

Chapitre 3

ANALYSE FRÉQUENTIELLE

3-1 INTRODUCTION

Considérons un système linéaire invariant à p entrées et q sorties. Supposons que ce système est initialement inerte (état initial nul) et désignons par $u = [u_1 ; \dots ; u_p]$ le vecteur des entrées et par $y = [y_1 ; \dots ; y_q]$ le vecteur des sorties (fig. 3.1).

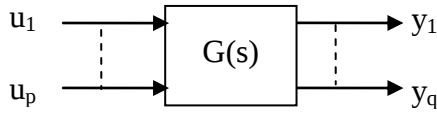


Fig. 3-1 Système multi-variable.

En appliquant à la $k^{\text{ème}}$ entrée une impulsion de Dirac ($u_k(t) = \delta(t)$) et en annulant les autres entrées, il apparaît à la $i^{\text{ème}}$ sortie, $i = 1, \dots, q$, un signal $g_{ik}(t)$ appelé *réponse impulsionnelle* de la sortie i à l'entrée k . Sa transformée de Laplace $g_{ik}(s)$ est, par définition, la *fonction de transfert* (FT) entre l'entrée k et la sortie i .

La réponse $y_i(t)$ de la $i^{\text{ème}}$ sortie à un signal quelconque $u_k(t)$ appliqué à la $k^{\text{ème}}$ entrée, les autres entrées étant toujours nulles, est égale au produit de convolution $g_{ik} * u_k$. En d'autres termes :

$$y_i(t) = \int_0^t g_{ik}(t - \tau) u_k(\tau) d\tau. \quad (3-1)$$

En effectuant la transformée de Laplace de l'équation précédente, on obtient :

$$y_i(s) = g_{ik}(s) \cdot u_k(s). \quad (3-2)$$

Par superposition, la transformée de Laplace de la $i^{\text{ème}}$ sortie à un vecteur quelconque d'entrées $u = [u_1 ; \dots ; u_p]$ est

$$y_i(s) = \sum_{k=1}^p g_{ik}(s) \cdot u_k(s), \quad i = 1, \dots, q. \quad (3-3)$$

Ces équations peuvent se grouper sous la forme matricielle :

$$y(s) = G(s)u(s) \quad (3-4)$$

où $G(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & \dots & g_{1p}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{q1}(s) & \dots & g_{qp}(s) \end{bmatrix} \quad (3-5)$

est la fonction (*matrice*) de transfert du système.

Ainsi, connaissant la matrice de transfert $G(s)$ d'un système linéaire invariant initialement inerte, on peut déduire de (3-4) le vecteur y des réponses à tout vecteur d'entrées u .

Réponse fréquentielle

Appliquons aux entrées du système des signaux sinusoïdaux de même fréquence ω mais d'amplitudes a_k et de phases φ_k quelconques :

$$u_k(t) = a_k \cos(\omega t + \varphi_k), \quad k = 1, \dots, p. \quad (3-6)$$

En posant

$$\alpha_k = a_k e^{j\varphi_k}, \quad k = 1, \dots, p, \quad (3-7)$$

les entrées (3-6) peuvent s'écrire sous la forme :

$$u_k(t) = \frac{1}{2} \left(\alpha_k e^{j\omega t} + \bar{\alpha}_k e^{-j\omega t} \right)$$

dont la transformée de Laplace est

$$u_k(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_k}{s - j\omega} + \frac{\bar{\alpha}_k}{s + j\omega} \right).$$

De (3-3) on déduit que

$$y_i(s) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^p \frac{g_{ik}(s)\alpha_k}{s - j\omega} + \sum_{k=1}^p \frac{g_{ik}(s)\bar{\alpha}_k}{s + j\omega} \right).$$

Pour un système stable, les FT $g_{ik}(s)$ ont toutes des pôles à parties réelles négatives dont l'effet disparaît au bout d'un certain temps. En régime stationnaire, il ne reste que l'effet des pôles $\pm j\omega$ relatifs à l'entrée. De l'équation précédente on déduit que la réponse stationnaire de la $i^{\text{ème}}$ sortie à l'entrée (3-6) est donnée par :

$$y_i(t) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^p g_{ik}(j\omega)\alpha_k e^{j\omega t} + \sum_{k=1}^p g_{ik}(-j\omega)\bar{\alpha}_k e^{-j\omega t} \right).$$

En posant maintenant

$$\beta_i = \sum_{k=1}^p g_{ik}(j\omega)\alpha_k, \quad i = 1, \dots, q, \quad (3-8)$$

on obtient, pour $i = 1, \dots, q$,

$$y_i(t) = \frac{1}{2} (\beta_i e^{j\omega t} + \bar{\beta}_i e^{-j\omega t}) = |\beta_i| \cos(\omega t + \arg(\beta_i)). \quad (3-9)$$

Les sorties stationnaires sont donc sinusoïdales, de même fréquence que les entrées, d'amplitudes $|\beta_i|$ et de phases $\arg(\beta_i)$, $i = 1, \dots, q$. Cette réponse se définit donc par le vecteur $\beta = [\beta_1, \dots, \beta_q]^T$. En posant $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_p]^T$, les relations (3-8) se regroupent sous la forme matricielle :

$$\beta = G(j\omega)\alpha. \quad (3-10)$$

A noter, d'après (3-6) et (3-7), que α est un vecteur complexe dont le module et l'argument de la $k^{\text{ème}}$ composante α_k sont respectivement égaux à l'amplitude et la phase de la $k^{\text{ème}}$ entrée $u_k(t)$. De même, d'après (3-8) et (3-9), le module et l'argument de la $i^{\text{ème}}$ composante β_i de β sont respectivement égaux à l'amplitude et la phase de la $i^{\text{ème}}$ sortie $y_i(t)$. L'égalité (3-10) signifie que le vec-

teur $\beta \in \mathbb{C}^q$ caractérisant la sortie est l'image par $G(j\omega)$ du vecteur $\alpha \in \mathbb{C}^p$ qui caractérise l'entrée (fig. 3-2).

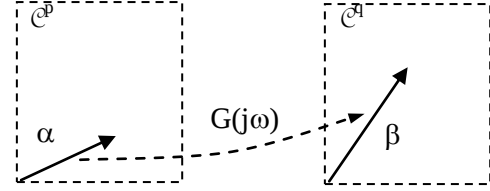


Fig. 3-2 β est l'image de α par l'application $G(j\omega)$

L'analyse fréquentielle consiste à étudier pour chaque fréquence ω la variation de β en fonction de α , c'est-à-dire comment varient les sorties suite aux variations des amplitudes et des phases des entrées. Dans la suite, α et β seront aussi appelés entrée et sortie au même titre que u et y .

3-2 Décomposition singulière

La relation (3-8) montre que la $i^{\text{ème}}$ sortie β_i dépend de toutes les entrées α_k , $k = 1, \dots, p$, ce qui complique l'analyse et la commande du système. Pour remédier à cette difficulté, nous allons chercher à déterminer une base B_p dans $\mathbb{C}^p$ et une base B_q dans $\mathbb{C}^q$ qui transforment la matrice $G(j\omega) = \{g_{ik}(j\omega)\}$ en une matrice $G'(j\omega) = \{g'_{ik}(j\omega)\}$ telle que $g'_{ik}(j\omega) = 0 \forall k \neq i$. De cette manière, en désignant par α'_k et β'_i les composantes des vecteurs α et β respectivement dans les bases B_p et B_q , la relation (3-8) se réduit à :

$$\beta'_i = \begin{cases} g'_{ii}(j\omega)\alpha'_i & \text{si } i \leq p, \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases} \quad i = 1, \dots, q.$$

Nous montrerons que telles bases existent ce qui permettra de remplacer le système réel $G(j\omega)$ par un système équivalent fictif $G'(j\omega)$ dont la $i^{\text{ème}}$ sortie est seulement proportionnelle à la $i^{\text{ème}}$ entrée. Si le système comporte plus de sorties que d'entrées, les sorties supplémentaires de G' seront nulles et s'il a plus d'entrées que de sorties, les entrées supplémentaires n'auront aucun effet sur les sorties. Par cette transformation, on décompose donc le système multi-variable en r systèmes mo-

no-variables avec $r = \min\{p, q\}$ (découplage).

La matrice $G'(j\omega)$ est appelée *forme singulière* de $G(j\omega)$ et elle est généralement désignée par $\Sigma(j\omega)$. Pour simplifier la notation, nous écrirons G et Σ au lieu de $G(j\omega)$ et $\Sigma(j\omega)$ sauf quand une ambiguïté est possible. Cependant, il est important de garder toujours à l'esprit que G et Σ sont des matrices qui dépendent de la fréquence considérée.

Pour construire les bases B_p et B_q puis déduire la matrice singulière Σ de la matrice G , il convient d'abord de définir ce qu'on appelle les valeurs singulières de G .

Valeurs singulières de G

La mesure la plus naturelle de l'intensité de la réponse globale $\beta \in \mathbb{C}^q$ de G à une entrée $\alpha \in \mathbb{C}^p$ ($\beta = G\alpha$) est la norme euclidienne de β définie par le nombre réel positif

$$\|\beta\| = \left(\sum_{i=1}^q |\beta_i|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\beta^* \beta}, \quad (3-11)$$

où la notation A^* désigne le conjugué du transposé de A et on l'appelle parfois l'adjoint de A . Comme $\beta = G\alpha$ et sachant que pour deux matrices A et B , $(AB)^* = B^*A^*$, (3-11) implique que

$$\|\beta\|^2 = \beta^* \beta = \alpha^* G^* G \alpha. \quad (3-12)$$

G^*G est une matrice $(p \times p)$ égale à son adjoint $(G^*G)^*$ et on dit qu'elle est *hermitienne*. Supposons que l'entrée α est un vecteur propre u ($\neq 0$) de G^*G . À ce vecteur u correspond une valeur propre λ telle que $G^*Gu = \lambda u$ et, d'après (3-12), la réponse β de G à l'entrée u est un vecteur $v = Gu$ tel que

$$\|v\|^2 = u^* G^* G u = \lambda u^* u = \lambda \|u\|^2. \quad (3-13)$$

Ceci montre que toute valeur propre λ de G^*G est un réel non négatif, ce qui permet de poser $\lambda = \sigma^2$ avec $\sigma \in \mathbb{R}^+$. Si u est choisi unitaire ($\|u\| = 1$), on déduit de (3-13) que

$$\sigma = \|v\| = \|Gu\|. \quad (3.14)$$

σ est donc la racine carrée d'une valeur propre (réelle positive) λ de G^*G et elle est égale à la norme euclidienne de la réponse de G à un vecteur propre unitaire u de G^*G . On dit que u est une *direction principale d'entrée* relative à la *valeur singulière* σ de G .

Si $\sigma \neq 0$, il en est de même de v et on a :

$$GG^*v = GG^*Gu = \lambda Gu = \lambda v.$$

D'où, si la réponse v de G à un vecteur propre u de G^*G n'est pas nulle, elle est un vecteur propre v de GG^* ayant la même valeur propre λ que u . v est la *direction principale de sortie* relative à $\sigma = \lambda^{1/2}$.

Inversement, soit v un vecteur propre unitaire de GG^* de valeur propre $\lambda = \sigma^2$ et posons $u = G^*v$. En échangeant dans le raisonnement précédent les rôles de G et G^* et de u et v , on déduit que

$$\sigma = \|u\| = \|G^*v\| \quad (3-15)$$

et que u est nul ou il est un vecteur propre de G^*G de même valeur propre λ que v .

Les valeurs propres non nulles de la matrice $(p \times p)$ G^*G sont donc les mêmes que celles de la matrice $(q \times q)$ GG^* . Par conséquent, le nombre s des valeurs singulières non nulles de G ne peut pas dépasser p ou q :

$$s \leq r = \min\{p, q\}. \quad (3-16)$$

Bases B_p et B_q et décomposition de G

Nous avons vu au chapitre 2, section 2-6, que les vecteurs propres unitaires d'une matrice hermitienne $(n \times n)$ forment une base orthonormée dans $\mathbb{C}^n$. Par conséquent,

- a) les vecteurs propres unitaires de G^*G forment une base orthonormée B_p dans $\mathbb{C}^p$ et
- b) les vecteurs propres unitaires de GG^* forment une base orthonormée B_q dans $\mathbb{C}^q$.

Montrons maintenant qu'en choisissant dans $\mathbb{C}^p$ la base orthonormée B_p , constituée des vecteurs propres unitaires $u^1, \dots, u^p$ de G^*G et dans $\mathbb{C}^q$ la base

orthonormée B_q , constituée des vecteurs propres unitaires $v^1, \dots, v^q$ de GG^* , la matrice G se transforme en une matrice singulière Σ .

Supposons que les u^i sont ordonnés selon leurs valeurs singulières décroissantes, $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_p$. Nous savons que pour $i = 1, \dots, p$, si le vecteur Gu^i n'est pas nul, il est un vecteur propre de GG^* et sa norme est égale à la valeur singulière σ_i de G relative à u^i . D'où, pour $\sigma_i \neq 0$, le vecteur unitaire $Gu^i/\sigma_i \in B_q$ et sera désigné par v^i . Si s est le nombre des $\sigma_i \neq 0$ ($s \leq r = \min\{p, q\}$), on a :

$$Gu^i = \begin{cases} \sigma_i v^i & \text{si } i \leq s, \\ 0 & \text{si } i > s. \end{cases} \quad (3-17)$$

Soient U et V les matrices ($p \times p$) et ($q \times q$) dont les colonnes sont respectivement les vecteurs des bases orthonormées B_p et B_q :

$$U = [u^1 \ \dots \ u^p], \quad V = [v^1 \ \dots \ v^q].$$

$$\text{On a : } U^*U = I_p \quad \text{et} \quad V^*V = I_q, \quad (3-18)$$

où I_k est la matrice unité de dimension k . Les matrices U et V sont dites *unitaires* vérifiant

$$U^* = U^{-1}, \quad V^* = V^{-1}. \quad (3-19)$$

Tenant compte de (3-17) et de l'orthogonalité des vecteurs v^i , on a :

$$V^*GU = \begin{bmatrix} v^{1*} \\ \vdots \\ v^{q*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 v^1 & \dots & \sigma_s v^s & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \Sigma$$

$$\text{où } \Sigma = \left[\begin{array}{cccc|cccc} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_s & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right]_{q,p}$$

Ainsi, dans les bases B_p et B_q , la matrice G se transforme en une matrice singulière Σ . D'après (3-18), la relation précédente peut aussi s'écrire :

$$G = V\Sigma U^*. \quad (3-20)$$

C'est la *décomposition singulière* de la matrice G . Elle signifie qu'en réponse à une entrée α , la sortie $\beta = G\alpha$ se déduit des 3 opérations suivantes :

- 1) l'entrée dans la base B_p : $\alpha' = U^*\alpha$,
- 2) la sortie dans la base B_q : $\beta' = \Sigma\alpha'$,
- 3) la sortie naturelle : $\beta = V\beta'$.

Remarque. Soit $\mathcal{U}_0$ le sous espace engendré par les vecteurs $u^{s+1}, \dots, u^p$ et $\mathcal{V}_0$ le sous espace engendré par les vecteurs $v^{s+1}, \dots, v^q$. Tenant compte de (3-17), il n'est pas difficile de démontrer les équivalences suivantes :

$$G(j\omega).\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha \in \mathcal{U}_0, \\ \beta^*G(j\omega) = 0 \Leftrightarrow \beta \in \mathcal{V}_0.$$

Par conséquent, si pour la fréquence ω considérée $s < \min\{p, q\}$, alors $j\omega$ est un zéro de $G(s)$ dont les directions d'entrée sont les vecteurs de $\mathcal{U}_0$ et les directions de sortie sont les vecteurs de $\mathcal{V}_0$ (voir (1-66) et (1-67) pour la définition d'un zéro et ses directions d'entrée et de sortie).

