) - V(\infty), \\ &= x^T(0) X(K_c) x(0) - x^T(\infty) X(K_c) x(\infty). \end{aligned}$$

S'il existe une solution $X(K_c)$ de (2-53) définie positive, le système sera stable et $x(\infty) = 0$. Dans ce cas, l'indice de performance se réduit à

$$J = x^T(0) X(K_c) x(0). \quad (2-54)$$

Pour minimiser cet indice $\forall x(0)$, on annule les dérivées de $X(K_c)$ par rapport aux éléments k_{ij} de K_c . Or, comme X est symétrique, la multiplication des deux membres de l'équation (2-53), à gauche par $x^T(0)$ et à droite par $x(0)$ donne :

$$\begin{aligned} 2x^T(0)(A - BK_c)^T X(K_c)x(0) \\ = -x^T(0)Qx(0) - x^T(0)K_c^T R K_c x(0). \end{aligned} \quad (2-55)$$

Sachant que $\delta K_c / \delta k_{ij}$ est la matrice (1_{ij}) dont tous les éléments sont nuls sauf l'élément (i, j) qui vaut 1, et comme R est symétrique, la dérivée de (2-55) par rapport à k_{ij} est donnée par

$$\begin{aligned} &-2x^T(0)(1_{ij})^T B^T X(K_c)x(0) \\ &+ 2x^T(0)(A - BK_c)^T \frac{\delta X}{\delta k_{ij}} x(0) \\ &= -2x^T(0)(1_{ij})^T R K_c x(0) \end{aligned} \quad (2-56)$$

L'équation (2-56) montre que $\delta X / \delta k_{ij} = 0 \forall i, j$ et $\forall x(0)$ si et seulement si X vérifie la relation :

$$B^T X = R K_c.$$

Comme la matrice R est définie positive, elle est inversible, d'où

$$\boxed{K_c = R^{-1} B^T X}. \quad (2-57)$$

En remplaçant dans (2-53) K_c par son expression (2-57), on trouve que X doit être une solution définie positive de

$$\boxed{A^T X + XA - XBR^{-1}B^T X = -Q} \quad (2-58)$$

appelée *équation algébrique de Riccati*. Cette équation en X est équivalente à un système de $n(n+1)/2$ équations non-linéaires (à cause du troisième terme du premier membre) à $n(n+1)/2$ inconnues qui sont les éléments $x_{ij} = x_{ji}$ de X . À cause de sa non linéarité, l'équation (2-58) admet généralement plusieurs solutions mais, si le couple (A, B) est stabilisable, une seule de ces matrices peut être définie positive. En remplaçant cette dernière, quand elle existe, dans (2-57), on obtient la matrice de commande K_c recherchée.

Maintenant, d'après (2-49), la commande effective est donnée par

$$u_r = -K_c(x_r - x_d) + u_d, \quad (2-59)$$

où $u_d(t)$ et $x_d(t)$ s'obtiennent à partir des équations (2-47) pour $y_d(t) = r(t)$. Cette commande est la meilleure selon le critère de performance $\min(J)$ mais elle nécessite la détermination de x_d et u_d pour chaque référence r ce qui n'est pas toujours facile ou pratique.

Pour éviter cette difficulté, on remplace dans (2-59) le terme $K_c x_d + u_d$ par $K_r r$ où la matrice K_r est choisie de sorte à minimiser le module de la valeur limite de $e = r - y$. Cette modification nous ramène à la forme de commande $u_r = K_r r - K_c x_r$ que nous avons considérée à la section 2-4 à part

que la matrice K_c est maintenant déduite de l'indice de performance J . Il est évident que cette forme n'est pas optimale mais son emploi est plus simple en pratique et sa performance est généralement assez voisine de la performance optimale de la commande (2-59). Comme nous l'avons montré à la section 2-4, la matrice K_r est indépendante de r et elle est égale au pseudo-inverse de

$$T_0 = [(C - DK_c)(-A + BK_c)^{-1}B + D].$$

Exemple 2-6

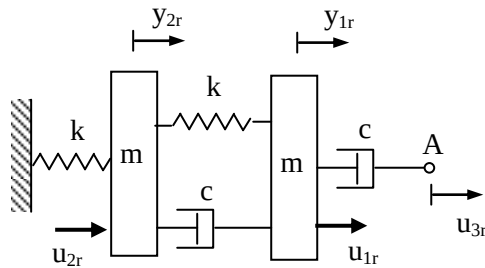


fig. 2-8 Système à 2 entrées, 3 sorties.

On associe au système de la figure 2-8 les variables d'état :

$$x_{1r} = y_{1r}, \quad x_{2r} = \dot{y}_{1r}, \quad x_{3r} = y_{2r}, \quad x_{4r} = \dot{y}_{2r}.$$

Ses entrées sont les forces u_{1r} et u_{2r} et la vitesse u_{3r} , ses sorties sont les déplacements y_{1r} et y_{2r} et on suppose que $m = k = c = 1$. En appliquant à chaque masse la loi de Newton, on déduit pour ce système les équations liant les vecteurs x_r , u_r et y_r . Comme nous l'avons vu plus haut, ces variables ont les mêmes équations que leurs écarts $x = x_r - x_d$, $u = u_r - u_d$ et $y = y_r - y_d$ des variables désirées x_d , u_d et y_d :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + u_3 + u_1 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \end{aligned} \quad (2-60)$$

$$\dot{x}_4 = x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + u_2$$

$$\text{et} \quad y_1 = x_1, \quad y_2 = x_3. \quad (2-61)$$

Pour déterminer la matrice de commande K_c qui minimise l'indice de performance

$$J = \int_0^{\infty} (8y_1^2 + 8y_2^2 + u_1^2 + u_2^2 + 2u_3^2) dt,$$

$$= \int_0^{\infty} (8x_1^2 + 8x_3^2 + u_1^2 + u_2^2 + 2u_3^2) dt,$$

Il suffit d'appliquer (2-57) et (2-58) avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Remarquer que Q est semi-définie positive mais R est définie positive.

La détermination de X à partir de l'équation de Riccati (2-58) nécessite la résolution d'un système non linéaire de 10 équations de second degré à 10 inconnues. Pour éviter ces longs calculs, on peut directement obtenir la matrice de commande K_c , la matrice de Riccati X ainsi que les valeurs propres μ_i de la matrice d'état $A - BK_c$ de la boucle fermée à l'aide de l'instruction « lqr » de Matlab. En écrivant :

```
>> A = [0 1 0 0; -1 -2 1 1; 0 0 0 1; 1 1 -2 -1];
>> B = [0 0 0; 1 0 1; 0 0 0; 0 1 0];
>> Q = [8 0 0 0; 0 0 0 0; 0 0 8 0; 0 0 0 0];
>> R = [1 0 0; 0 1 0; 0 0 2];
>> [Kc, X, mu] = lqr(A, B, Q, R),
```

on obtient le résultat suivant :

$$K_c = \begin{pmatrix} 1.8565 & 0.8532 & 0.2811 & 0.5433 \\ 0.6577 & 0.5433 & 1.5276 & 1.1677 \\ 0.9282 & 0.4266 & 0.1406 & 0.2717 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 6.0983 & 1.8565 & 0.4578 & 0.6577 \\ 1.8565 & 0.8532 & 0.2811 & 0.5433 \\ 0.4578 & 0.2811 & 5.0514 & 1.5276 \\ 0.6577 & 0.5433 & 1.5276 & 1.1677 \end{pmatrix}$$

$$\mu = \begin{pmatrix} -1.6632 + 1.0937i \\ -1.6632 - 1.0937i \\ -1.0605 + 1.4815i \\ -1.0605 - 1.4815i \end{pmatrix}$$

On voit bien que la boucle fermée est stable puisque ses valeurs propres ont toutes des parties réelles négatives. En plus, on peut vérifier que la matrice symétrique X est définie positive en calculant ses valeurs propres par « eig(X) ».

Soit maintenant $y_d(t) = [y_{d1}(t) \ y_{d2}(t)]$ la réponse désirée. Des équations (2-60) et (2-61) on tire

$$\begin{aligned} x_{1d} &= y_{1d}, & x_{2d} &= \dot{y}_{1d}, \\ x_{3d} &= y_{2d}, & x_{4d} &= \dot{y}_{2d}, \\ u_{1d} + u_{3d} &= \dot{v}_1 + v_1 - v_2, \\ u_{2d} &= \dot{v}_2 - v_1 + 2y_{2d}, \end{aligned} \quad (2-62)$$

où $v_1 = x_{1d} + x_{2d}$ et $v_2 = x_{3d} + x_{4d}$. L'une des variables u_{1d} ou u_{3d} étant arbitraire, on choisit

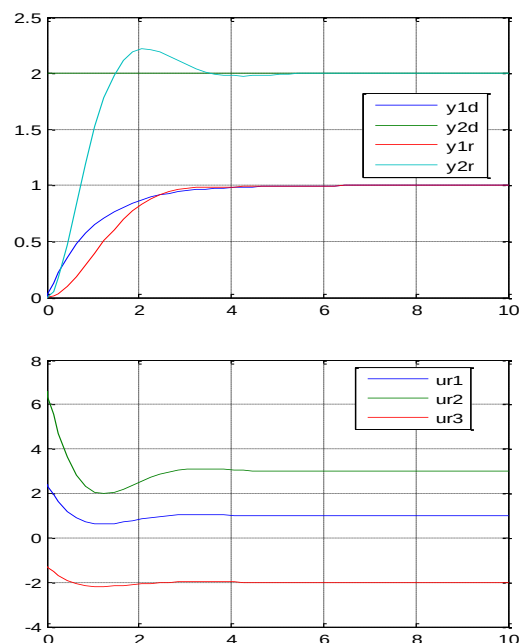
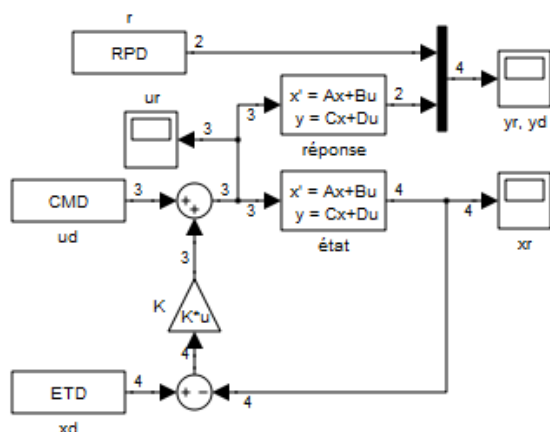
$$u_{1d} = \dot{v}_1 + v_1 \quad \text{et} \quad u_{3d} = -v_2. \quad (2-62')$$

Simulons ce système pour la référence

$$y_d = \begin{bmatrix} 1 - e^{-t} & 2 \end{bmatrix}^T.$$

Des équations (2-62) et (2-62'), on obtient les expressions des vecteurs x_d et u_d . Les valeurs numériques de ces vecteurs en des instants différents sont introduites dans Simulink à travers des portes « From workspace », dénommées RPD, CMD, ETD, en tapant sur la fenêtre de Matlab les instructions suivantes (voir la figure du simulateur) :

```
>> t = 0:0.1:20;
>> m = length(t);
>> yd = [1-exp(-t') 2*ones(m,1)];
>> xd = [1-exp(-t') exp(-t') 2*ones(m,1)
         zeros(m,1)];
>> ud = ones(m,1)*[1 3 -2];
>> RPD = [t' yd]; ETD = [t' xd]; CMD = [t' ud];
```



Si ce résultat est jugé insatisfaisant, on peut essayer de l'améliorer en choisissant d'autres pondérations Q et R dans l'indice de performance. Par exemple, pour diminuer le dépassement de y_2 , on donne un certain poids à $\dot{y}_2 = x_2$.

Comme on le constate des équations (2-62), le calcul de x_d et de u_d nécessite une ou plusieurs dérivations de la référence $r = y_d$. Or, en pratique, le signal r est souvent bruité ou non dérivable en tout instant t ce qui conduit à des difficultés qui doivent être surmontées par filtrage et lissage de r .