EXERCICE 3-1

Pour $\omega = 1$ rad/sec écrire la décomposition singulière de $G(s) = [1 \ 1/s]$.

EXERCICE 3-2

Montrer les équivalences

$$G(j\omega).\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha \in \mathcal{U}_0, \quad \beta^*G(j\omega) = 0 \Leftrightarrow \beta \in \mathcal{V}_0.$$

3-3 Propriétés des valeurs singulières

Les valeurs singulières permettent d'étendre la notion de gain aux systèmes multivariables.

Gain maximum et gain minimum de G

Le passage aux bases B_p et B_q dans $\mathcal{C}^p$ et $\mathcal{C}^q$ ne modifie pas la norme d'un vecteur x de $\mathcal{C}^p$ ou de $\mathcal{C}^q$. En effet, si $x = Vx'$ (ou Ux'), d'après (3-18),

$$\|x\|^2 = \|Vx'\|^2 = x'^* V^* V x' = x'^* x' = \|x'\|^2.$$

D'où,

$$\|\beta\|^2 = \|\beta'\|^2 = \|\Sigma\alpha'\|^2 = \sum_{k=1}^p \sigma_k^2 \alpha_k'^2.$$

Comme $\sigma_1 = \max\{\sigma_i, i = 1, \dots, p\}$, pour toute entrée α , la norme de la sortie est telle que

$$\begin{aligned} \|\beta\|^2 &\leq \sigma_1^2 \sum_{k=1}^p \alpha_k'^2 = \sigma_1^2 \|\alpha'\|^2 = \sigma_1^2 \|\alpha\|^2 \\ \Rightarrow \quad \sigma_1 &\geq \frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|}. \quad \forall \alpha \neq 0. \end{aligned}$$

Or, pour $\alpha = u^1$, on a $\|\alpha\| = 1$ et $\|\beta\| = \|\sigma_1 v^1\| = \sigma_1$ d'où, dans ce cas, $\sigma_1 = \|\beta\|/\|\alpha\|$. Par conséquent,

$$\sigma_1 = \max_{\alpha \in \mathcal{C}^p, \alpha \neq 0} \frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|} \quad (3-21)$$

c'est-à-dire σ_1 est le gain maximum en norme euclidienne du système G . On le désigne par $\bar{\sigma}[G(j\omega)]$, ou simplement par $\bar{\sigma}$ s'il n'y a pas confusion, et on le prononce σ -sup.

Par un raisonnement analogue au précédent, on a :

$$\sigma_s = \min_{\alpha \in \mathcal{C}^p, \alpha \neq 0} \frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|}. \quad (3-22)$$

σ_s est donc le gain minimum en norme du système G pour les entrées α qui produisent une sortie β non nulle. On le désigne par $\underline{\sigma}[G(j\omega)]$, ou simplement par $\underline{\sigma}$ s'il n'y a pas confusion, et on le prononce σ -inf.

L'égalité (3-21) est équivalente à :

$$\bar{\sigma} = \max_{\|\alpha\|=1} \|G\alpha\| \quad (3-23)$$

puisque

$$\max_{\gamma \in \mathcal{C}^p, \gamma \neq 0} \frac{\|G\gamma\|}{\|\gamma\|} = \max_{\gamma \in \mathcal{C}^p} \left\| G \frac{\gamma}{\|\gamma\|} \right\| = \max_{\|\alpha\|=1} \|G\alpha\|.$$

De même l'égalité (3-22) est équivalente à :

$$\underline{\sigma} = \min_{\substack{\|\alpha\|=1 \\ G\alpha \neq 0}} \|G\alpha\|. \quad (3-24)$$

Les égalités (3-23) et (3-24) montrent que le gain d'un système linéaire ne dépend pas du module de l'entrée mais seulement de sa direction.

Exemple 3-1

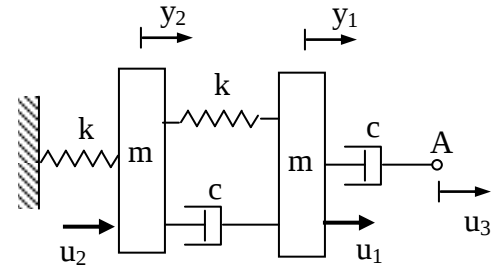


fig. 3-3 Système entrées 2 sorties.

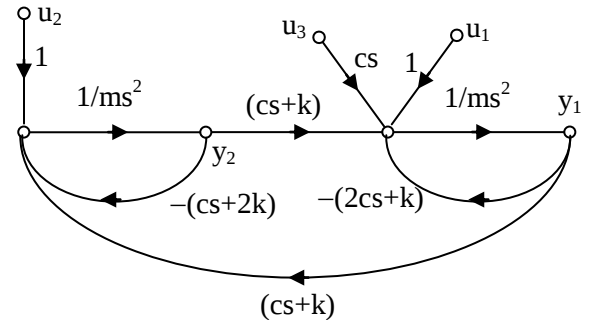


Fig. 3-4 Graphe du système de la figure 3.3

Le système de la figure 3-3 comporte 2 masses égales m , 2 ressorts de même raideur k et 2 amortisseurs de même facteur d'amortissement c . Ses entrées sont les forces u_1 et u_2 agissant sur les masses et le déplacement u_3 du point A. Ses sorties sont les déplacements y_1 et y_2 des masses. Son graphe de fluence est représenté sur la figure 3-4.

En appliquant à ce graphe le théorème de Mason, on obtient :

$$y(s) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{P} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

$$= G(s)u(s)$$

avec

$$P = m^2 s^4 + 3mcs^3 + (c^2 + 3mk)s^2 + 3kcs + k^2,$$

$$g_{11} = ms^2 + cs + 2k, \quad g_{22} = ms^2 + 2cs + k,$$

$$g_{13} = cs g_{11}, \quad g_{12} = g_{21} = g_{23} = cs + k.$$

Le système est évidemment stable (suite à une impulsion sur l'une de ses entrées, il retourne après un certain temps à sa position d'équilibre) et on peut le vérifier en appliquant le critère de Routh au polynôme caractéristique P.

Pour $m = 1$, $c = 1$ et $k = 1$,

$$G(j\omega) = \frac{1}{P} \begin{pmatrix} 2 - \omega^2 + j\omega & 1 + j\omega & -\omega^2 - j\omega(\omega^2 - 2) \\ 1 + j\omega & (1 + j\omega)^2 & 1 + j\omega \end{pmatrix}$$

avec

$$P = (1 + j\omega)^2 (1 - \omega^2 + j\omega)$$

Supposons que les forces u_1 , u_2 et le déplacement u_3 varient sinusoïdalement avec une même fréquence $\omega = 1$ mais leurs amplitudes et leurs phases sont différentes :

$$u_1(t) = a_1 \cos(t + \varphi_1),$$

$$u_2(t) = a_2 \cos(t + \varphi_2),$$

$$u_3(t) = a_3 \cos(t + \varphi_3).$$

Cette entrée se caractérise par le vecteur

$$\alpha = [a_1 e^{j\varphi_1} \quad a_2 e^{j\varphi_2} \quad a_3 e^{j\varphi_3}]^T$$

et la sortie stationnaire par le vecteur

$$\beta = G(j.1)\alpha$$

avec

$$G(j.1) = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 1 + j & 1 + j & -1 + j \\ 1 + j & (1 + j)^2 & 1 + j \end{pmatrix}.$$

L'analyse de la réponse β en fonction de l'entrée α est facilitée par la décomposition singulière de $G(j.1)$. Pour éviter le calcul manuel des valeurs et vecteurs propres de G^*G et GG^* , on peut obtenir directement la décomposition singulière de G à l'aide de l'instruction «svd» de Matlab :

```
>> G = -(1/2)*[1+j 1+j -1+j ; 1+j (1+j)^2 1+j];
>> [V,S,U] = svd(G)
```

Dans la deuxième instruction, la matrice singulière est désignée par la lettre S au lieu de Σ . Le résultat est le suivant :

$$S = \Sigma = \begin{pmatrix} 1.67 & 0 & 0 \\ 0 & 0.85 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} -0.61 & -0.79 \\ -0.79 & 0.61 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0.42 - 0.42j & 0.1 - 0.1j & -0.23 - 0.75j \\ 0.18 - 0.66j & 0.46 + 0.26j & 0.29 + 0.4j \\ 0.05 - 0.42j & -0.83 - 0.1j & 0.35 + 0.06j \end{pmatrix}$$

Comme prévu, les valeurs singulières, $\sigma_1 = 1.67$ et $\sigma_2 = 0.85$, sont des réels positifs et on peut vérifier que $U^*U = I_3$ et $V^*V = I_2$, d'où les colonnes u^1, u^2, u^3 de U constituent une base orthonormée de l'espace des entrées $\mathcal{C}^3$ et les colonnes v^1, v^2 de V une base orthonormée de l'espace des sorties $\mathcal{C}^2$.

Pour l'interprétation physique, il est utile de calculer le module et la phase des éléments complexes de U :

```
>> mU = abs(U), pU = angle(U)
```

$$mU = \begin{pmatrix} 0.59 & 0.14 & 0.79 \\ 0.68 & 0.53 & 0.5 \\ 0.42 & 0.83 & 0.35 \end{pmatrix},$$

$$pU = \begin{pmatrix} -0.78 & -0.78 & -1.87 \\ -1.3 & 0.51 & 0.95 \\ -1.4 & -3.01 & 0.16 \end{pmatrix} \text{ rad.}$$

Comme $Gu^i = \begin{cases} \sigma_i v^i & \text{pour } i \leq s = 2 \\ 0 & \text{pour } i = 3, \end{cases}$

aux entrées caractérisées par les deux premières colonnes de U ,

$$u^1 = \begin{bmatrix} 0.59 \cos(t - 0.78) \\ 0.68 \cos(t - 1.3) \\ 0.42 \cos(t - 1.4) \end{bmatrix}, \quad u^2 = \begin{bmatrix} 0.14 \cos(t - 0.780) \\ 0.53 \cos(t + 0.51) \\ 0.83 \cos(t - 3.01) \end{bmatrix},$$

correspondent respectivement les sorties caractérisées par les colonnes v^1 et v^2 de V :

$$y^1 = 1.67 \begin{bmatrix} -0.61 \cos t \\ -0.79 \cos t \end{bmatrix}, \quad y^2 = 0.85 \begin{bmatrix} -0.79 \cos t \\ 0.61 \cos t \end{bmatrix}.$$

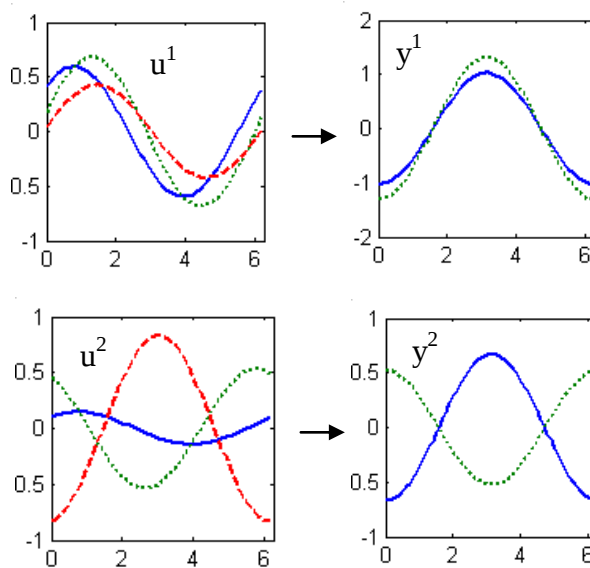


Fig. 3-5 Entrées et sorties singulières

La réponse à l'entrée u^3 caractérisée par le troisième vecteur de U est nulle (on peut vérifier que pour cette entrée la somme des forces sur chaque masse est nulle, d'où l'immobilité du système).

Pour le vecteur d'entrée u^1 le gain du système est maximum et vaut $\sigma_1 = 1.67$ et pour le vecteur d'entrées u^2 il est minimum et vaut $\sigma_2 = 0.85$ (en excluant les entrées proportionnelles à u^3 auxquelles le système ne répond pas). Les entrées u^1 et u^2 et leurs réponses correspondantes y^1 et y^2 sont représentées à la figure 3-5.

Remarquer que pour les entrées u^1 , les masses bougent en phase (toujours dans le même sens) tandis que pour les entrées u^2 , elles bougent en opposition de phase (toujours en sens opposés). Pour d'autres

entrées de même fréquence $\omega = 1$, il existe un certain déphasage entre les mouvements des masses et le gain en module du système est compris entre σ_1 et σ_2 .

Jusqu'ici nous n'avons considéré que des entrées de fréquence $\omega = 1$. Pour une autre fréquence ω , les valeurs singulières σ_1 et σ_2 se modifient. L'instruction « sigma » de Matlab est un moyen simple pour représenter, en échelle de Bode, la variation des valeurs singulières d'un système linéaire en fonction de la fréquence. Pour représenter $\sigma_1(\omega)$ et $\sigma_2(\omega)$ à l'aide de « sigma », commençons par introduire la matrice de transfert G obtenue au début de cet exemple en supposant toujours que $m = c = k = 1$.

```
>> g11 = [1 1 2]; g22 = [1 2 1]; g13 = [1 1 2 0];
>> g12 = [1 1]; g21 = g12; g23 = g12;
>> P = [1 3 4 3 1];
>> Num = {g11 g12 g13; g21 g22 g23};
>> Den = {P P P; P P P};
>> G = tf(Num, Den);
>> sigma(G)
```

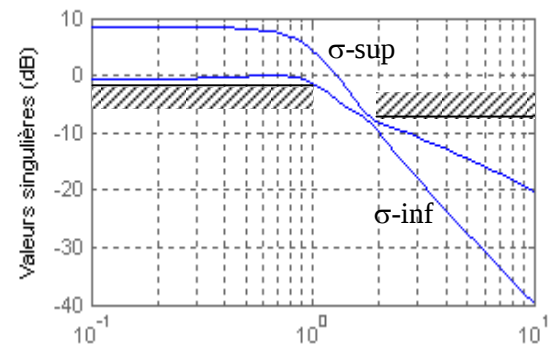
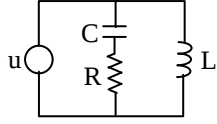


Fig. 3-6 Variation de σ_1 et σ_2 en fonction de ω

Le résultat est le graphe de la figure 3-6. On constate sur ce graphe que pour les fréquences inférieures à 1 rd/s le gain en module du système est compris entre -1.5 db et 8.5 db et pour les fréquences supérieures à 2 rd/s il est inférieur à -7.5 db et diminue encore plus quand la fréquence augmente. Pour tout système, le gain est fort là où σ_{inf} est grand et il est faible là où σ_{sup} est petit. D'une manière générale, le gain d'un système physique ayant une certaine inertie devient faible à hautes fréquences.

EXERCICE 3-3

- 1) Écrire la matrice de transfert $G(s)$ du circuit ci-contre d'entrée la tension u et de sorties les courants y_1 et y_2 à travers C et L sachant que $C = 2 \text{ F}$, $L = 1 \text{ H}$ et $R = 1/2 \Omega$. Déduire $y_1(t)$ et $y_2(t)$ en régime stationnaire quand $u = \cos(t)$.
- 2) Pour $\omega = 1 \text{ rad/sec}$, écrire la décomposition singulière de $G(s)$.
- 3) À l'aide de Matlab, représenter en fonction de la fréquence le gain de ce système.