Pour éviter ces complications, on se contente souvent d'appliquer la politique sous-optimale $u_r = K_r r - K_c x_r$ représentée par le simulateur ci-dessous où la matrice K_r est indépendante de la référence r et s'obtient en écrivant

```
>> C = [1 0 0 0; 0 0 1 0];
>> T0 = C*inv(-A + B*Kc)*B;
>> Kr = pinv(T0)
```

```
1.8924 -0.2892
-0.3423 3.5276
1.8924 -0.2892
```

On voit bien que la réponse est assez voisine de celle obtenue ci-dessus par la politique optimale (2-59) bien que les signaux de commande diffèrent.

l'indice de performance. On remarque que le mode x_1 est instable mais contrôlable et le mode x_2 est non contrôlable mais stable. Pour ce système, il est possible de stabiliser x_1 par u tandis que x_2 tend de lui-même vers 0 et dans ce cas, le problème LQR admet une solution. En effet, l'équation de Riccati (2-58) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (1/r) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -q \end{pmatrix}$$

qui admet la solution définie positive

$$X = \begin{pmatrix} r + \sqrt{r(r+1)} & 0 \\ 0 & q/2 \end{pmatrix}.$$

Donc, d'après (2-57),

$$K_c = (1/r) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r + \sqrt{r(r+1)} & 0 \\ 0 & q/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{1+1/r} & 0 \end{pmatrix}$$

et $u = -K_c \cdot x = -(1 + \sqrt{1+1/r}) \cdot x_1.$

Les exemples précédents montrent que la méthode LQR ne s'applique que si le système est stabilisable (mais non nécessairement contrôlable). D'une manière formelle, on dit qu'un couple de matrice (A, B) est *stabilisable* s'il existe une matrice K_c tel que

$$A - BK_c \text{ stable.}$$

Cependant, cette condition n'est pas suffisante comme le montre l'exemple suivant.

3) Considérons le système

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + u \\ \dot{x}_2 &= a \cdot x_1 - x_2 \end{aligned}$$

ou $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot u$

et l'indice de performance

$$J = \int_0^\infty (q \cdot x_2^2 + r \cdot u^2) \cdot dt, \quad q > 0, r > 0,$$

$$= \int_0^\infty \left[x^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \cdot x + u^T \cdot (r) \cdot u \right] \cdot dt.$$

Seule la variable non directement contrôlable x_2 apparaît dans J . Or, si $a = 0$, cette variable ne dépend pas de u et J est minimum pour $u(t) = 0 \forall t$. Comme pour cette commande $x_1 \rightarrow \infty$, le système ne se stabilise pas et le problème LQR n'a pas de solution. Par contre, si $a \neq 0$, x_2 devient dépendant de x_1 qui dépend à son tour de u . Dans ce cas, on peut vérifier que la solution existe puisque la minimisation de J oblige x_2 et par conséquent x_1 à tendre vers 0.

Ainsi, non seulement le système commandé doit être stabilisable, mais, en plus, le terme $x^T \cdot Q \cdot x$ de J doit être en relation avec chaque mode instable de ce système. À noter que ces conditions ne sont pas plus restrictives que la condition de contrôlabilité exigée par la méthode de l'imposition des pôles. En effet la contrôlabilité entraîne la stabilisabilité mais l'inverse n'est pas vrai et, d'autre part, il est toujours possible d'introduire dans la formulation de J les modes instables du système.

2-8 Filtre de Kalman

Voyons maintenant comment estimer l'état x du système commandé à partir des signaux mesurables u et y tenant compte des perturbations qui affectent le fonctionnement du système et des bruits de mesure produits par les capteurs.

En ajoutant les effets des perturbations et des bruits de mesure sur l'état et la sortie, les équations du système commandé prennent la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A \cdot x + B \cdot u + w, \\ y &= C \cdot x + D \cdot u + v \end{aligned} \quad (2-63)$$

où w et v sont supposés des bruits blancs gaussiens vérifiant les relations suivantes $\forall t$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[w(t)] &= \mathbb{E}[v(t)] = \mathbb{E}[v(t)w^T(t)] = 0, \\ \mathbb{E}[w(t)w^T(t+\tau)] &= W\delta(\tau), \\ \mathbb{E}[v(t)v^T(t+\tau)] &= V\delta(\tau). \end{aligned} \quad (2-64)$$

W et V sont les matrices d'auto-corrélation des vecteurs aléatoires w et v . Elles sont symétriques, définies positives et indépendantes du temps (grâce à la stationnarité du bruit blanc).

Le rôle du filtre de Kalman consiste à produire une estimation $\hat{x}$ de l'état x à partir de l'entrée u et de la sortie y . Le vecteur $\hat{x}$ devant être voisin de x , il doit vérifier l'équation d'état (2-63) avec une certaine erreur reflétée par l'écart entre la vraie sortie y et son estimation $\hat{y} = C\hat{x} + Du$. En d'autres termes, le filtre de Kalman a la même structure que l'observateur d'état traité à la section 2-3. Son équation est la suivante :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + K_f(y - \hat{y}) \\ &= A\hat{x} + Bu + K_f(y - C\hat{x} - Du), \\ &= A\hat{x} + Bu + K_f C(x - \hat{x}) + K_f v.\end{aligned}\quad (2-65)$$

En retranchant (2-65) de (2-63), on obtient :

$$\dot{x} - \dot{\hat{x}} = (A - K_f C)(x - \hat{x}) + w - K_f v. \quad (2-66)$$

Sachant que $\mathbb{E}(w) = \mathbb{E}(v) = 0$, on déduit que l'équation de $\varepsilon = \mathbb{E}(x - \hat{x})$ est :

$$\dot{\varepsilon} = (A - K_f C)\varepsilon. \quad (2-67)$$

ε est la moyenne de l'erreur d'estimation $x - \hat{x}$. On dit que cette estimation est non biaisée si ε s'annule quand $t \rightarrow \infty$. Or, l'équation (2-67) montre que l'estimation ne sera pas biaisée si la matrice

$$A - K_f C \text{ est stable.} \quad (2-68)$$

Quand il existe une matrice K_f qui assure cette stabilité, on dit que le système commandé (ou le couple (A, C)) est *déTECTABLE*.

Supposons que le système est détectable et cherchons une matrice K_f qui vérifie (2-68) et qui minimise l'indice de performance

$$J_f = \int_0^\infty \varepsilon^T (W + K_f V K_f^T) \varepsilon dt. \quad (2-69)$$

Par la minimisation de cet indice, les composantes de l'erreur d'estimation ε qui diminuent le plus vite sont celles qui sont le plus affectées par les perturbations w et v (voir (2-66)).

Comme les transposées des équations (2-67) et (2-69) ont la même forme que les équations (2-50) et (2-52), on déduit directement que

$$K_f = Y C V^{-1} \quad (2-70)$$

où Y est la matrice symétrique définie positive vérifiant l'équation de Riccati :

$$AY + YA^T - Y C^T V^{-1} C Y = -W. \quad (2-71)$$

Remarques

1) Nous démontrerons au chapitre 5 que Y est, en régime stationnaire, la matrice de covariance de l'erreur d'estimation $x - \hat{x}$:

$$Y = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(x - \hat{x})(x - \hat{x})^T]. \quad (2-72)$$

D'où

$$\begin{aligned}\text{trace}(Y) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(x - \hat{x})^T (x - \hat{x})] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\|x - \hat{x}\|^2)\end{aligned}$$

ce qui permet d'évaluer à partir de Y la moyenne quadratique de l'erreur d'estimation.

2) Généralement, il est possible de déterminer la matrice de transfert L_x entre la perturbation d et l'état x ainsi que la matrice de transfert L_y entre d et la sortie y . En remplaçant dans (2-63) w par $L_x d$ et v par $L_y d + b$ où b est le vecteur des bruits de mesure, on obtient la forme suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A x + B u + L_x d, \\ y &= C x + D u + L_y d + b.\end{aligned}\quad (2-73)$$

En désignant par W_d et W_b les matrices d'auto-corrélation de d et b (supposés blancs) et en admettant que ces deux signaux sont indépendants (c'est presque toujours le cas en pratique), les matrices W et V données par (2-64) s'écrivent :

$$\begin{aligned}W &= L_x W_d L_x^T, \\ V &= L_y W_d L_y^T + W_b.\end{aligned}\quad (2-74)$$

Les matrices W_d et W_b sont, à priori, inconnues et choisies d'une manière subjective en se basant intuitivement sur des considérations physiques. En fait, de la même manière que les matrices Q et R de l'indice de performance J , les matrices W_d et

W_b sont des paramètres de conception que l'ingénieur a la liberté de modifier afin que le filtre soit le mieux adapté aux perturbations qui peuvent affecter son système réel.

Exemple 2-7

Supposons que les masses du système de l'exemple 2-6 sont soumises à des forces de frottement aléatoires d_1 et d_2 supposées blanches. En ajoutant ces perturbations aux forces d'action u_1 et u_2 , les équations d'état (2-60) du système commandé prennent la forme (2-73) avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Associons aux vecteurs d et b les matrices de corrélation

$$W_d = \begin{pmatrix} 1 & 0.2 \\ 0.2 & 2 \end{pmatrix}, \quad W_b = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

Les équations d'état (2-65) du filtre de Kalman peuvent s'écrire sous la forme

$$\dot{\hat{x}} = (A - K_f C) \hat{x} + [B - K_f D \quad K_f] \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{y} \\ \hat{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ I_n \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} D & 0_{n \times q} \\ 0_{n \times p} & 0_{n \times q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix}$$

où $[\hat{y}; \hat{x}]$ est la sortie du filtre.

La politique LQG s'obtient en connectant le filtre de Kalman au régulateur LQR comme le montre la figure (2-9). Sur cette figure, le signal direct v qui s'ajoute au retour d'état $-K_c \hat{x}_r$ peut avoir l'une des formes

$$v = K_c x_d - u_d, \quad v = K_r r \quad \text{ou} \quad \dot{v} = K_i e,$$

$$u_r = \begin{bmatrix} u \\ d \end{bmatrix}, \quad B_r = [B \quad L_x], \quad D_r = [D \quad L_y],$$

et les matrices A_f et B_f du filtre de Kalman sont données par

$$A_f = A - K_f C, \quad B_f = [B - K_f D \quad K_f].$$

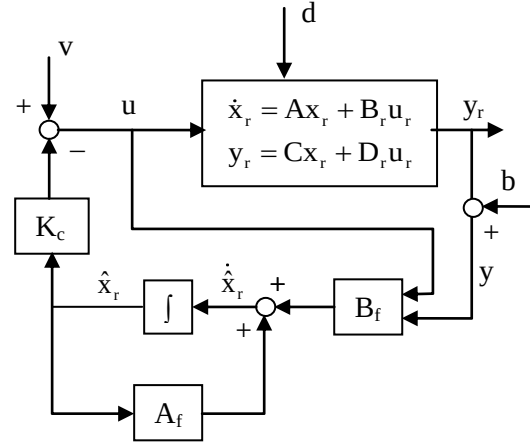


Fig.2-9 Commande LQG

On obtient les matrices de ces équations ainsi que les matrices K_f et Y en écrivant les instructions suivantes :

```
>> A = [0 1 0 0; -1 -2 1 1; 0 0 0 1; 1 1 -2 -1];
>> B = [0 0 0; 1 0 1; 0 0 0; 0 1 0];
>> C = [1 0 0 0; 0 0 1 0];
>> D = zeros(2,3);
>> Lx = [0 0; 1 0; 0 0; 0 1];
>> Ly = zeros(2,2);
>> Wd = [1 0.2; 0.2 2];
>> Wb = [0.5 0; 0 0.1];
>> sys = ss(A,[B Lx],C,[D Ly]);
>> [FK, Kf, Y] = kalman(sys, Wd, Wb)
```

où FK est le filtre de Kalman (A_f , B_f , C_f , D_f). La réponse est

$$A_f = A - K_f C$$

-0.39253	1	-1.0948	0
-1.1969	-2	-0.46314	1
-0.21896	0	-1.9751	1
0.77422	1	-4.0703	-1

$$B_f = [B - K_f D \quad K_f]$$

0	0	0	0.39253	1.0948
1	0	1	0.1969	1.4631
0	0	0	0.21896	1.9751
0	1	0	0.22578	2.0703

$$C_f = \begin{bmatrix} C \\ I_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D_f = \begin{bmatrix} D & 0_{q \times q} \\ 0_{n \times p} & 0_{n \times q} \end{bmatrix}$$

Kf =

$$\begin{bmatrix} 0.3925 & 1.0948 \\ 0.1969 & 1.4631 \\ 0.2190 & 1.9751 \\ 0.2258 & 2.0703 \end{bmatrix}$$

Y =

$$\begin{bmatrix} 0.1963 & 0.0984 & 0.1095 & 0.1129 \\ 0.0984 & 0.3696 & 0.1463 & 0.3081 \\ 0.1095 & 0.1463 & 0.1975 & 0.2070 \\ 0.1129 & 0.3081 & 0.2070 & 0.7799 \end{bmatrix}$$

Les matrices K_c et K_r (ou K_c et K_i/s) assurent la stabilité et la bonne poursuite sans trop charger les actionneurs et le filtre de Kalman estime l'état en filtrant les effets des perturbations et les bruits de mesure (supposés blancs).