**Gains intermédiaires**

Voyons maintenant ce qu'on peut dire des valeurs singulières intermédiaires σ_i , $1 < i < s$. Considérons dans $\mathcal{C}^p$ le sous espace vectoriel $\mathcal{E}_i$ engendré par les i premiers vecteurs de B_p , $u^1, \dots, u^i$, et le sous espace $\mathcal{F}_i$ engendré par $u^i, \dots, u^p$ (u^i est commun à $\mathcal{E}_i$ et $\mathcal{F}_i$). Tout vecteur $\alpha \in \mathcal{E}_i$ s'écrit sous la forme :

$$\alpha = a_1 u^1 + \dots + a_i u^i, \quad a_i \in \mathbb{C}.$$

D'où, d'après (3-17),

$$\|\beta\|^2 = \|G\alpha\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^i a_k \sigma_k v^k \right\|^2 = \sum_{k=1}^i |a_k|^2 \sigma_k^2$$

Comme, pour $k \leq i$, $\sigma_k \geq \sigma_i$,

$$\|\beta\|^2 \geq \sigma_i^2 \sum_{k=1}^i |a_k|^2 = \sigma_i^2 \|\alpha\|^2 \Rightarrow \sigma_i \leq \frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|}$$

pour $\alpha \neq 0$. Or, pour $\alpha = u^i \in \mathcal{E}_i$,

$$\frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|} = \|\beta\| = \|\sigma_i v^i\| = \sigma_i.$$

Donc

$$\sigma_i = \min_{\alpha \in \mathcal{E}_i, \alpha \neq 0} \frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|}. \quad (3-25)$$

Par une démonstration analogue à la précédente, on déduit que :

$$\sigma_i = \max_{\alpha \in \mathcal{F}_i, \alpha \neq 0} \frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|}. \quad (3-26)$$

σ_i est donc le plus petit gain du système pour les entrées non nulles appartenant à $\mathcal{E}_i$ et il est son plus grand gain pour les entrées appartenant à $\mathcal{F}_i$.

Exemple 3-2

Soit

$$>> G = [1 \ -2 \ 0; -1 \ 3 \ 1; 2 \ 0 \ -2];$$

la matrice de transfert d'un système pour une fréquence ω donnée et déterminons sa décomposition singulière :

$$>> [V, S, U] = \text{svd}(G)$$

Le résultat affiché montre que la deuxième valeur singulière de G est $\sigma_2 = 2.4495$. Par conséquent, pour toute entrée de fréquence ω caractérisée par un vecteur α , le gain de G est $\geq \sigma_2$ si $\alpha \in \mathcal{E}_2$ et il est $\leq \sigma_2$ si $\alpha \in \mathcal{F}_2$. Pour le vérifier, calculons le gain de G pour l'entrée caractérisée par $\alpha^1 = u^1 - 2u^2 \in \mathcal{E}_2$ et pour l'entrée caractérisée par $\alpha^2 = u^2 + u^3 \in \mathcal{F}_2$:

$$\begin{aligned} >> \text{ag1} &= U(:, 1) - 2*U(:, 2); \\ >> \text{ag2} &= U(:, 2) + U(:, 3); \\ >> \text{bg1} &= G*\text{ag1}; \text{bg2} = G*\text{ag2}; \\ >> \text{norm}(\text{bg1})/\text{norm}(\text{ag1}) \\ &= 2.8865 > \sigma_2 \\ >> \text{norm}(\text{bg2})/\text{norm}(\text{ag2}) \\ &= 1.7804 < \sigma_2. \end{aligned}$$

Les sous espaces $\mathcal{E}_i$ et $\mathcal{F}_i$ sont respectivement de dimensions i et $(p - i + 1)$. Pour généraliser les propriétés (3-25) et (3-26), nous allons considérer deux sous espaces quelconques de $\mathcal{C}^p$: $\mathcal{P}_i$ de dimension i et $\mathcal{Q}_i$ de dimension $(p - i + 1)$.

Comme $\dim \mathcal{P}_i + \dim \mathcal{F}_i = p + 1 > p = \dim \mathcal{C}^p$, il existe un vecteur $\gamma \neq 0$ tel que $\gamma \in \mathcal{P}_i \cap \mathcal{F}_i$. D'où, d'après (3-26),

$$\sigma_i \geq \frac{\|G\gamma\|}{\|\gamma\|} \geq \min_{\alpha \in \mathcal{P}_i, \alpha \neq 0} \frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|}. \quad (3-27)$$

De même, comme $\dim \mathcal{Q}_i + \dim \mathcal{E}_i = p + 1$, on déduit de (3-25) que

$$\sigma_i \leq \max_{\alpha \in \mathcal{Q}_i, \alpha \neq 0} \frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|}. \quad (3-28)$$

Les inégalités (3-27) et (3-28) seront utiles pour établir la propriété P2 ci-dessous.

EXERCICE 3-4

Montrer que

$$\sigma_{i+j+1}(G_1 + G_2) \leq \sigma_{i+1}(G_1) + \sigma_{j+1}(G_2),$$

$$\sigma_{i+j+1}(G_1 G_2) \leq \sigma_{i+1}(G_1) \sigma_{j+1}(G_2).$$

Autres propriétés

Jusqu'ici nous n'avons considéré qu'une seule matrice de transfert. Or il arrive qu'un système G soit constitué de 2 sous systèmes G_1 et G_2 montés en parallèle et on a $G = G_1 + G_2$, ou montés en série et on a $G = G_1 G_2$. La propriété suivante lie σ -sup de G aux σ -sup de G_1 et G_2 .

P1 : σ -sup est une norme matricielle, c'est-à-dire :

$$\bar{\sigma}(G) = 0 \Leftrightarrow G = 0,$$

$$\bar{\sigma}(aG) = |a| \bar{\sigma}(G), \quad a \in \mathbb{C},$$

$$\bar{\sigma}(G_1 + G_2) \leq \bar{\sigma}(G_1) + \bar{\sigma}(G_2).$$

appelée *norme spectrale*. Elle vérifie en plus l'*inégalité multiplicative*

$$\bar{\sigma}(G_1 G_2) \leq \bar{\sigma}(G_1) \bar{\sigma}(G_2)$$

et on dit que σ -sup est une norme *consistante*.

Preuve

$$a) \bar{\sigma}(G) = \max_{\alpha \in \mathbb{C}^p, \alpha \neq 0} \frac{\|G\alpha\|}{\|\alpha\|} = 0$$

$$\Leftrightarrow \|G\alpha\| = 0 \quad \forall \alpha \Leftrightarrow G = 0.$$

$$b) \bar{\sigma}(aG) = \max_{\|\alpha\|=1} \|aG\alpha\| = |a| \max_{\|\alpha\|=1} \|G\alpha\| = |a| \bar{\sigma}(G)$$

$$c) \bar{\sigma}(G_1 + G_2) = \max_{\|\alpha\|=1} \|G_1\alpha + G_2\alpha\|$$

$$\leq \max_{\|\alpha\|=1} (\|G_1\alpha\| + \|G_2\alpha\|)$$

$$\leq \max_{\|\alpha\|=1} \|G_1\alpha\| + \max_{\|\alpha\|=1} \|G_2\alpha\| = \bar{\sigma}(G_1) + \bar{\sigma}(G_2).$$

$$d) \bar{\sigma}(G_1 G_2) = \max_{\|\alpha\|=1} \|G_1 G_2 \alpha\|$$

$$= \max_{\|\alpha\|=1} \|G_2 \alpha\| \left\| G_1 \frac{G_2 \alpha}{\|G_2 \alpha\|} \right\|$$

$$\leq \max_{\|\alpha\|=1} \|G_2 \alpha\| \max_{\|\alpha\|=1} \|G_1 \alpha\| = \bar{\sigma}(G_1) \bar{\sigma}(G_2) \quad \blacksquare$$

D'une manière analogue on démontre que

$$\sigma_i(aG) = |a| \sigma_i(G) \quad \forall i, \quad (3-29)$$

$$\underline{\sigma}(G_1 G_2) \geq \underline{\sigma}(G_1) \underline{\sigma}(G_2). \quad (3-30)$$

EXERCICE 3-5

Démontrer les inégalités suivantes.

$$\underline{\sigma}(G_1) - \bar{\sigma}(G_2) \leq \underline{\sigma}(G_1 + G_2) \leq \underline{\sigma}(G_1) + \bar{\sigma}(G_2),$$

$$\underline{\sigma}(G_1 G_2) \leq \underline{\sigma}(G_1) \bar{\sigma}(G_2) \leq \bar{\sigma}(G_1 G_2).$$

En pratique, le modèle G d'un système ne décrit sa dynamique que d'une manière approximative. Sa matrice de transfert n'est pas exactement G mais $G + \Delta$ où l'élément e_{ik} de la matrice Δ représente l'erreur (inconnue) sur l'élément g_{ik} de G . La propriété suivante montre que l'écart entre les valeurs singulières du système réel $G + \Delta$ et celles du système nominal G ne dépasse pas la norme de la matrice d'incertitude Δ .

$$\mathbf{P2} : |\sigma_i(G + \Delta) - \sigma_i(G)| \leq \bar{\sigma}(\Delta).$$

Preuve

a) Comme $\dim \mathcal{F}_i = p - i + 1$, d'après (3-28),

$$\begin{aligned} \sigma_i(G + \Delta) &\leq \max_{\alpha \in \mathcal{F}_i, \alpha \neq 0} \frac{\|G\alpha + \Delta\alpha\|}{\|\alpha\|} \\ &\leq \max_{\alpha \in \mathcal{F}_i, \alpha \neq 0} \left(\frac{\|G\alpha\|}{\|\alpha\|} + \frac{\|\Delta\alpha\|}{\|\alpha\|} \right) \\ &\leq \max_{\alpha \in \mathcal{F}_i, \alpha \neq 0} \frac{\|G\alpha\|}{\|\alpha\|} + \max_{\alpha \in \mathcal{F}_i, \alpha \neq 0} \frac{\|\Delta\alpha\|}{\|\alpha\|} \end{aligned}$$

D'où, d'après (3-26) et (3-21),

$$\sigma_i(G + \Delta) \leq \sigma_i(G) + \bar{\sigma}(\Delta).$$

b) Comme $\dim \mathcal{E}_i = i$, d'après (3.27),

$$\begin{aligned}\sigma_i(G + \Delta) &\geq \min_{\alpha \in \mathcal{E}_i, \alpha \neq 0} \frac{\|G\alpha + \Delta\alpha\|}{\|\alpha\|} \\ &\geq \min_{\alpha \in \mathcal{E}_i, \alpha \neq 0} \left| \frac{\|G\alpha\|}{\|\alpha\|} - \frac{\|\Delta\alpha\|}{\|\alpha\|} \right| \\ &\geq \min_{\alpha \in \mathcal{E}_i, \alpha \neq 0} \frac{\|G\alpha\|}{\|\alpha\|} - \max_{\alpha \in \mathcal{E}_i, \alpha \neq 0} \frac{\|\Delta\alpha\|}{\|\alpha\|}\end{aligned}$$

D'où, d'après (3-25) et (3-21),

$$\sigma_i(G + \Delta) \geq \sigma_i(G) - \bar{\sigma}(\Delta)$$

■

Exemple 3-3

Considérons les matrices

```
>> G = [1 -2 0;-1 3 1;2 0 -2];
>> D = [0.1 -0.1 0;-0.2 0.1 0;0.05 0 -0.1];
```

Les valeurs singulières de G et G + Δ sont

```
>> sg = svd(G); sgr = svd(G + Δ);
```

La norme de Δ (c.à.d. $\bar{\sigma}(\Delta)$) est

```
>> n Δ = norm(Δ)
= 0.2658
```

On vérifie que $\bar{\sigma}(\Delta)$ est supérieur aux écarts entre les valeurs singulières de G + Δ et celles de G en écrivant

```
>> abs(sgr - sg)
= [0.226 0.0727 0.0302].
```

Cas d'une matrice carrée

Considérons le cas important où G est une matrice carrée (p×p). En remplaçant dans la propriété P2 précédente Δ par la matrice unitaire I, elle devient :

$$\boxed{|\sigma_i(G + I) - \sigma_i(G)| \leq 1} \quad (3-31)$$

puisque $\bar{\sigma}(I)=1$. Cette inégalité qui dit que l'écart entre les valeurs singulières de G et de G + I ne

dépasse jamais 1, sera de grande utilité quand nous étudierons les systèmes en boucle fermée.

Supposons que G est inversible, c'est-à-dire de rang p. Comme le rang d'une matrice ne dépend pas des bases choisies dans les espaces de départ et d'arrivée (pour une application linéaire f, $\text{rang}(f) = \dim(\text{Im}f)$ indépendamment des bases), la matrice singulière Σ de G est une matrice carrée (p×p) diagonale de rang p. D'où

$$G \text{ inversible} \Leftrightarrow \sigma_p = \underline{\sigma} \neq 0.$$

D'autre part, comme $G = V\Sigma U^*$, tenant compte de (3-19), on a :

$$G^{-1} = (V\Sigma U^*)^{-1} = U\Sigma^{-1}V^*$$

ce qui implique :

$$\sigma_i(G^{-1}) = \frac{1}{\sigma_i(G)} \quad \forall i. \quad (3.32)$$

$\sigma_1(G^{-1})$ est la plus petite valeur singulière de G^{-1} et $\sigma_p(G^{-1})$ est la plus grande et on a :

$$\boxed{\underline{\sigma}(G^{-1}) = \frac{1}{\bar{\sigma}(G)} \quad \text{et} \quad \bar{\sigma}(G^{-1}) = \frac{1}{\underline{\sigma}(G)}} \quad (3.33)$$

Pour terminer, supposons que G est inversible ($\det(G) \neq 0$) et montrons la propriété suivante :

$$\mathbf{P3} : \underline{\sigma}(G) = \min_{\Delta \in \mathbb{C}^{p \times p}} \{ \bar{\sigma}(\Delta) \mid \det(G + \Delta) = 0 \}$$

qui signifie que $\sigma\text{-inf}$ de G est égale à la plus petite norme des matrices Δ qui rendent (G + Δ) singulière. $\sigma\text{-inf}(G)$ mesure donc l'éloignement d'une matrice carrée G de la singularité.

Preuve

$$\det(G + \Delta) = 0 \Rightarrow \sigma_p(G + \Delta) = 0$$

$$\text{Or } P2 \Rightarrow 0 = \sigma_p(G + \Delta) \geq \underline{\sigma}(G) - \bar{\sigma}(\Delta)$$

$$\Rightarrow \underline{\sigma}(G) \leq \bar{\sigma}(\Delta) \quad \forall \Delta \text{ t.q. } \det(G + \Delta) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{\sigma}(G) \leq \min_{\Delta \in \mathbb{C}^{p \times p}} \{ \bar{\sigma}(\Delta) \mid \det(G + \Delta) = 0 \}.$$

Or, $G = V\Sigma U^*$ avec $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_p)$

et pour $\Delta = V\text{diag}(-\sigma_p, \dots, -\sigma_p)U^*$,

on a : $\sigma_p(G + \Delta) = 0$ d'où $\det(G + \Delta) = 0$.

$\Rightarrow \exists \Delta$ t.q $\underline{\sigma}(G) = \sigma_p = \bar{\sigma}(\Delta)$ et $\det(G + \Delta) = 0$

donc $\underline{\sigma}(G) = \min_{\Delta \in \mathbb{C}^{p \times p}} \{ \bar{\sigma}(\Delta) \mid \det(G + \Delta) = 0 \}$ ■

Remarque. De la propriété précédente on déduit l'implication $[\bar{\sigma}(\Delta) < \underline{\sigma}(G)] \Rightarrow \det(G + \Delta) \neq 0$ mais nous attirons l'attention que

$$[\bar{\sigma}(\Delta) \geq \underline{\sigma}(G)] \not\Rightarrow \det(G + \Delta) = 0.$$

EXERCICE 3-6

Soit G la matrice de transfert nominale d'un système et G_r sa matrice de transfert réelle. Montrer que l'erreur relative de la réponse est liée à l'erreur relative de G par l'inégalité

$$\frac{\|y - y_r\|}{\|y\|} \leq \gamma(G) \frac{\|G - G_r\|}{\|G\|}$$

où $\gamma(G) = \bar{\sigma}(G) / \underline{\sigma}(G)$ est appelé le facteur de conditionnement de la matrice G .