EXERCICE 2-6

Déterminer manuellement un filtre de Kalman pour le système de l'exercice 2-5 en supposant que la force u et le capteur de dy/dt sont perturbés par des bruits blancs.

2-9 Politique MINIMAX

La politique LQG comporte deux points faibles. D'abord, la matrice de retour d'état K_c est déterminée sans tenir compte de l'effet des perturbations puis le filtre de Kalman est construit en supposant que ces perturbations sont blanches ce qui est rarement le cas en pratique. La politique $\mathcal{H}_\infty$, qui sera donnée au chapitre 5, n'a pas ces inconvénients tout en étant robuste dans le sens qu'elle est peu affectée par les erreurs de modélisation ou par la vieillesse. Pour établir et appliquer la politique $\mathcal{H}_\infty$ nous aurons besoin des méthodes fréquentielles et de l'analyse de robustesse, notions qui feront l'objet des chapitres 3 et 4. Néanmoins, comme introduction à cette politique, nous allons dans ce paragraphe modifier la commande LQR afin qu'elle tienne compte des perturbations quelle que soit leur nature (blanches ou colorées). Grâce à cette modification, les effets de ces perturbations seront réduits durant le régime transitoire et pour les éliminer en régime stationnaire on peut, comme ci-dessus, ajouter à la boucle de retour d'état une boucle d'intégration de l'erreur (voir fig. 2-4).

Quand le système commandé est perturbé, l'équation liant les écarts $x = x_r - x_d$, $u = u_r - u_d$ et $y = y_r - y_d$ est de la forme

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + L_x d \\ y &= Cx + Du + L_y d \end{aligned} \quad (2-75)$$

où L_x et L_y sont des matrices ($n \times r$) et ($q \times r$), r étant le nombre des perturbations affectant le système. Comme pour la politique LQR, l'objectif consiste à annuler x le plus vite possible sans dépasser les limites permises de l'action u . Mais, en politique MINIMAX, on tient compte du fait que la perturbation d peut s'opposer à l'action de u . Pour être du côté sûr, on la considère comme une autre entrée involontaire qui agit en sens opposé à l'effet de l'entrée volontaire u . Ceci nous conduit à la minimisation de l'indice de performance :

$$J(u, d) = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u - \gamma^2 d^T d) dt \quad (2-76)$$

où γ^2 est une pondération de la perturbation d . Ce problème peut être vu comme un jeu entre deux adversaires : le concepteur doit minimiser $\|x(t)\|$ par une commande u qui ne soit pas trop forte tout en supposant que le milieu extérieur (son adversaire) applique la perturbation d qui tend à maximiser $\|x(t)\|$ en augmentant d . Ce jeu est appelé minimax (minimiser le maximum de l'effet de d).

Les équations (2-75) et (2-76) peuvent se mettre sous la forme

$$\dot{x} = Ax + \tilde{B} \tilde{u} \quad (2-77)$$

$$J(\tilde{u}) = \int_0^\infty (x^T Q x + \tilde{u}^T \tilde{R} \tilde{u}) dt \quad (2-78)$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = [B \quad L_x], \\ \text{et} \quad \tilde{R} &= \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I_r \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2-79)$$

La minimisation de $J(\tilde{u})$ donnée par (2-78) sous la contrainte (2-77) nous ramènent au problème (2-51) de la commande LQR sauf que la matrice symétrique et inversible $\tilde{R}$ n'est plus définie positive. Néanmoins, s'il existe une matrice $\tilde{K}$ pour laquelle

$$Q + \tilde{K}^T \tilde{R} \tilde{K} > 0 \quad (2-80)$$

et une matrice symétrique $X(\tilde{K}) > 0$ vérifiant l'équation de Lyapunov

$$(A - \tilde{B}\tilde{K})^T X(\tilde{K}) + X(\tilde{K})(A - \tilde{B}\tilde{K}) = -(Q + \tilde{K}^T \tilde{R} \tilde{K}),$$

le système (2-77) commandé par le retour d'état $\tilde{u} = -\tilde{K}x$ sera stable.

Pour déterminer la matrice $\tilde{K}$ qui minimiser (2-78), on suit la même démarche que pour la minimisation de (2-51) ce qui conduit à des résultats analogues à (2-57) et (2-58), c.à.d.

$$\tilde{K} = \tilde{R}^{-1} \tilde{B}^T X \quad (2-81)$$

où X est une matrice symétrique définie positive vérifiant l'équation de Riccati

$$A^T X + XA - X\tilde{B}\tilde{R}^{-1}\tilde{B}^T X = -Q. \quad (2-82a)$$

Tenant compte des expressions (2-79) de $\tilde{R}$ et $\tilde{B}$, l'équation précédente s'écrit :

$$\boxed{A^T X + XA - X \left(BR^{-1}B^T - \frac{1}{\gamma^2} L_x L_x^T \right) X = -Q.} \quad (2-82b)$$

En remplaçant X , quand elle existe, dans (2-81), on obtient la matrice $\tilde{K}$ pour laquelle l'entrée $\tilde{u} = [u; d] = -\tilde{K}x$ est optimum. Pour séparer l'expression de u de celle de d , on pose $\tilde{K} = [K_c; -K_d]$ et on déduit de (2-81) et de l'expression (2-79) de $\tilde{R}$ et $\tilde{B}$ que

$$\boxed{u = -K_c x \quad \text{avec} \quad K_c = R^{-1} B^T X} \quad (2-83)$$

et

$$\boxed{d = K_d x \quad \text{avec} \quad K_d = \frac{1}{\gamma^2} L_x^T X.} \quad (2-84)$$

La relation (2-83) fournit la « meilleure » commande u sous la « pire » (worst case) perturbation d donnée par (2-84). Il est évident que les qualificatifs « meilleure » et « pire » concernent les effets de u et d sur la valeur minimale de $J(u, d)$ qui dépend du choix de γ . En particulier, comme le montre l'équation (2-84), plus γ^2 est petit, plus la minimisation de J augmente la perturbation d .

Donner à γ^2 sa plus petite valeur revient donc à supposer que la perturbation agit de la manière la plus défavorable.

Nous attirons l'attention que la matrice optimale $\tilde{K}$ donnée par (2-81) doit satisfaire (2-80) équivalente à

$$F = Q + X \left(BR^{-1}B^T - \frac{1}{\gamma^2} L_x L_x^T \right) X > 0. \quad (2-85)$$

Comme la matrice $Q + XBR^{-1}B^T X$ est définie positive ($Q \geq 0$ et $R^{-1} > 0$), la condition (2-85) sera satisfaite pour les valeurs de γ qui sont supérieures à une certaine valeur $\gamma_{\min}$. En choisissant $\gamma = \infty$, la relation (2-84) et l'équation de Riccati (2-82b) montrent que la perturbation ne rentre plus en considération et on est ramené à la politique LQR. À l'autre extrémité, en prenant $\gamma = \gamma_{\min}$, on donne à la perturbation le maximum d'importance et, pour cette valeur de γ , la politique MINIMAX est désignée par $\mathcal{H}_\infty$. Par conséquent, en ce qui concerne le rejet des perturbations, la politique MINIMAX est une intermédiaire entre les politiques LQR et $\mathcal{H}_\infty$. En fait, en plus de la commande MINIMAX avec $\gamma = \gamma_{\min}$, la politique $\mathcal{H}_\infty$ dans son sens général incorpore l'estimateur d'état et peut tenir compte des incertitudes de modélisation. Ceci sera détaillé au chapitre 5.

MINIMAX avec intégration de l'erreur

Si l'on désire éliminer les effets des perturbations en régime stationnaire, on applique au procédé une commande de la forme $u_r = K_i z - K_c x_r$ où z est l'intégrale de l'erreur $e = r - y_r = y_d - y_r = -y$, d'où

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -y \\ &= -Cx - Du - L_y d \\ &= -Cx - \tilde{D}\tilde{u}, \quad \tilde{D} = [D \quad L_y]. \end{aligned} \quad (2-86)$$

À noter que si le système suit exactement le fonctionnement désiré ($y_r = r \forall t$), e et z s'annulent et la commande dans ce cas idéal sera $u_d = -K_c x_d$ d'où $u = u_r - u_d = K_i z - K_c x$.

Avec les q nouvelles équations d'état (2-86), au lieu de l'équation (2-77), on a maintenant :

$$\dot{\xi} = \hat{A}\xi + \hat{B}\tilde{u} \quad (2-87)$$

où

$$\xi = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} \tilde{B} \\ -\tilde{D} \end{pmatrix}.$$

L'équation (2-87) ne diffère de (2-77) que par ses matrices et au lieu de (2-78), l'indice de performance devient

$$J(\tilde{u}) = \int_0^\infty (\xi^T \hat{Q} \xi + \tilde{u}^T \tilde{R} \tilde{u}) dt \quad (2-88)$$

où $\hat{Q}$ est toujours une matrice symétrique ≥ 0 mais de dimension $n+q$.

On procède donc de la même manière que dans le cas sans intégration à part que les matrices A , $\tilde{B}$ et Q seront remplacées par $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{Q}$. On obtient ainsi une matrice $\hat{K} = \tilde{R}^{-1} \hat{B}^T \hat{X}$ pour laquelle l'entrée $\tilde{u} = -\hat{K} \xi$ stabilise (2-87) et minimise (2-88). Pour que la relation $\hat{Q} + \hat{K}^T \tilde{R} \hat{K} > 0$ qui remplace (2-80) soit satisfaite, il est évident que γ doit être supérieur à une valeur minimum $\gamma_{\min}$. D'autre part, pour séparer l'effet de x de celui de z sur la commande optimale u et sur la pire perturbation d , on pose

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} K_c & -K_i \\ -K_{dx} & K_{dz} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{X} = \begin{pmatrix} X_x \\ X_z \end{pmatrix}$$

et un simple calcul donne

$$u = K_i z - K_c x \quad \text{et} \quad d = K_{dx} x - K_{dz} z \quad (2-89)$$

avec

$$\begin{aligned} K_i &= R^{-1} D^T X_z, & K_c &= R^{-1} B^T X_x, \\ K_{dx} &= \frac{1}{\gamma^2} L_x^T X_x, & K_{dz} &= \frac{1}{\gamma^2} L_y^T X_z. \end{aligned} \quad (2-90)$$

Exemple 2-8

Considérons de nouveau le système de l'exemple 2-6 soumis à des perturbations quelconques d_1 et d_2 (non nécessairement blanches) et dont les matrices L_x et L_y sont définies dans l'exemple 2-7. Pour minimiser les effets de ces perturbations durant le régime transitoire et les annuler en régime stationnaire, appliquons la politique minimax avec intégration de l'erreur.

Introduisons d'abord les matrices du système, de l'indice performance et des perturbations ainsi que les extensions $\tilde{B}$, $\tilde{D}$, $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{Q}$.

```
>> A = [0 1 0 0; -1 -2 1 1; 0 0 0 1; 1 1 -2 -1];
>> B = [0 0 0; 1 0 1; 0 0 0; 0 1 0];
>> C = [1 0 0 0; 0 0 1 0];
>> D = zeros(2,3);
>> Lx = [0 0; 1 0; 0 0; 0 1];
>> Ly = zeros(2,2);
>> Q = [8 0 0 0; 0 0 0 0; 0 0 8 0; 0 0 0 0];
>> R = [1 0 0; 0 1 0; 0 0 2];
>> Bt = [B, Lx];
>> Dt = [D, Ly];
>> Ac = [A zeros(4,2); -C zeros(2,2)];
>> Bc = [Bt; -Dt];
>> Qc = [Q zeros(4,2); zeros(2,4) 5*eye(2)];
```