3-4 Performance d'un système automatique

La figure 3-7 représente le schéma bloc d'un système de commande à retour unitaire.

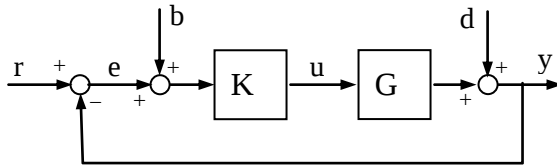


Fig. 3-7 Système de commande à retour unitaire.

- G est la MT de l'objet commandé y compris l'actionneur et le transmetteur.
- K est la MT de l'organe de commande.
- d est l'effet des perturbations (variation de la charge, de l'alimentation,...) sur le vecteur y des sorties.
- b est l'effet des bruits affectant les capteurs et/ou le générateur des consignes r . Le signal b

s'ajoute donc à l'écart e entre r et y avant que celui-ci agisse sur K .

L'objectif principal de l'automatique est de réduire autant que possible l'écart $e = r - y$ malgré la variation de r et la présence des perturbations d et des bruits b . Pour atteindre cet objectif, l'organe de commande K doit être conçu de sorte à satisfaire certaines conditions que nous allons établir.

Posons $L = GK$ la MT de la chaîne directe et écrivons la relation entre e et les entrées r , b et d .

$$\begin{aligned} e(s) &= r(s) - y(s) \\ &= r(s) - \{L(s)[e(s) + b(s)] + d(s)\} \\ \Rightarrow [I + L(s)]e(s) &= r(s) - d(s) - L(s)b(s). \end{aligned}$$

Donc

$$e(s) = S(s)[r(s) - d(s)] - T(s)b(s) \quad (3-34)$$

avec

$$S = [I + L]^{-1} \quad \text{et} \quad T = SL \quad (3-35)$$

La matrice S est appelée *sensibilité* et la matrice T est appelée *sensibilité complémentaire* car

$$T + S = I. \quad (3.36)$$

À noter que $LS = L(I + L)^{-1} = (I + L)^{-1}L = SL$ (le produit de S par L commute). Ceci provient de l'égalité matricielle, $A(I + BA)^{-1} = (I + AB)^{-1}A$, dite « pousser à travers » qui se déduit en multipliant à gauche le premier membre par $I = (I + AB)^{-1}(I + AB)$.

D'autre part, la multiplication matricielle n'étant pas commutative, il ne faut pas confondre entre les matrices $L = GK$ et $L_e = KG$. L est la MT de la boucle ouverte à la sortie de G tandis que L_e est la MT de la boucle ouverte à l'entrée de G . De la même manière, on distingue les matrices S et T définies en (3-35) des matrices

$$S_e = (I + KG)^{-1} \quad \text{et} \quad T_e = S_e L_e.$$

Pour effectuer une analyse fréquentielle partant de (3-34), il convient de rappeler le lien entre les transformées de Laplace et de Fourier ainsi que de la propriété principale de cette dernière.

Rappel

La transformée de Laplace d'un signal vectoriel quelconque réel $f(t)$ est

$$f(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

et sa transformée de Fourier s'obtient en remplaçant s par $j\omega$:

$$f(\omega) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt.$$

La transformée inverse de Fourier permet de reconstituer $f(t)$ à partir de $f(\omega)$:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)e^{j\omega t} d\omega \\ &= \int_0^{\infty} \frac{f(\omega)e^{j\omega t} + \overline{f(\omega)}e^{-j\omega t}}{2} \frac{d\omega}{\pi}. \end{aligned}$$

On peut dire que la fonction vectorielle $f(t)$ est une “somme” de vecteurs “sinusoïdaux” dont l'amplitude et la phase de la $i^{\text{ème}}$ composante sont respectivement égales au module et l'argument de la $i^{\text{ème}}$ composante de $f(\omega)$ (à un terme multiplicatif $d\omega/\pi$ près). Les vecteurs $f(\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}^+$, caractérisent donc les vecteurs “sinusoïdaux” qui constituent $f(t)$ de la même manière que le vecteur α défini au paragraphe 3-1 caractérise le vecteur “sinusoïdal” d'entrées $u(t)$. Se basant sur cette constatation, étudions l'effet sur l'écart e de chacune des entrées r , d et b prises séparément (en annulant les deux autres).

Poursuite

On dit qu'un système a une bonne poursuite si, en l'absence de la perturbation d et du bruit b , l'écart $e(t) = r(t) - y(t)$ devient petit en régime stationnaire. Or, pour $d = b = 0$, (3-34) se réduit à $e(s) = S(s)r(s)$.

Pour $s = j\omega$, $\omega \in \mathbb{R}^+$, l'équation précédente s'écrit :

$$e(\omega) = S(j\omega)r(\omega).$$

Les vecteurs qui caractérisent les harmoniques de l'écart $e(t)$ sont donc les images par $S(j\omega)$ des vecteurs qui caractérisent les harmoniques de la référence $r(t)$. Le module de $e(t)$ sera petit si, pour toute

fréquence ω , le module de $e(\omega)$ est petit. Or, d'après (3-21),

$$\|e(\omega)\| \leq \bar{\sigma}[S(j\omega)] \cdot \|r(\omega)\| \quad \forall \omega.$$

On en déduit que $\|e(\omega)\|$ est petit si l'un des termes $\|r(\omega)\|$ ou $\bar{\sigma}[S(j\omega)]$ est suffisamment petit. Soit Ω_r l'ensemble des fréquences ω pour lesquelles $\|r(\omega)\|$ est significatif, c'est-à-dire non négligeable. Pour obtenir une bonne poursuite, il suffit que

$$\bar{\sigma}[S(j\omega)] \leq \delta, \quad \forall \omega \in \Omega_r \quad (3-37)$$

où δ est un réel tel que $0 < \delta \ll 1$. Cette condition peut aussi s'exprimer en fonction de la MT de la chaîne directe $L = GK$. En effet, d'après (3-33),

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}[S(j\omega)] &= \bar{\sigma}\left\{[I + L(j\omega)]^{-1}\right\} = \frac{1}{\underline{\sigma}[I + L(j\omega)]} \leq \delta \\ \Leftrightarrow \underline{\sigma}[I + L(j\omega)] &\geq \frac{1}{\delta} \end{aligned}$$

Or, d'après (3-31), $-1 \leq \underline{\sigma}(I + L) - \underline{\sigma}(L) \leq +1$. On déduit que la condition (3-37) est équivalente à

$$\underline{\sigma}[L(j\omega)] \geq \frac{1}{\delta} - 1 \approx \frac{1}{\delta} \quad \forall \omega \in \Omega_r. \quad (3-38)$$

Exprimons encore cette condition en fonction de la MT de la boucle fermée $T = SL = I - S$.

Comme $T^{-1} = L^{-1}(I + L) = L^{-1} + I$,

$$\underline{\sigma}(T) = \frac{1}{\bar{\sigma}(L^{-1} + I)} \geq \frac{1}{1 + \bar{\sigma}(L^{-1})} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\underline{\sigma}(L)}}.$$

$$(3-38) \Leftrightarrow \frac{1}{\underline{\sigma}(L)} \leq \frac{\delta}{1 - \delta}. \text{ D'où } \underline{\sigma}(T) \geq 1 - \delta.$$

D'autre part, d'après (3-31) et (3-37),

$$\bar{\sigma}(T) = \bar{\sigma}(I - S) \leq 1 + \bar{\sigma}(S) \leq 1 + \delta.$$

Donc, $\forall \omega \in \Omega_r$, (3-37) est équivalente à

$$1 - \delta \leq \underline{\sigma}[T(j\omega)] \leq \bar{\sigma}[T(j\omega)] \leq 1 + \delta. \quad (3-39)$$

Ainsi, si δ est suffisamment petit, la bonne poursuite sera assurée si la condition (3-37), (3-38) ou (3-39) est vérifiée.

Rejet des perturbations

Voyons maintenant sous quelles conditions l'effet des perturbations d sur l'écart e sera négligeable.

Pour $r = b = 0$, en remplaçant s par $j\omega$, l'équation (3.34) devient :

$$e(\omega) = -S(j\omega)d(\omega).$$

Un raisonnement analogue à celui de la poursuite, montre que l'effet des perturbations sera atténué si la condition (3-37), équivalente aux conditions (3-38) et (3-39), est vérifiée sur l'ensemble Ω_d des fréquences ω pour lesquelles $\|d(\omega)\|$ est significatif. Si ces conditions sont satisfaites sur $\Omega_p = \Omega_r \cup \Omega_d$, le système jouit à la fois d'une bonne poursuite et d'un bon rejet des perturbations et on dit qu'il est *performant*.

Le système sera donc performant si, pour les fréquences $\omega \in \Omega_p$,

- La sensibilité S est petite.
- le gain de la chaîne directe L est grand.
- le gain de la boucle fermée T est voisin de 1.

Insensibilité aux bruits

Il reste à établir la condition pour que le bruit b soit sans grand effet sur l'écart e .

Pour $r = d = 0$ et $s = j\omega$, l'équation (3-34) devient :

$$e(\omega) = -T(j\omega)b(\omega)$$

On en déduit que $\|e(\omega)\|$ est petit si l'un des termes $\|b(\omega)\|$ ou $\bar{\sigma}[T(j\omega)]$ est suffisamment petit. Soit Ω_b l'ensemble des fréquences ω pour lesquelles $\|b(\omega)\|$ est significatif. Pour atténuer l'effet de b sur e , il est nécessaire que

$$\bar{\sigma}[T(j\omega)] \leq \gamma, \quad \forall \omega \in \Omega_b \quad (3-40)$$

où γ est un réel tel que $0 < \gamma \ll 1$. Pour les fréquences $\omega \in \Omega_p \cap \Omega_b$ la condition (3-40) est en contra-

diction avec (3-39) : (3-40) impose à la boucle fermée un gain faible tandis que (3-39) exige que ce gain soit voisin de 1. Par conséquent, pour que le système soit à la fois performant et insensible aux bruits, il est nécessaire que les ensembles Ω_p et Ω_b soient disjoints. Heureusement en pratique, les fréquences significatives des bruits produits par les capteurs ou les générateurs des références sont plus élevées que la plus haute fréquence significative des perturbations et des références.

Pour compléter cette section, écrivons d'abord la condition (3-40) en fonction de L .

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(L) &= \bar{\sigma}[T(I + L)] \leq \bar{\sigma}(T)\bar{\sigma}(I + L) \\ &\leq \gamma[\bar{\sigma}(L) + 1] \end{aligned}$$

D'où la condition sur L est :

$$\bar{\sigma}[L(j\omega)] \leq \frac{\gamma}{1 - \gamma} \approx \gamma \quad \forall \omega \in \Omega_b. \quad (3-41)$$

La condition sur S s'obtient en écrivant :

$$\underline{\sigma}(S) = \frac{1}{\bar{\sigma}(S^{-1})} = \frac{1}{\bar{\sigma}(I + L)} \geq \frac{1}{1 + \bar{\sigma}(L)}.$$

D'où, d'après (3-41), $\underline{\sigma}(S) \geq 1 - \gamma$.

D'autre part,

$$\bar{\sigma}(S) = \bar{\sigma}(I - T) \leq 1 + \bar{\sigma}(T) \leq 1 + \gamma.$$

La condition sur S est donc : $\forall \omega \in \Omega_b$,

$$1 - \gamma \leq \underline{\sigma}[S(j\omega)] \leq \bar{\sigma}[S(j\omega)] \leq 1 + \gamma. \quad (3-42)$$

Ainsi, le système sera insensible aux bruits si, pour toute fréquence $\omega \in \Omega_b$, les conditions suivantes sont vérifiées

- La sensibilité complémentaire T est petite.
- Le gain de la chaîne directe L est petit.
- La sensibilité S est voisine de 1.

La figure 3-8 montre l'allure que doivent avoir σ -sup et σ -inf des matrices $L(j\omega)$, $S(j\omega)$ et $T(j\omega)$ pour que le système soit à la fois performant et insensible aux bruits (loop shaping).

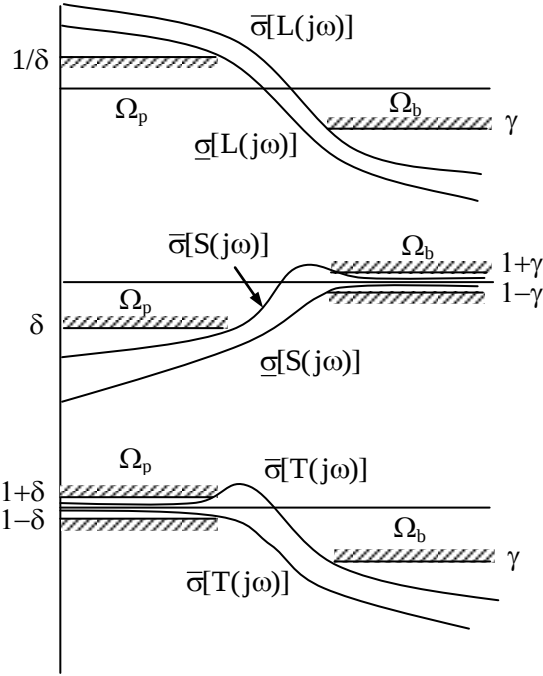


Fig. 3-8 Allure de σ -sup et σ -inf de L, S et T pour un système performant et insensible aux bruits.

EXERCICE 3-7

Montrer que $\bar{\sigma}(K) \geq \bar{\sigma}(L) / \underline{\sigma}(G)$ et déduire que les actionneurs seront d'autant plus sollicités que $\bar{\sigma}(L)$ est grand par rapport à $\underline{\sigma}(G)$. (Pour éviter donc la saturation, la bande passante de L ne doit pas trop dépasser celle de G).

3-5 Stabilité

Stabilité interne

La figure 3-9 représente un système de commande dans lequel sont injectés les signaux de référence r , de bruit b et des perturbations d_u et d_y . Sous l'action de ces entrées exogènes (externes), non seulement la sortie y ne doit pas diverger mais aussi tout autre signal intérieur à la boucle. Dans ce cas on dit que le système de commande est *intérieurement stable*.

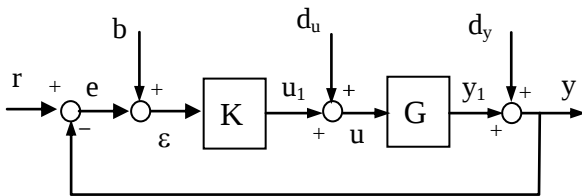


Fig. 3-9 Signaux dans un système de commande.

La stabilité interne signifie que si les entrées exogènes sont toutes bornées, leur effet est borné en tout point de la boucle (bounded input - bounded output, BIBO). Or, pour r , b , d_u et d_y bornées, si u et y sont bornés, les autres signaux internes, $y_1 = y - d_y$, $u_1 = u - d_u$, $e = r - y$ et $\varepsilon = e + b$, le seront aussi. D'un autre côté, l'effet de d_y seul sur le système est le même (au signe près) que l'effet de r seul ou de b seul. Pour tester la stabilité interne, il suffit donc d'examiner seulement les effets des perturbations d_u et d_y sur l'entrée u et la sortie y du système commandé G.