Pour tenir compte des pires perturbations, nous devons associer à γ une valeur vérifiant $F = \hat{Q} + \hat{K}^T \tilde{R} \hat{K} > 0$ légèrement supérieure à $\gamma_{\min}$. Pour $\gamma < 1$, on trouve que la matrice F est non définie et pour $\gamma = 1$, elle est presque semi-définie positive et elle devient franchement définie positive pour $\gamma > 1$. Choisissons $\gamma = 2$, définissons la matrice $\tilde{R}$ et résolvons par l'instruction « care » l'équation de Riccati (comme $\tilde{R}$ est non définie positive on ne peut pas employer l'instruction « lqr » mais « care » fournit les mêmes résultats : $\hat{X}$, $\hat{K}$ et le vecteur Lam des valeurs propres de la boucle fermée).

```
>> g = 2; % valeur de gamma
>> Rt = [R,zeros(3,2);zeros(2,3),-(g^2)*eye(2)];
>> [Xc, Lam, Kc] = care(Ac,Bc,Qc,Rt);

>> K = Kc(1:3,1:4)

    3.6838    1.4509    0.4530    0.7383
    0.7113    0.7383    3.3652    2.1035
    1.8419    0.7255    0.2265    0.3692

>> Ki = -Kc(1:3,5:6)

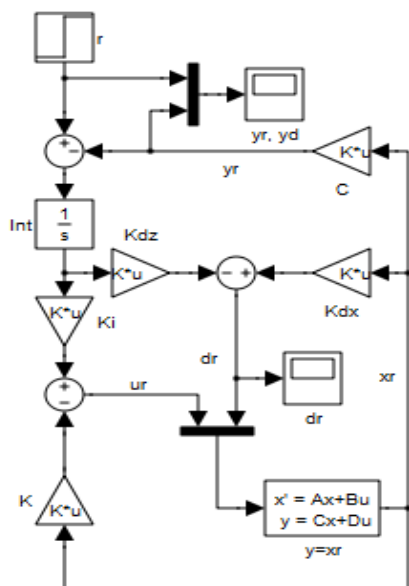
    1.9998    0.0295
   -0.0380    2.5817
    0.9999    0.0147

>> Kdx = -Kc(4:5,1:4)

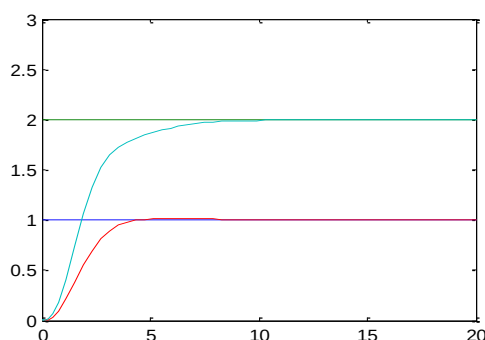
    0.9209    0.3627    0.1133    0.1846
    0.1778    0.1846    0.8413    0.5259
```

```
>> Kdz = Kc(4:5,5:6)
```

```
0.4999 0.0074
-0.0095 0.6454
```



Pour tester l'efficacité de cette politique, introduisons dans le simulateur ci-dessus les matrices obtenues en appliquant le vecteur de référence constant $r = [1; 2]$. Nous attirons l'attention que dans ce simulateur les matrices B et D du procédé sont remplacées par les matrices $\tilde{B}$ et $\tilde{D}$ afin de tenir compte des effets des perturbations sur l'état et la réponse. Pour $\gamma = 2$, le résultat de la simulation sous la pire perturbation est la suivante.



EXERCICE 2-7

Refaire l'exercice 2-5 en supposant que la force u est perturbée par un frottement inconnu d .

AUTRES EXERCICES ET COMPLÉMENTS

2-8. Formule d'Ackermann. Soit $\dot{x} = Ax + bu$ l'équation d'état d'un système contrôlable à une seule entrée et soit $\pi(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0$ son polynôme caractéristique. Pour une commande de la forme $u = v - kx$, il s'agit de déterminer le vecteur k pour que le polynôme caractéristique de la boucle fermée soit $\pi_d(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_0$.

1) Donner la formule de la matrice de passage P qui transforme les équations du système à la forme $\dot{z} = A_c z + b_c u$ de contrôlabilité.

2) Si la commande est de la forme $u = v - k_z z$, déterminer le vecteur k_z pour que le polynôme caractéristique de la boucle fermée soit $\pi_d(s)$.

3) Montrer que $\pi(A_c) = 0$ et que

$$\pi_d(A_c) = \sum_{k=0}^n (\alpha_k - a_k) A_c^k.$$

4) Montrer que

$$[1 \ 0 \ \dots \ 0] \pi_d(A_c) = k_z$$

$$\text{et } \pi_d(A_c) P^{-1} = P^{-1} \pi_d(A).$$

5) Dédurre que $k = [0 \ 0 \ \dots \ 1] M_c^{-1} \pi_d(A)$ où M_c est la matrice de contrôlabilité de (A, b) .

6) Appliquer la formule d'Ackermann précédente au système d'équations $\dot{x}_1 = x_1 + x_2$, $\dot{x}_2 = x_2 + u$ quand les pôles désirés de la boucle fermée sont $-1 \pm j$. Vérifier le résultat par «place» ou «acker».

7) Donner par dualité la formule d'Ackermann de l'observateur.

2-9. Méthode cyclique. Une matrice est cyclique si sa forme de Jordan ne comporte qu'un seul bloc par valeur propre. Soit $\dot{x} = Ax + Bu$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

l'équation d'état d'un système.

1) Écrire la matrice de passage T de cette équation à la forme de Jordan, $\dot{z} = \mathcal{A}z + \mathcal{B}u$. $\mathcal{A}$ est-elle stable ? cyclique ? $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ est-il contrôlable ?

2) Choisir une matrice H telle que $A_H = \mathcal{A} - \mathcal{B}H$ est cyclique et $(A_H, \mathcal{B})$ est contrôlable.

3) Choisir un vecteur h tel que $(A_H, \mathcal{B}h)$ est contrôlable.

4) Déterminer le vecteur k_z qui place les 3 valeurs propres de $A_H - \mathcal{B}h k_z$ au point -1 .

5) Dédurre que si $K = (H + h k_z) T^{-1}$, la commande $u = v - Kx$ place les 3 pôles de la boucle fermée au point -1 .

2-10. Observateur partiel. Si certaines variables d'état d'un système sont mesurables par des capteurs d'autres non, on peut écrire leurs équations sous la forme

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u$$

où le vecteur x^1 regroupe les variables mesurables et x^2 les variables non mesurables qui doivent être estimées à partir de la mesure de u et de x^1 .

1) On définit la dynamique de l'estimateur par

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}^2 &= A_{21}x^1 + A_{22}\hat{x}^2 + B_2u \\ &+ K_o[\dot{x}^1 - A_{11}x^1 - B_1u - A_{12}\hat{x}^2]. \end{aligned}$$

Justifier cette définition.

2) Pour éliminer la dérivée $K_o\dot{x}^1$ du second membre, on pose $\hat{x}^2 = z + K_o x^1$. Montrer que l'équation précédente prend la forme

$$\dot{z} = (A_{22} - K_o A_{12})z + [B_x \quad B_u] \begin{pmatrix} x^1 \\ u \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{aligned} B_x &= (A_{22} - K_o A_{12})K_o + (A_{21} - K_o A_{11}), \\ B_u &= B_2 - K_o B_1. \end{aligned}$$

3) Dire comment déterminer K_o par l'instruction «place» et sous quelle condition. Représenter le diagramme bloc de cet observateur.