À partir de la figure 3-9, il est facile de vérifier que u et y sont liés à d_u et d_y par les relations :

$$\begin{aligned} u &= S_e d_u - S_e K d_y, \\ y &= S G d_u + S d_y, \end{aligned} \quad (3-43)$$

où $S_e = (I + KG)^{-1}$ et $S = (I + GK)^{-1}$ sont les matrices de sensibilité respectivement à l'entrée et à la sortie de G.

Par conséquent, le système de commande est intérieurement stable si chacune des 4 matrices de transfert apparaissant dans (3-43) est stable. Cependant, on démontre que si on ne simplifie pas les pôles et les zéros à partie réelle positive (prp) en effectuant les multiplications GK et KG, les 4 matrices de (3-43) seront stables si et seulement si une seule de ces matrices, disons S, est stable. Considérons à titre d'exemple un système SISO pour lequel

$$K(s) = \frac{s-1}{s} \quad \text{et} \quad G(s) = \frac{1}{(s-1)(s+1)}.$$

Si on ne simplifie pas $(s-1)$, on obtient :

$$\begin{aligned} GK &= KG = \frac{s-1}{s(s-1)(s+1)} \\ S &= S_e = \frac{1}{1+KG} = \frac{s(s-1)(s+1)}{(s-1)(s^2+s+1)} \\ S_e K &= \frac{(s-1)^2(s+1)}{(s-1)(s^2+s+1)}, \quad SG = \frac{s(s-1)}{(s-1)^2(s^2+s+1)} \end{aligned}$$

et les 4 fonctions de transfert sont, comme S , instables. Par contre, en simplifiant $(s - 1)$, on constate que S , S_e , $S_e K$ deviennent stables tandis que SG reste instable.

La propriété suivante permet de déterminer tous les organes de commande linéaires K qui assurent une stabilité interne à la boucle fermée de la figure 3-9 lorsque le système commandé G est stable.

- Pour G stable, la boucle fermée est intérieurement stable si et seulement si, pour toute matrice de transfert Q stable,

$$K = (I - QG)^{-1}Q.$$

Preuve

a)

$$K = (I - QG)^{-1}Q \Leftrightarrow K = Q(I + GK)$$

$$\Leftrightarrow KS = Q \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow S_e K = Q \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow GQ = T = I - S \Leftrightarrow S = I - GQ \quad (3)$$

$$\Rightarrow SG = (I - GQ)G \quad (4)$$

$$(2) \Rightarrow QG = T_e = I - S_e \Leftrightarrow S_e = I - QG \quad (5)$$

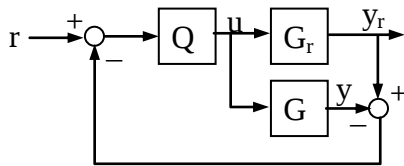
Comme Q et G sont stables, les 4 matrices de transfert des équations (3-43), exprimées en fonction de Q et G par (2), (3), (4) et (5), sont toutes stables.

b) Inversement, si la boucle fermée est intérieurement stable, la matrice $Q = S_e K$ est stable et de l'équivalence (2) on tire $K = (I - QG)^{-1}Q$. ■

Même si, pour un certain choix de Q stable, K est instable, le système de commande reste intérieurement stable à condition que G soit stable.

EXERCICE 3-8

La figure suivante représente la structure de la commande par modèle interne.



Si le système réel G_r est voisin du modèle G , montrer que

- 1) cette structure est presque équivalente à une commande en boucle ouverte.
- 2) Si G_r , G et Q sont stables, la structure est intérieurement stable.

Structure bien posée.

En plus de la stabilité interne, un système de commande doit être totalement propre ce qui signifie que la matrice de transfert $H(s)$ entre deux points quelconques de sa structure doit être propre c.à.d. $H(\infty) < \infty$. Par conséquent, l'organe de commande K et le procédé G doivent être propres ainsi que les 4 matrices de transfert des équations (3-43). Or le procédé G est généralement propre et si l'organe de commande K est choisi propre, comme $S_e K = KS$, les matrices S , S_e , SG et $S_e K$ sont propres si et seulement si $S = (I + L)^{-1}$ est propre c.à.d. si son dénominateur est tel que

$$\det[I + L(\infty)] \neq 0.$$

EXERCICE 3-9

1) Montrer que la matrice de transfert d'entrée $[u; y]$ et de sortie $[d_u; d_y]$ est

$$H = \begin{pmatrix} I & K \\ -G & I \end{pmatrix}$$

et déduire que

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} S_e & -KS \\ GS_e & S \end{pmatrix}.$$

2) Montrer que

$$H = \begin{pmatrix} I + L & K \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -G & I \end{pmatrix}$$

et déduire que H est propre si $\det[I + L(\infty)] \neq 0$ et que H est stable si les racines de $\det[I + L(s)] = 0$ ont toutes des prn.

Revenons à la stabilité interne. Nous savons que si, en effectuant le produit $L(s) = G(s)K(s)$, on ne simplifie pas des pôles à prp par des zéros, la stabilité interne de la boucle fermée de la figure 3-9 est équivalente à la stabilité de $S = (I + L)^{-1}$.

Soit $\Gamma_s = (A_s, B_s, C_s, D_s)$ une réalisation d'état de S . Cette réalisation est stable si et seulement si les valeurs propres de A_s ont toutes des parties réelles strictement négatives (section (1-6)). Mais la matrice d'état A_s peut être déduite de la réalisation $\Gamma = (A, B, C, D)$ de $L(s)$. En effet (fig. 3-10)

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B(r - y) \\ y = Cx + D(r - y) \end{cases} \quad (3-44)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e = -(I + D)^{-1}Cx + (I + D)^{-1}r, \\ \dot{x} = [A - B(I + D)^{-1}C]x + B(I + D)^{-1}r. \end{cases}$$

D'où

$$A_S = A - B(I + D)^{-1}C. \quad (3-45)$$

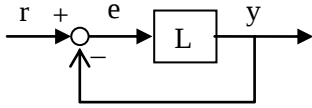


Fig. 3-10 Système de commande simplifié

À partir de la relation (3-45), nous allons généraliser le critère de Nyquist aux systèmes multivariables. Pour le faire nous aurons besoin de la formule suivante.

Formule de Schur

$$\det \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \det(A_{11}) \cdot \det(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})$$

$$= \det(A_{22}) \cdot \det(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}).$$

à condition que A_{11} ou A_{22} soit inversible.

Preuve

Si A_{11} est inversible, on peut vérifier que

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } X = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}.$$

Or, le déterminant d'un produit de matrices est égal au produit de leurs déterminants et le déterminant d'une matrice diagonale ou triangulaire en blocs est le produit des déterminants des blocs diagonaux. D'où la première égalité de la formule. La deuxième se démontre d'une manière analogue à condition que A_{22} soit inversible ■

Revenons à l'étude de la stabilité de S en considé-

rant les valeurs propres de sa matrice d'état A_S donnée par (3-45). Ce sont les racines du polynôme caractéristique

$$\begin{aligned} \pi_S(s) &= \det(sI - A_S) \\ &= \det[sI - A + B(I + D)^{-1}C]. \end{aligned}$$

Mais l'application de la formule de Schur montre que

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} I + D & -C \\ B & sI - A \end{bmatrix} &= \det(I + D) \cdot \pi_S(s) \\ &= \det(sI - A) \cdot \det[I + L(s)] \end{aligned}$$

$$\text{car } L(s) = C(sI - A)^{-1}B + D.$$

Par conséquent, comme $\det(sI - A)$ est le polynôme caractéristique $\pi_L(s)$ de $L(s)$, on a :

$$\det[I + L(s)] = a \frac{\pi_S(s)}{\pi_L(s)} \quad (3-46)$$

où $a = \det(I + D)$ est une constante qui vaut 1 si L est strictement propre ($D = 0$).

EXERCICE 3-10

En posant pour un système SISO $L(s) = n(s)/d(s)$, vérifier (3-46).

Critère de Nyquist généralisé

Ce critère permet de déterminer le nombre de pôles μ_i à prp de la sensibilité S connaissant le nombre de pôles λ_i à prp de la chaîne directe L.

L'égalité (3-46) peut s'écrire sous la forme

$$\det[I + L(s)] = af(s),$$

avec

$$f(s) = \frac{\prod (s - \mu_i)}{\prod (s - \lambda_i)} \quad (3-47)$$

et on a :

$$\text{Arg}[f(s)] = \sum \text{Arg}(s - \mu_i) - \sum \text{Arg}(s - \lambda_i). \quad (3-48)$$

Soit γ la courbe fermée dans $\mathcal{C}$ constituée de l'axe des imaginaires $\mathcal{Jm}$ et d'un demi-cercle de rayon

infini ayant $\mathcal{I}m$ comme diamètre et situé à droite de cet axe comme le montre la figure 3-11. Pour que $f(s)$ soit analytique sur toute la courbe γ , on entoure ses pôles situés sur $\mathcal{I}m$ par des demi-cercles infiniment petits.

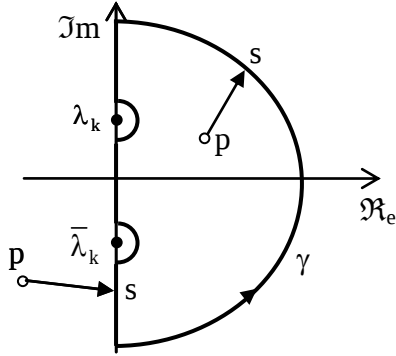


Fig. 3-11 Contour de Nyquist

On voit sur la figure que si un point p est à prp, il est à l'intérieur de γ et le vecteur $s - p$ tourne autour de p de 2π quand s décrit γ dans le sens trigonométrique. Par contre, si p est à prn, il est à l'extérieur de γ et la variation de l'argument du vecteur $s - p$ est nulle quand s décrit γ . Par conséquent, d'après (3-48), la variation de l'argument de $f(s)$ (ou de $\det[I + L(s)]$) quand s décrit γ est $(Z - P)2\pi$, Z étant le nombre des μ_i à prp et P le nombre des λ_i à prp. Ceci signifie que le vecteur v joignant l'origine au point $\det[I + L(s)]$ effectue

$$N = Z - P \quad (3-49)$$

tours quand s décrit γ , un tour étant compté positif lorsque la rotation de v est dans le sens trigonométrique.

Comme Z est le nombre des pôles à prp de la matrice de sensibilité S , le système de commande sera stable si et seulement si $Z = 0$, c'est-à-dire, d'après (3-49), si et seulement si le vecteur v tourne P fois autour de l'origine dans le sens horaire. Dans le cas où $P = 0$ (L stable), le système en boucle fermée est stable si et seulement si v n'effectue aucun tour complet autour de l'origine.

Il reste à signaler que si la courbe $f(\gamma)$, image de γ par f , passe par l'origine, (3-47) implique qu'il existe un pôle μ_i de S qui appartient à l'axe des imaginaires et que S est instable.

Dans le cas d'un système monovariante,

$$af(s) = \det[I + L(s)] = 1 + L(s)$$

d'où, la boucle fermée est stable si et seulement si $L(\gamma)$ entoure le point -1 dans le sens horaire autant de fois que $L(s)$ a de pôles à prp.

Exemple 3-4

Soit

$$L(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{s-1}{s+2} \\ \frac{s+2}{s^2+2} & 0 \end{bmatrix}.$$

la matrice de transfert de la chaîne directe et rappelons que les pôles d'une matrice de transfert sont les racines du plus petit commun dénominateur de tous les mineurs non nuls de cette matrice (voir section 1-6). Les pôles de $L(s)$ sont donc

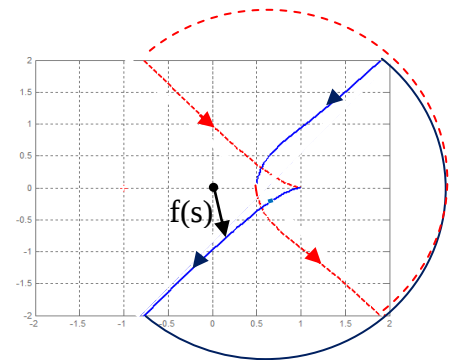
$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = j\sqrt{2}, \lambda_4 = -j\sqrt{2}$$

avec un pôle à prp ($P = 1$) et les parties réelles des autres pôles sont nulles ou négatives. D'autre part,

$$\begin{aligned} f(s) &= \det[I + L(s)], \\ &= \frac{s}{s-1} - \frac{s-1}{s^2+2} = \frac{s^3 - s^2 + 4s - 1}{s^3 - s^2 + 2s - 2}. \end{aligned}$$

On obtient la courbe de Nyquist de $f(s)$ par matlab en écrivant :

```
>> n = [1 -1 4 -1];
>> d = [1 -1 2 -2];
>> nyquist(n, d)
```



Sur cette figure (que nous l'avons complété par des demi-cercles pour plus de clarté) on remarque que $f(s)$ n'effectue pas des tours complets autour de l'origine. D'où $N = 0$, $Z = P = 1$ et le système en boucle fermée est instable comportant un pôle μ à prp.

Théorème du petit gain

Bien que ce théorème soit plus restrictif que le critère de Nyquist, il sera de grande utilité pour l'analyse de la robustesse. Pour l'établir, nous aurons besoin de la notion du rayon spectral et de sa propriété essentielle.

Le *rayon spectral* $\rho(A)$ d'une matrice carrée A est le plus grand module de ses valeurs propres $\lambda_i(A)$:

$$\rho(A) = \max_i |\lambda_i(A)|. \quad (3-50)$$

Soit v_i un vecteur propre relatif à la valeur propre λ_i de A . On a :

$$\lambda_i v_i = A v_i \Rightarrow |\lambda_i| = \frac{\|A v_i\|}{\|v_i\|} \leq \bar{\sigma}(A) \quad \forall i$$

d'où

$$\rho(A) \leq \bar{\sigma}(A) = \|A\|. \quad (3-51)$$

Montrons maintenant que si la matrice de transfert L de la boucle ouverte d'un système de commande à retour unitaire vérifie les deux conditions

$$\begin{aligned} &L(s) \text{ stable,} \\ &\text{et } \rho[L(j\omega)] < 1 \quad \forall \omega \end{aligned} \quad (3-52)$$

la boucle fermée sera stable.

Preuve

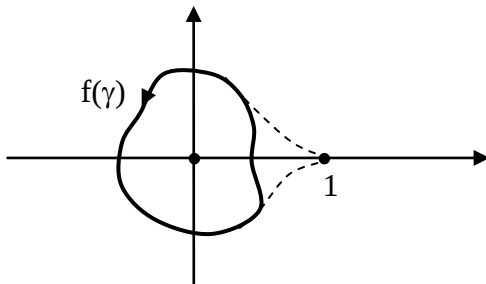


Fig. 3-12 Courbe $f(\gamma)$ d'un système instable

Raisonnons par l'absurde et supposons que la boucle fermée n'est pas stable. Comme les pôles de L sont tous à prn ($P = 0$), l'image par $f(s) = \det[I + L(s)]$ du contour γ de Nyquist entoure l'origine au moins une fois comme le montre la figure 3-12.

Au lieu de $f(s)$, considérons la fonction $f_c(s) = \det[I + cL(s)]$, $c \in [0, 1]$. Quand c décroît de 1 à 0, l'image de la courbe γ par f_c se modifie d'une manière continue et passe de la courbe fermée $f_1(\gamma) = f(\gamma)$ au point $f_0(\gamma) = \det(I) = 1$. Il doit donc exister un réel $c \in [0, 1]$ pour lequel $f_c(\gamma)$ passe par l'origine. D'où il existe $c \in]0, 1]$ et une fréquence ω_1 tels que

$$\det[I + cL(j\omega_1)] = 0 \Leftrightarrow \det[-(1/c)I - L(j\omega_1)] = 0.$$

Ceci signifie que $-1/c$ est une valeur propre de $L(j\omega_1)$ d'où

$$\exists i \text{ t.q. } \lambda_i[L(j\omega_1)] = -\frac{1}{c}, \quad c \in]0, 1].$$

$$\Leftrightarrow \rho[L(j\omega_1)] \geq 1$$

ce qui contredit l'hypothèse (3-52). ■

Le théorème du petit gain s'énonce comme suit :

$$\begin{aligned} &\text{Si} \\ &\quad L(s) \text{ stable,} \\ &\quad \text{et } \bar{\sigma}[L(j\omega)] = \|L(j\omega)\| < 1 \quad \forall \omega \end{aligned} \quad (3-53)$$

la boucle fermée est stable.

D'après (3-51), ce théorème n'est qu'un corollaire de (3-52). La stabilité de la boucle fermée est donc assurée dès que la boucle ouverte est stable et que sa norme est inférieure à 1 pour toute fréquence ω .

Nous attirons l'attention que le théorème du petit gain n'est qu'une condition suffisante de stabilité mais non nécessaire : le système peut être stable sans que la condition (3-53) soit vérifiée.

Considérons par exemple un système monovariable dont la fonction de transfert de la boucle ouverte est $L(s) = 2/(s + 1)$. Comme cette fonction est stable, la boucle fermée sera stable si et seulement si $L(\gamma)$ n'entoure pas le point -1 .

La figure 3-13 montre que cette condition est remplie mais $L(\gamma)$ sort du cercle unité C . On voit bien que la boucle fermée peut être stable sans que la deuxième condition (3-53) soit vraie.

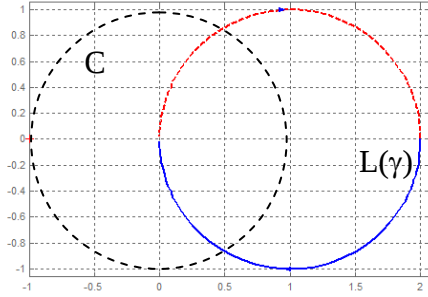


Fig. 3-13 Système stable qui ne vérifie pas (3-53)

Marge de stabilité

À cause des hypothèses simplificatrices de modélisation, de l'usure et des erreurs d'évaluation des paramètres, la fonction de transfert nominale $L(s)$ de la boucle ouverte d'un système de commande ne représente la réalité physique $L_r(s)$ que d'une manière plus ou moins approximative. On écrit :

$$L_r(s) = L(s) + \Delta(s)$$

où $\Delta(s)$ est une certaine matrice (inconnue) dont la norme $\overline{\sigma}[\Delta(j\omega)]$ est une mesure de l'erreur de modélisation à la fréquence ω .

Le nombre total de pôles du modèle $L(s)$ n'est pas nécessairement le même que le nombre total de pôles du système réel $L_r(s)$. Cependant, lors de l'élaboration du modèle, on prend généralement la précaution de tenir compte des phénomènes physiques susceptibles de déstabiliser le système commandé. Pour cette raison, nous admettons que le nombre P de pôles à prp de $L(s)$ est égal au nombre P_r de pôles à prp de $L_r(s)$ sans exiger toutefois que ces pôles soient confondus.

Avec cette hypothèse, voyons dans quelle marge la boucle fermée B_r du système réel reste stable quand la boucle fermée B du système nominal (fig. 3-10) est stable. Posons

$$f(s) = \det[I + L(s)],$$

$$f_r(s) = \det[I + L_r(s)] = \det[I + L(s) + \Delta(s)]$$

et désignons par γ le contour de Nyquist et par N et N_r respectivement les nombres de tours autour de l'origine de $f(\gamma)$ et $f_r(\gamma)$. D'après le critère de Nyquist, comme par hypothèse $P_r = P$, B_r est stable si et seulement si $N_r = N$. Cette égalité est évidemment vraie pour $\Delta = 0$ puisque dans ce cas la courbe $f_r(\gamma)$ se confond avec $f(\gamma)$. Mais, en considérant des matrices Δ de taille $k = \sup_{\omega} \{\overline{\sigma}[\Delta(j\omega)]\}$ de plus en plus grande, $f_r(\gamma)$ s'écarte progressivement de $f(\gamma)$ et on peut arriver à une matrice $\Delta = \Delta_m$ pour laquelle $f_r(\gamma)$ passe par l'origine. Ceci signifie que pour cette matrice Δ_m la boucle B_r devient instable et qu'il existe ω telle que

$$\det[I + L(j\omega) + \Delta_m(j\omega)] = 0 \quad (3-54)$$

De la propriété P3 (section 3-3) et de l'égalité (3-54) on déduit que

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}[I + L(j\omega)] &\leq \overline{\sigma}[\Delta_m(j\omega)] \\ \text{ou } \frac{1}{\overline{\sigma}[S(j\omega)]} &\leq \overline{\sigma}[\Delta_m(j\omega)], \end{aligned}$$

$S = (I + L)^{-1}$ étant la sensibilité du système de commande. Par conséquent, la plus petite erreur de modélisation qui déstabilise le système réel est nécessairement supérieure à

$$\boxed{\text{mga} = \frac{1}{\max_{\omega} \overline{\sigma}[S(j\omega)]}} \quad (3-55)$$

appelé la *marge absolue de stabilité*. Le risque que B_r soit instable est d'autant plus faible que la marge mga est grande.

Au lieu de l'erreur absolue $\Delta = L_r - L$, on peut définir l'erreur de modélisation par sa valeur relative $\Delta' = (L_r - L)L^{-1}$ d'où $\Delta = \Delta' L$ et (3-54) devient

$$\begin{aligned} \det[I + L + \Delta'_m L] &= \det[(I + L^{-1} + \Delta'_m)L] \\ &= \det(L) \det(I + L^{-1} + \Delta'_m) = 0 \\ \Rightarrow \det(I + L^{-1} + \Delta'_m) &= 0. \end{aligned}$$

De cette dernière égalité et de la propriété P3 on déduit que

$$\underline{\sigma}[I + L^{-1}(j\omega)] \leq \underline{\sigma}[\Delta_m'(j\omega)]$$

ou
$$\frac{1}{\underline{\sigma}[T(j\omega)]} \leq \underline{\sigma}[\Delta_m'(j\omega)]$$

car $(I + L^{-1})^{-1} = [(L + I)L^{-1}]^{-1} = L(I + L)^{-1} = T$, où T est la sensibilité complémentaire. D'où

$$\boxed{\text{mgr} = \frac{1}{\max_{\omega} \underline{\sigma}[T(j\omega)]}} \quad (3-56)$$

est une mesure de la plus petite erreur relative de modélisation qui déstabilise le système réel et sera appelé la *marge relative de stabilité*.

Le risque d'instabilité du système réel est donc d'autant plus faible que la sensibilité maximum et la sensibilité complémentaire maximum sont faibles (mga et mgr grandes). Par conséquent, les maximums des courbes $\underline{\sigma}(S)$ et $\underline{\sigma}(T)$ de la figure 3-8 doivent être aussi faibles que possible. La marge de stabilité sera précisée davantage quand on étudiera au chapitre suivant la robustesse des systèmes de commande.

À titre d'exemple, nous allons démontrer que la stabilité sous la politique LQR donnée au chapitre précédent est très robuste. Ceci sera déduit d'une propriété de cette politique que nous allons d'abord établir.

Égalité de la différence de retour

La figure 3-14 représente la boucle de commande par retour d'état ouverte à l'entrée du système commandé. Sa matrice de transfert de u à $\tilde{u}$ est

$$L_e(s) = -K\Phi(s)B, \quad \Phi(s) = (sI - A)^{-1}. \quad (3-57)$$

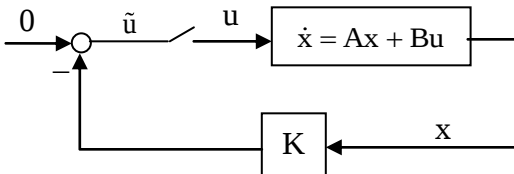


Fig. 3-14 Boucle ouverte à l'entrée

La différence entre la commande u et son retour $\tilde{u}$ est donc

$$u - \tilde{u} = F(s)u$$

où

$$F(s) = I + K\Phi(s)B = I + L_e(s) \quad (3-57)$$

est appelé la matrice de transfert de la différence de retour dont l'inverse est la sensibilité à l'entrée $S_e(s)$. Pour une commande LQR, nous savons que

$$K = R^{-1}B^T X \quad (3-58)$$

où $R > 0$ et symétrique et X est la matrice définie positive vérifiant l'équation de Riccati

$$A^T X + XA - XBR^{-1}B^T X = -Q$$

avec $Q \geq 0$ et symétrique (voir 2-57 et 2-58). Tenant compte de (3-58), l'équation précédente peut aussi s'écrire sous la forme :

$$(-sI - A^T)X + X(sI - A) - K^T R K = Q. \quad (3-59)$$

En multipliant les deux membres de cette équation à gauche par $B^T(-sI - A^T)^{-1}$ et à droite par $(sI - A)^{-1}B = \Phi(s)B$, on obtient :

$$\begin{aligned} B^T X \Phi(s)B + B^T \Phi^*(s)XB + [F^*(s) - I]R[F(s) - I] \\ = B^T \Phi^*(s)Q\Phi(s)B \end{aligned}$$

où $F(s)$ est définie par (3-57) et la notation $M^*(s)$ signifie $M^T(-s)$. Mais, d'après (3-58), on peut remplacer dans l'équation précédente $B^T X$ par RK et XB par $K^T R$ ce qui donne d'après (3-57) :

$$R(F - I) + (F^* - I)R + (F^* - I)R(F - I) = B^T \Phi^* Q \Phi B.$$

Après simplification, on arrive à l'équation suivante appelée *égalité de la différence de retour* :

$$\boxed{F^*(s)RF(s) = R + B^T \Phi^*(s)Q\Phi(s)B}. \quad (3-60)$$

Comme la matrice $B^T \Phi^* Q \Phi B \geq 0$, de l'égalité (3-60) on tire l'inégalité :

$$\boxed{F^*(s)RF(s) \geq R}. \quad (3-61)$$

Robustesse de la commande LQR

Choisissons $R = I$ qui est symétrique et définie positive comme l'exige la commande LQR. L'inégalité (3-61), valable pour tout s et tout R symétrique et dp , permet d'écrire :

$$\begin{aligned} & h^T F^*(j\omega) F(j\omega) h \geq h^T h \quad \forall \omega, \forall h \\ \Leftrightarrow & \|F(j\omega)h\| \geq \|h\| \quad \forall \omega, \forall h \\ \Leftrightarrow & \underline{\sigma}[F(j\omega)] = \frac{1}{\overline{\sigma}[S_e(j\omega)]} \geq 1 \quad \forall \omega. \\ \Rightarrow & m_{ga} = \frac{1}{\max_{\omega} \overline{\sigma}[S_e(j\omega)]} \geq 1 \quad (3-61') \end{aligned}$$

D'autre part, comme $\overline{\sigma}(T_e) = \overline{\sigma}(I - S_e) \leq 1 + \overline{\sigma}(S_e)$, on déduit de la dernière inégalité que

$$m_{gr} = \frac{1}{\max_{\omega} \overline{\sigma}[T_e(j\omega)]} \geq \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, si le gain maximum de l'erreur relative de modélisation ne dépasse pas $\frac{1}{2}$ (50 %), il est certain que la commande LQR stabilise le système réel.

Cas SISO

Pour les systèmes SISO, on peut exprimer la robustesse de la commande LQR à l'aide de la notion classique de marge de gain et de phase. En effet, dans le cas SISO,

$$\underline{\sigma}[F(j\omega)] \geq 1 \quad \forall \omega \Leftrightarrow |1 + L(j\omega)| \geq 1 \quad \forall \omega$$

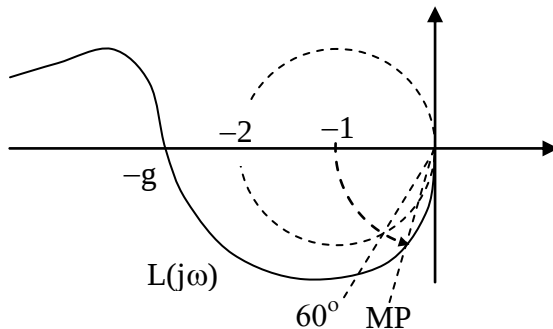


Fig. 3-15 Marges de gain et de phase LQR

La courbe de Nyquist $L(j\omega)$ est donc entièrement à l'extérieur du cercle de centre $(0, -1)$ et de rayon 1 comme le montre la figure 3-15.

De cette figure on constate que si le modèle $L(j\omega)$ est multiplié par $k > \frac{1}{2}$ ou par $e^{-j\varphi}$ avec $\varphi < 60^\circ$, le système de commande sous la politique LQR conserve sa stabilité car la nouvelle courbe $L_r(j\omega)$ reste d'un même côté par rapport au point $(0, -1)$. Ceci se traduit en écrivant que la marge de gain MG et la marge de phase MP vérifient les inégalités

$$\begin{aligned} MG &= 20\log(g) \geq 20\log(2) \approx 6 \text{ db}, \\ MP &\geq 60^\circ. \end{aligned}$$

Remarque

Dans le cas le plus fréquent où les variables d'état ne sont pas toutes mesurables, le signal de retour $\tilde{u} = -Kx$ de la figure 3-14 sera remplacé par $\hat{u} = -K\hat{x}$ où $\hat{x}$ est l'estimation de l'état x par un filtre de Kalman (politique LQG). En substituant dans l'équation de ce filtre,

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_f(y - C\hat{x} - Du),$$

$y(s)$ par $[C\Phi(s)B + D]u(s)$, on déduit que différence de retour est $u - \hat{u} = u + K\hat{x} = (I + \hat{L}_e)u$ avec

$$I + \hat{L}_e = I + K(\Phi^{-1} + K_f C)^{-1}(K_f C\Phi + I)B \quad (3-62)$$

qui est très différente de l'expression (3-57). Ceci implique que la commande LQG n'a pas nécessairement la même robustesse que LQR. Des exemples dans la littérature montrent que la commande par LQG de certains systèmes a une faible marge de stabilité. Cependant, sous des conditions assez restrictives, il est possible de remédier à cet inconvénient et de récupérer la robustesse LQR (loop transfer recovery, LTR) en choisissant pour le filtre de Kalman une matrice K_f pour laquelle $\hat{L}_e \approx L_e$. Ceci sera détaillé au chapitre 5.

3-6 Normes

Nous savons qu'une norme dans un espace vectoriel $\mathcal{E}$ sur le corps $\mathcal{C}$ est une fonction qui associe à chaque élément x de $\mathcal{E}$ un réel $\|x\|$ tel que :

- $\|x\| \geq 0$
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
- $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$ (inégalité triangulaire)

Les normes des signaux et des fonctions de transfert serviront dans les prochains chapitres à évaluer le degré de performance et de robustesse d'un système de commande. Ces normes se déduisent de celles des vecteurs et des matrices que nous allons rappeler en premier lieu.

Normes vectorielles et matricielles

Normes vectorielles

Les 3 normes les plus employées dans $\mathbb{C}^n$ sont des cas particuliers de la norme-p dont la définition est la suivante :

$$\|x\|_p = \left(\sum_i |x_i|^p \right)^{1/p}$$

où x_i est la $i^{\text{ème}}$ composante de x et p est un réel qui doit être supérieur ou égal à 1 afin que l'inégalité triangulaire soit satisfaite. En remplaçant p par 1, 2 et ∞ , on déduit les définitions suivantes.