2-11. La distribution de la température le long d'une tige métallique est décrite par ses valeurs moyennes u_1, x_1, x_2, x_3, u_2 dans 5 régions de même longueur.

u_1	x_1	x_2	x_3	u_2
-------	-------	-------	-------	-------

La variation de la température d'une région étant proportionnelle au flux de chaleur reçu par cette région, on a :

$$\dot{x}_i = k(x_{i-1} - x_i) + k(x_{i+1} - x_i), \quad i = 1, 2, 3$$

où $x_0 = u_1, x_4 = u_2$ et k une constante dépendante du facteur de conduction et de la chaleur spécifique du matériau. On maintient $u_2 = 0$ (la température ambiante) et on agit sur x_1, x_2 et x_3 en modifiant u_1 . Pour simplifier, on prend $k = 1$.

1) Montrer que ce système est contrôlable et observable.

2) Si l'on dispose de 3 capteurs pour mesurer x_1, x_2 et x_3 , déterminer une commande qui annule tout état initial avec une constante de temps de 0.25 sec.

3) Refaire 2) quand on ne dispose que d'un seul capteur (indication : exercice 2-10).

2-12. Pôles LQR. Soient $\dot{x} = Ax + bu, y = cx$ les équations d'un système SISO et $u = -kx$ la commande par retour d'état. Les variables dans ces équations représentent les écarts entre les valeurs réelles et les valeurs désirées. Le vecteur k qui minimise l'indice de performance

$$J = \int_0^\infty (y^2 + \rho u^2) dt, \quad \rho > 0,$$

est $k = \rho^{-1} b^T X$

où X est la matrice symétrique dp qui vérifie

$$A^T X + XA - Xb\rho^{-1}b^T X = -c^T c. \quad (1)$$

Justifier.

1) Effectuer sur (1) les opérations suivantes :

- Ajouter et retrancher sX au 1^{er} membre.
- Multiplier à gauche par $b^T(-sI - A^T)^{-1}$ et à droite par $(sI - A)^{-1}b$.
- multiplier par ρ^{-1} .

Déduire que

$$\begin{aligned} [1 + k(sI - A)^{-1}b][1 + b^T(-sI - A^T)^{-1}k^T] \\ = 1 + (1/\rho)G^T(-s)G(s). \end{aligned}$$

2) Déterminer les matrices X et Y qui vérifient

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ F & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -H \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -H \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ F & I \end{pmatrix}$$

et déduire que si FH et HF sont des matrices carrées, $\det(I + FH) = \det(I + HF)$.

3) Utiliser cette propriété pour démontrer que

$$\frac{\pi_F(s)\pi_F(-s)}{\pi(s)\pi(-s)} = 1 + (1/\rho)G^T(-s)G(s)$$

où π_F est le polynôme caractéristique de la boucle fermée et π est le polynôme caractéristique de la boucle ouverte. Déduire que les pôles LQR de la boucle fermée autour de $G(s)$ sont les zéros à p.n de $1 + (1/\rho)G^T(-s)G(s)$.

4) Pour $G(s) = 1/(s - 1)^2$, représenter le lieu des pôles de la boucle fermée quand ρ varie de 0 à l'infini. Pour quelle valeur de ρ la partie réelle de ces pôles est égale à -2 ?

2-13. Soit le système instable

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} d, \quad y = (1 \ 0)x + b$$

où la perturbation d et le bruit de mesure b sont blancs de matrices de covariance respectives

$$W_d = 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad W_b = 1.$$

Nominalement, $\mu = 1$ mais cette valeur n'est pas certaine.

1) Pour $\mu = 1$, déterminer le vecteur de retour d'état k_c qui minimise l'indice de performance

$$J = \int_0^{\infty} [5(x_1 + x_2)^2 + u^2] dt$$

et le vecteur k_o du filtre de Kalman.

2) Pour $\mu \neq 1$ et pour les vecteurs k_c et k_o trouvés dans 1), écrire, en fonction de μ , les équations d'état de la boucle fermée et, employant le critère de Routh, donner l'intervalle de variation de μ où le système reste stable.

2-14. Factorisation première d'une matrice de transfert. Soit $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$ une réalisation stabilisable et détectable d'une matrice de transfert $G(s)$ et $u = v - K_c x$ une commande qui stabilise la boucle fermée.

1) Démontrer que $G(s) = N_d(s)D_d^{-1}(s)$ (factorisation droite) où $N_d(s)$ et $D_d(s)$ sont les matrices stables données par

$$N_d(s) = C\Phi_c(s)B \quad \text{et} \quad D_d(s) = I + K_c\Phi_c(s)B$$

avec $\Phi_c(s) = (sI - A + BK_c)^{-1}$.

2) Soit K_o une matrice qui stabilise l'estimateur $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_o\varepsilon_y$ où $\varepsilon_y = y - C\hat{x}$ est l'erreur d'estimation de la sortie y . Sachant que cette erreur tend vers 0, montrer que $G(s) = D_g^{-1}(s)N_g(s)$ (factorisation gauche) où $N_g(s)$ et $D_g(s)$ sont les matrices stables données par

$$N_g(s) = C\Phi_o(s)B \quad \text{et} \quad D_g(s) = I + C\Phi_o(s)K_o$$

avec $\Phi_o(s) = (sI - A + K_oC)^{-1}$.

3) En boucle fermée, l'équation de l'estimé de l'état est

$$\dot{\hat{x}} = (A - BK_c)\hat{x} + Bv + K_o\varepsilon_y.$$

Déterminer les matrices de transfert liant $[u ; y]$ à $[v ; \varepsilon_y]$ et $[v ; \varepsilon_y]$ à $[u ; y]$ et déduire qu'il existe des matrices inversibles $U_d(s)$, $V_d(s)$, $U_g(s)$, $V_g(s)$ pour lesquelles les *égalités de Bezout* suivantes sont vérifiées :

$$U_g(s)D_d(s) + V_g(s)N_d(s) = I,$$

$$D_g(s)U_d(s) + N_g(s)V_d(s) = I.$$

Déduire que les matrices $D_d(s)$ et $N_d(s)$ n'ont pas de zéros en commun (premiers entre eux) et il en est de même de $D_g(s)$ et $N_g(s)$.

4) Écrire une réalisation de $G(s) = (s - 2)/(s - 1)$ et appliquer ce qui précède pour obtenir les factorisations droite et gauche de $G(s)$.