La norme-1 est égale à la somme des valeurs absolues des composantes :

$$\|x\|_1 = \sum_i |x_i|, \quad (3-63)$$

la norme-2 n'est autre que la norme euclidienne classique :

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_i |x_i|^2} \quad (3-64)$$

et la norme- ∞ est égale à la plus grande composante en valeur absolue de x :

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|. \quad (3-65)$$

Des définitions précédentes, il est facile de voir que dans $\mathbb{R}^2$ l'ensemble de points de module 1 est un losange pour la norme-1, un cercle pour la norme-2 et un carré pour la norme- ∞ comme le montre la figure 3-16.

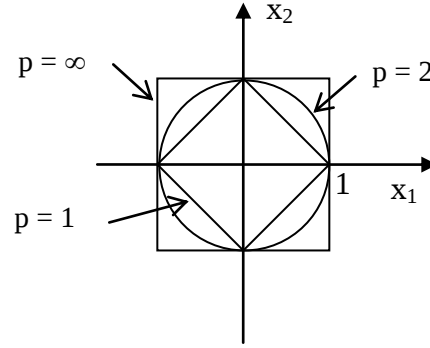


Fig. 3-16 Boules de rayon 1 pour les normes 1, 2 et ∞ .

D'autre part, il est simple de constater que

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty &\leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty, \\ \|x\|_2 &\leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2. \end{aligned} \quad (3-66)$$

La norme- i d'un vecteur ne diffère donc de sa norme- j que par un facteur fini et on dit que les 3 normes 1, 2 et ∞ sont équivalentes.

Normes matricielles

Les définitions suivantes étendent aux matrices les normes 1, 2 et ∞ des vecteurs.

La norme- s d'une matrice est égale à la somme des valeurs absolues de ses éléments :

$$\|A\|_s = \sum_{i,j} |a_{ij}|. \quad (3-67)$$

La norme- f de Frobenius est semblable à la norme euclidienne :

$$\|A\|_f = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2} = \sqrt{\text{tr}(A^* A)}. \quad (3-68)$$

La norme- m est le plus grand élément en valeur absolue :

$$\|A\|_m = \max_{i,j} |a_{ij}|. \quad (3-69)$$

Plus importantes pour l'automatique que les normes précédentes sont celles qui caractérisent une matrice A par son gain maximum en norme.

Pour les matrices, la norme induite par la norme-p des vecteurs est définie par

$$\|A\|_p = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}. \quad (3-70)$$

En d'autres termes, la norme de la matrice A induite par la norme-p des vecteurs est le plus grand gain de A selon cette norme. Comme

$$\frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \left\| A \frac{x}{\|x\|_p} \right\|_p,$$

au lieu de (3-70), on peut écrire :

$$\|A\|_p = \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p. \quad (3-71)$$

Pour $p = 2$, nous retrouvons la norme $\bar{\sigma}(A)$ définie à la section 3-3, propriété P1. Tenant compte de la définition (3-23) de σ -sup et de la définition (3-50) du rayon spectral ρ , on déduit que

$$\|A\|_2 = \bar{\sigma}(A) = \sqrt{\rho(A^*A)}. \quad (3-72)$$

Remarquer que la norme de Frobenius définie par (3-68) est toujours supérieure à la norme-2.

La norme-1 d'une matrice est égale à la plus grande norme-1 de ses colonnes. En effet, en désignant cette colonne par $a_{\bullet k}$, $\forall x$ tel que $\|x\|_1 = 1$, on a :

$$\begin{aligned} \|Ax\|_1 &= \left\| \sum_j x_j a_{\bullet j} \right\|_1 \leq \sum_j |x_j| \|a_{\bullet j}\|_1 \leq \|a_{\bullet k}\|_1 \sum_j |x_j| \\ &= \|a_{\bullet k}\|_1 \|x\|_1 = \|a_{\bullet k}\|_1. \end{aligned}$$

Or, pour $x = e^k$, e^k étant le $k^{\text{ème}}$ vecteur unitaire canonique, $\|Ae^k\|_1 = \|a_{\bullet k}\|_1$. D'où, d'après (3-71),

$$\|A\|_1 = \max_j \|a_{\bullet j}\|_1. \quad (3-73)$$

La norme- ∞ d'une matrice est égale à la plus grande norme-1 de ses lignes. En effet, en désignant cette ligne par $a_{k\bullet}$, $\forall x$ tel que $\|x\|_\infty = 1$, on a :

$$\begin{aligned} \|Ax\|_\infty &= \max_i \left(\left| \sum_j a_{ij} x_j \right| \right) \leq \max_i \left(\sum_j |a_{ij} x_j| \right) \\ &\leq \|x\|_\infty \max_i \left(\sum_j |a_{ij}| \right) = \|a_{k\bullet}\|_1. \end{aligned}$$

Or la norme- ∞ du vecteur

$$u = \begin{bmatrix} e^{-j\arg(a_{k1})} & \dots & e^{-j\arg(a_{km})} \end{bmatrix}^T$$

est égale à 1 et on a :

$$\|Au\|_\infty = \max_i \left| \sum_j a_{ij} u_j \right| = \max_i \sum_j |a_{ij}|.$$

On en déduit, d'après (3-71), que

$$\|A\|_\infty = \max_i \|a_{i\bullet}\|_1. \quad (3-74)$$

Les normes matricielles induites sont *consistantes* jouissant de la propriété

$$\|AB\|_p \leq \|A\|_p \|B\|_p. \quad (3-75)$$

En effet, d'après (3-70) et en posant $y = Bx$,

$$\begin{aligned} \|AB\|_p &= \max_{x \neq 0} \frac{\|ABx\|_p}{\|x\|_p} = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ay\|_p}{\|y\|_p} \frac{\|Bx\|_p}{\|x\|_p} \\ &\leq \max_{x \neq 0} \frac{\|Ay\|_p}{\|y\|_p} \max_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|_p}{\|x\|_p} = \|A\|_p \|B\|_p. \end{aligned}$$

Les instructions suivantes de Matlab fournissent normes induites 1, 2, ∞ et celle de Frobenius :

$$\begin{aligned} &\gg \text{norm}(A,1), \quad \gg \text{norm}(A,2), \\ &\gg \text{norm}(A,'inf'), \quad \gg \text{norm}(A,'fro'). \end{aligned}$$

EXERCICE 3-11

Soient U_1 et U_2 deux matrices unitaires ($U^*U = I$). Montrer que $\|U_1AU_2\|_2 = \|A\|_2$ et $\|U_1AU_2\|_f = \|A\|_f$ (conservation de ces normes par transformations unitaires).

Normes des signaux

Nous considérons maintenant des fonctions vectorielles $x(t) \in \mathcal{C}^n$. Leur norme- p , $p \geq 1$, se définit de la même manière que la norme- p des vecteurs mais en intégrant par rapport au temps :

$$\|x\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \sum_i |x_i(\tau)|^p d\tau \right)^{1/p}. \quad (3-76)$$

La norme- p des signaux est généralement désignée par $\mathcal{L}_p$. Pour $p = 1, 2$ et ∞ , on a :

Norme $\mathcal{L}_1$:

$$\|x\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_i |x_i(\tau)| d\tau. \quad (3-77)$$

Norme $\mathcal{L}_2$:

$$\begin{aligned} \|x\|_2 &= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \sum_i |x_i(\tau)|^2 d\tau}, \\ &= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \bar{x}(\tau)^T x(\tau) d\tau}. \end{aligned} \quad (3-78)$$

Norme $\mathcal{L}_\infty$:

$$\|x\|_\infty = \sup_{\tau} \left(\max_i |x_i(\tau)| \right) = \max_i \left(\sup_{\tau} |x_i(\tau)| \right). \quad (3-79)$$

La figure 3-17 donne une interprétation graphique de cette dernière norme pour la fonction vectorielle

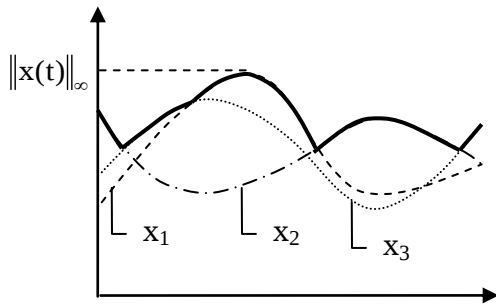


Fig. 3-17 Interprétation de $\mathcal{L}_\infty$
 $x(t) = [x_1(t) ; x_2(t) ; x_3(t)]$.

Remarques

1) Les normes précédentes n'ont de sens que si elles sont finies. L'ensemble des fonctions $x(t) \in \mathcal{C}^n$ telles que $\|x\|_p < \infty$ constitue l'espace $\mathcal{L}_p^n$ de Lebesgue.

2) La notation $\|x\|_2$ signifie la norme-2 du « signal » $x(t)$ et non pas la norme-2 du « vecteur » $x(t)$, valeur du signal à l'instant t . Pour éviter cette confusion, la norme-2 d'un vecteur x sera désignée par $\|x\|$ sans l'indice 2.

EXERCICE 3-12

Calculer les normes $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ et $\mathcal{L}_\infty$ du signal

$$x(t) = [2e^{-2t} \quad te^{-t}] \cdot 1(t).$$

Pour interpréter les normes $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ de l'espace de Hardy qui seront définies plus bas, il convient d'abord de rappeler, d'une manière intuitive, quelques notions concernant la transformée de Fourier.

Rappel

Considérons d'abord une fonction $x(t) \in \mathcal{C}$ définie sur un intervalle fini $[-T/2, T/2]$. Cette fonction peut être prolongée en une fonction périodique de période T et développée en série de Fourier :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x_n e^{jn\omega_T t}, \quad (3-80)$$

où $\omega_T = 2\pi/T$ et $x_n \in \mathcal{C}$. En considérant dans l'espace $\mathcal{F}_T$ des fonctions complexes définies sur $[-T/2, T/2]$ le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \bar{f} \cdot g \cdot dt,$$

il est facile de vérifier que les fonctions $e_n(t) = \exp(jn\omega_T t)$ qui apparaissent dans (3-80) sont orthonormées :

$$\langle e_n, e_m \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m, \\ 1 & \text{si } n = m. \end{cases}$$

Par conséquent, en multipliant scalairement les deux membres de (3-80) par $e_m(t)$, on déduit que

$$\begin{aligned} x_m &= \langle e_m, x \rangle \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(\tau) e^{-jm\omega_T \tau} d\tau. \end{aligned} \quad (3-81)$$

Les coefficients x_m de la série de Fourier sont donc les projections de $x(t)$ sur les fonctions $e_m(t)$ et on constate facilement que $x_{-m} = \bar{x}_m$ et que

$$x_{-m}e_{-m}(t) + x_m e_m(t) = 2|x_m| \cos(m\omega_T t + \varphi_m)$$

où φ_m est l'argument de x_m . Le module de x_m est la moitié de l'amplitude de l'harmonique m de $x(t)$ et son argument est la phase de cet harmonique. D'autre part, d'après (3-80), le produit scalaire de $x(t)$ par lui-même donne :

$$\langle x, x \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \bar{x}(\tau)x(\tau)d\tau = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} |x_n|^2.$$

Tenant compte de la définition (3-78) de la norme $\mathcal{L}_2$ des signaux appliquée à pour une fonction $x(t)$ nulle à l'extérieur de l'intervalle $[-T/2, T/2]$, l'équation précédente s'écrit,

$$\|x\|_2^2 = T \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} |x_n|^2. \quad (3-82)$$

D'un autre côté, d'après l'égalité (3-80), $x(t)$ peut être vu dans l'espace $\mathcal{F}_T$ de base $\{e_n(t)\}$ comme un vecteur de composantes x_n . Par analogie avec la définition (3-65) la norme- ∞ :

$$\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|. \quad (3-83)$$

Supposons maintenant que $T \rightarrow \infty$ c'est-à-dire que la fonction $x(t)$ est définie sur tout l'axe des réels. Dans ce cas $\omega_T = 2\pi/T$ tend vers une fréquence infiniment petite $d\omega$ et, pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, il existe un entier m tel que $m\omega_T \approx \omega$. De l'équation (3-81) on déduit que

$$Tx_m \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = x(j\omega) \quad (3-84)$$

où $x(j\omega)$ est la transformée de Fourier de $x(t)$. Ainsi, pour un signal de domaine infini, $x(j\omega)$ a la même interprétation que x_m pour un signal de domaine fini. En particulier, $x(j\omega)$ représente, par son module et son argument, l'amplitude et la phase de l'harmonique de fréquence ω de $x(t)$.

D'autre part, en posant $d\omega = 2\pi/T$, on a :

$$T \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} |x_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} |Tx_n|^2 d\omega,$$

Tenant compte de (3-78), (3-82) et (3-84) et de la définition de l'intégrale de Riemann, on déduit que pour un signal $x(t) \in \mathcal{C}$, on a :

$$\|x\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |x(j\omega)|^2 d\omega \quad (3-85)$$

C'est l'égalité de Parseval qui permet de calculer la norme $\mathcal{L}_2$ d'un signal temporel à partir de sa transformée de Fourier. D'un autre côté, en remplaçant x_n par $x(j\omega)$, la définition (3-83) devient pour un signal défini sur tout $\mathbb{R}$

$$\|x\|_\infty = \sup_{\omega} |x(j\omega)|. \quad (3-86)$$

À ne pas confondre cette norme avec la norme $\mathcal{L}_\infty$ définie par (3-79).

Ce qui précède peut être étendu à des signaux vectoriels. Au lieu de (3-85) la norme $\mathcal{L}_2$ d'un signal $x(t) \in \mathbb{R}^n$ devient :

$$\begin{aligned} \|x\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^T(t)x(t)dt, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^*(j\omega)x(j\omega)d\omega, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|x(j\omega)\|^2 d\omega \end{aligned} \quad (3-87)$$

(égalité de Parseval pour les signaux vectoriels)

et au lieu de (3-86), la norme- ∞ de $x(t) \in \mathbb{R}^n$ se définit par

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty &= \sup_{\omega} \|x(j\omega)\| \\ &= \sup_{\omega} \sqrt{x^*(j\omega)x(j\omega)} \end{aligned} \quad (3-88)$$

À partir de ces notions, nous allons définir deux normes pour les matrices de transfert. Une première-

re norme, désignée par $\mathcal{H}_2$, est basée sur l'égalité (3-87) et une autre, désignée par $\mathcal{H}_\infty$, est une extension de l'égalité (3-88).

Norme $\mathcal{H}_2$

Nous savons que la réponse d'un système à une impulsion de Dirac appliquée à sa $k^{\text{ème}}$ entrée est donnée par la $k^{\text{ème}}$ colonne $\mathbf{g}_{\bullet k}(t)$ de sa réponse impulsionnelle $G(t)$. D'après l'égalité de Parseval (3-87), la norme $\mathcal{L}_2$ de $\mathbf{g}_{\bullet k}(t)$ vérifie :

$$\begin{aligned}\|\mathbf{g}_{\bullet k}\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{g}_{\bullet k}^T(t) \mathbf{g}_{\bullet k}(t) dt, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{g}_{\bullet k}^*(j\omega) \mathbf{g}_{\bullet k}(j\omega) d\omega.\end{aligned}\quad (3-89)$$

En général, $\|\mathbf{g}_{\bullet k}\|_2^2$ tend vers l'infini si $\mathbf{g}_{\bullet k}(t)$ et $\mathbf{g}_{\bullet k}(s)$ ne tendent pas vers 0 quand t et s tendent vers l'infini. Pour cette raison, nous supposons que G est stable et strictement propre.

La norme $\mathcal{H}_2$ d'une fonction de transfert $G(s)$ stable et strictement propre est la moyenne quadratique des normes $\mathcal{L}_2$ de ses colonnes et on écrit :

$$\begin{aligned}\|G\|_2 &= \sqrt{\sum_{k=1}^p \|\mathbf{g}_{\bullet k}(t)\|_2^2} \\ &= \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^p \mathbf{g}_{\bullet k}^*(j\omega) \mathbf{g}_{\bullet k}(j\omega) d\omega \right]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Sachant que la trace d'une matrice est la somme de ses éléments diagonaux, les égalités précédentes peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned}\|G\|_2 &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} \left[G^T(t) G(t) \right] dt \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} \left(G^*(j\omega) G(j\omega) \right) d\omega \right]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\quad (3-90)$$

Il est évident que $\|G\|_2 = \|G^T\|_2 = \|G^*\|_2$. D'autre part, la trace d'une matrice est la somme de ses valeurs propres λ_i et les valeurs propres de G^*G sont les carrés des valeurs singulières σ_i de G . D'où

$$\text{tr}(G^*G) = \sum \lambda_i(G^*G) = \sum \sigma_i^2.$$

À la place de (3-90), on peut donc écrire :

$$\|G\|_2 = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_i \sigma_i^2(G(j\omega)) d\omega \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3-91)$$

D'après cette égalité, la norme $\mathcal{H}_2$ d'une fonction de transfert $G(s)$ peut être vue comme la moyenne quadratique de ses valeurs singulières intégrées sur l'ensemble des fréquences. Elle tient donc compte de toutes les valeurs singulières pour toutes les fréquences.

Une autre interprétation de la norme $\mathcal{H}_2$ concerne la réponse du système à un bruit blanc unitaire $b(t)$ vérifiant

$$E[b(\tau_1) b^T(\tau_2)] = I \delta(\tau_1 - \tau_2).$$

Le système est donc soumis à des entrées indépendantes (ou non corrélées) chacune étant un bruit blanc de puissance 1. Déterminons la puissance moyenne P de la réponse $y_b(s) = G(s)b(s)$. On a :

$$\begin{aligned}P &= E[y_b^T(t) y_b(t)] = \text{tr} \left\{ E[y_b(t) y_b^T(t)] \right\} \\ &= \text{tr} \left\{ E \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(t - \tau_1) b(\tau_1) b^T(\tau_2) G^T(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \right] \right\} \\ &= \text{tr} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(t - \tau_1) E[b(\tau_1) b^T(\tau_2)] G^T(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \right\} \\ &= \text{tr} \int_{-\infty}^{\infty} G(t - \tau) G^T(t - \tau) d\tau = \|G\|_2^2.\end{aligned}$$

Donc

$$E(\|y_b\|_2^2) = \|G\|_2^2. \quad (3-92)$$

Par conséquent, le carré de la norme $\mathcal{H}_2$ d'un système est la puissance moyenne de sa réponse à des bruits blancs unitaires.

Remarque. La notation $\|G\|_2$ désigne ici la norme $\mathcal{H}_2$ de la « fonction de transfert » $G(s)$ est non pas

la norme-2 ($\bar{\sigma}[G(s)]$) de la « matrice » $G(s)$, valeur de la fonction de transfert au point s . Pour éviter cette confusion, la norme-2 d'une matrice G sera désignée par $\|G\|$ sans l'indice 2.

EXERCICE 3-13

Calculer de deux manières la norme $\mathcal{H}_2$ de

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+2} & \frac{1}{(s+1)^2} \end{bmatrix}.$$

Calcul de $\mathcal{H}_2$

Soit $\Gamma = (A, B, C, 0)$ une réalisation minimale d'une fonction de transfert $G(s)$ stable et strictement propre (conditions de la norme $\mathcal{H}_2$). D'après (3-90) et sachant que $G(t) = Ce^{At}B$, on a :

$$\begin{aligned} \|G\|_2^2 &= \int_0^\infty \text{tr} \left[G^T(t)G(t) \right] dt, \\ &= \text{tr} \int_0^\infty \left(B^T e^{A^T t} C^T \right) \left(C e^{At} B \right) dt, \\ &= \text{tr} \left[B^T \left(\int_0^\infty e^{A^T t} C^T C e^{At} dt \right) B \right]. \end{aligned}$$

D'où

$$\|G\|_2^2 = \text{tr} (B^T Y B) \quad (3-93)$$

où Y est le gramien d'observabilité défini à la section 1-5 et qui vérifie l'équation de Liapunov :

$$A^T Y + Y A = -C^T C.$$

De même, la norme $\mathcal{H}_2$ peut être exprimée en fonction du gramien de contrôlabilité X :

$$\begin{aligned} \|G\|_2^2 &= \int_0^\infty \text{tr} \left[G(t)G^T(t) \right] dt \\ &= \text{tr} \int_0^\infty \left(C e^{At} B \right) \left(B^T e^{A^T t} C^T \right) dt \\ &= \text{tr} \left[C \left(\int_0^\infty e^{At} B B^T e^{A^T t} dt \right) C^T \right] = \text{tr} (C X C^T) \end{aligned}$$

où X vérifie l'équation de Liapunov :

$$AX + XA^T = -BB^T.$$

Exemples 3-5

Considérons un système monovarié de fonction de transfert

$$G(s) = \frac{2s+1}{s^2+s+1}.$$

Sa réalisation en forme de contrôlabilité est

$$G \leftarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 0 \end{array} \right).$$

Le gramien $X = \{p_{ij}\}$ vérifie l'équation de Liapunov :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

dont la solution est

$$X = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

D'où

$$\|G\|_2^2 = \text{tr} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \frac{5}{2}.$$

Pour un système multivariable, ce calcul devient long mais il peut être effectué rapidement par Matlab utilisant la fonction «normh2» :

```
>> n = [2 1]; d = [1 1 1];
>> sys = tf(n, d);
>> normh2(sys)
```

ans = 1.5811.

Norme $\mathcal{H}_\infty$

Nous avons vu que $\bar{\sigma}[G(j\omega)]$ est le plus grand gain en amplitude d'un système stable de fonction de transfert $G(s)$ quand on lui applique des entrées sinusoïdales de même fréquence ω . D'une manière plus claire, pour des entrées u de composantes sinusoïdales de même fréquence ω (voir 3-21),

$$\bar{\sigma}[G(j\omega)] = \max_u \frac{\sqrt{\sum b_i^2}}{\sqrt{\sum a_i^2}}$$

où les a_i sont les amplitudes des composantes u_i de l'entrée u et les b_i les amplitudes des composantes (sinusoïdales) y_i de la sortie $y = Gu$.

La norme $\mathcal{H}_\infty$ de la fonction de transfert $G(s)$ est son plus grand gain en amplitude sur l'ensemble de toutes les fréquences. En d'autres termes,

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega} \bar{\sigma}[G(j\omega)]. \quad (3-94)$$

En particulier, si G ne comporte qu'une seule colonne $x(j\omega)$, sa seule valeur singulière est $[x^*(j\omega)x(j\omega)]^{1/2}$ et on retrouve la définition (3-88) de la norme- ∞ d'un signal vectoriel.

EXERCICE 3-14

Calculer la norme $\mathcal{H}_\infty$ de

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+2} & \frac{1}{(s+1)^2} \end{bmatrix}.$$

À noter que la norme $\mathcal{H}_2$ est une mesure du gain moyen du système sur l'ensemble des fréquences tandis que la norme $\mathcal{H}_\infty$ est une mesure du gain seulement à la fréquence ω_m où il est maximum.

Du point de vu temporel, $\|G\|_\infty$ est aussi le plus grand gain en norme-2 pour des entrées quelconques appartenant à l'espace $\mathcal{L}_2^p$. En effet d'après Parseval :

$$\begin{aligned} \|y\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|y(j\omega)\|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|G(j\omega)u(j\omega)\|^2 d\omega \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\sigma}^2[G(j\omega)] \|u(j\omega)\|^2 d\omega \\ &\leq \frac{\|G\|_\infty^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|u(j\omega)\|^2 d\omega \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \quad \|G\|_\infty \geq \sup_{u \in \mathcal{L}_2^p} \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2}. \quad (3-95)$$

Pour démontrer l'égalité, considérons une suite de fréquences ω_i telles que $\lim_i \bar{\sigma}[G(j\omega_i)] = \|G\|_\infty$.

L'image par $G(j\omega_i)$ du vecteur singulier $u^i(j\omega_i)$ relatif à la valeur singulière $\bar{\sigma}[G(j\omega_i)]$ est

$$y^i(j\omega_i) = G(j\omega_i)u^i(j\omega_i)$$

$$\text{avec} \quad \|y^i(j\omega_i)\| = \bar{\sigma}[G(j\omega_i)] \|u^i(j\omega_i)\|.$$

Les vecteurs $u^i(j\omega_i)$ et $y^i(j\omega_i)$ caractérisent des fonctions sinusoïdales $u^i(t)$ et $y^i(t)$ pour lesquelles la première inégalité de la démonstration de (3-95) doit être remplacée par une égalité. Par passage à la limite on obtient :

$$\|G\|_\infty = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\|y^i\|_2}{\|u^i\|_2}$$

ce qui permet de remplacer l'inégalité (3-95) par l'égalité :

$$\|G\|_\infty = \sup_{u \in \mathcal{L}_2^p} \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2}. \quad (3-96)$$

D'autre part, contrairement à la norme $\mathcal{H}_2$, la norme $\mathcal{H}_\infty$ jouit de l'inégalité multiplicative comme c'est le cas pour les normes matricielles induites. En effet, sachant que pour une fréquence ω donnée

$$\bar{\sigma}[G_1(j\omega)G_2(j\omega)] \leq \bar{\sigma}[G_1(j\omega)] \bar{\sigma}[G_2(j\omega)],$$

on a :

$$\begin{aligned} \|G_1G_2\|_\infty &\leq \sup_{\omega} \{ \bar{\sigma}[G_1(j\omega)] \bar{\sigma}[G_2(j\omega)] \} \\ &\leq \sup_{\omega} \bar{\sigma}[G_1(j\omega)] \sup_{\omega} \bar{\sigma}[G_2(j\omega)] \\ &= \|G_1\|_\infty \|G_2\|_\infty. \end{aligned}$$

C'est surtout à cause de cette dernière propriété que la norme $\mathcal{H}_\infty$ est plus convenable que la norme $\mathcal{H}_2$ pour l'étude de la robustesse qui sera envisagée au chapitre suivant.

Calcul de $\mathcal{H}_\infty$

Nous avons vu que la norme $\mathcal{H}_2$ de G peut être calculée à partir d'une expression algébrique

comme celle donnée par (3-93). Malheureusement ce n'est pas le cas pour la norme $\mathcal{H}_\infty$, mais la propriété suivante permet de trouver une borne supérieure à cette norme et nous verrons qu'elle servira à trouver une valeur approximative de $\|G\|_\infty$. Posons

$$G^*(s) = G^T(-s). \quad (3-97)$$

et démontrons que

- $\|G\|_\infty < \gamma \in \mathbb{R}^+$ si et seulement si la fonction de transfert $G_H(s) = [\gamma^2 I - G^*(s)G(s)]^{-1}$ n'a pas de pôles sur l'axe des imaginaires.

Preuve

$$\begin{aligned} \|G\|_\infty < \gamma &\Leftrightarrow \bar{\sigma}[G(j\omega)] < \gamma \quad \forall \omega \\ &\Leftrightarrow \sigma_i[G(j\omega)] < \gamma \quad \forall \omega, \forall i \\ &\Leftrightarrow \lambda_i(G^*(j\omega)G(j\omega)) < \gamma^2 \quad \forall \omega, \forall i \\ &\Leftrightarrow \lambda_i(\gamma^2 I - G^*(j\omega)G(j\omega)) > 0 \quad \forall \omega, \forall i \\ &\Leftrightarrow \det G_H^{-1}(j\omega) \neq 0 \quad \forall \omega \\ &\Leftrightarrow [G_H^{-1}(j\omega)u = 0 \Rightarrow u = 0] \quad \forall \omega \\ &\Leftrightarrow G_H^{-1}(s) \text{ n'a pas de zéros sur } j\omega \end{aligned}$$

Donc, sachant que les zéros d'une fonction de transfert inversible sont les pôles de son inverse (voir section 1-6), $\|G\|_\infty < \gamma \Leftrightarrow G_H(s)$ n'a pas de pôles sur l'axe des imaginaires. ■

Rappelons qu'au chapitre 1 nous avons montré que si $(A, B, C, 0)$ est une réalisation d'une fonction de transfert $G(s)$ strictement propre, la réalisation de $G_H(s)$ est (voir 1-26)

$$G_H(s) \leftarrow \left(\begin{array}{cc|c} A & BB^T/\gamma^2 & B/\gamma^2 \\ -C^T C & -A^T & 0 \\ \hline 0 & B^T/\gamma^2 & I/\gamma^2 \end{array} \right)$$

On en déduit que $\|G\|_\infty < \gamma$ si et seulement si la matrice hamiltonienne

$$H_\gamma = \begin{pmatrix} A & BB^T/\gamma^2 \\ -C^T C & -A^T \end{pmatrix} \quad (3-98)$$

n'a pas de valeurs propres sur l'axe des imaginaires.

Se basant sur cette propriété, nous pouvons déterminer une valeur approchée de la norme $\mathcal{H}_\infty$ d'un système en procédant par *dichotomies* :

- 1) Initialement, $\gamma_0 = 0$ et γ_1 est de grande valeur.
- 2) On pose $\gamma = (\gamma_0 + \gamma_1)/2$.
- 3) On calcule les valeurs propres de la matrice H_γ définie par (3-98).
- 4) Si aucune valeur propre n'est une imaginaire pure, on pose $\gamma_1 = \gamma$ et on retourne à 2).
- 5) Si l'une des valeurs propres est une imaginaire pure, on pose $\gamma_0 = \gamma$ et on retourne à 2).
- 6) On s'arrête quand les valeurs successives de γ deviennent très voisines.

Ces itérations s'effectuent rapidement par l'instruction « normhinf ». Pour le système de l'exemple 3-5, on obtient :

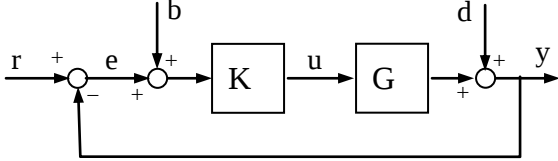
```
>> normhinf(sys)
```

```
ans = 2.2467.
```

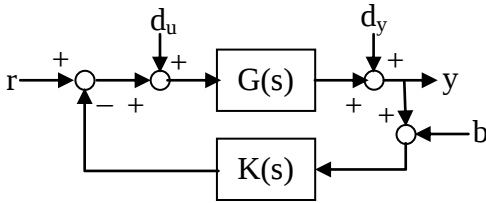
AUTRES EXERCICES ET COMPLÉMENTS

3-15. Vérifier que $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_\infty$, $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ sont effectivement des normes.

3-16. Supposons que les normes $\mathcal{L}_2$ de r , d et b sont respectivement inférieures à r_M , d_M et b_M . Quelles conditions doit satisfaire $\|K\|_\infty$ pour s'assurer que la $\|u\|_2$ sera inférieure à u_M .



3-17. Quelles sont les fonctions de transfert qui doivent être stables pour que le système suivant soit intérieurement stable ?



Analyser le cas où

$$G(s) = (s + 2)/(s - 1) \text{ et } K(s) = (s - 1)/(s + 1).$$

3-18. Pour étudier l'effet de r sur l'erreur $e = r - y$ du système de la figure précédente, on suppose que $d_u = d_y = b = 0$. Montrer que $\|e(j\omega)\| \leq \delta \|r(j\omega)\| \forall \omega$ si

$$\underline{\sigma}(GK) \geq \frac{\overline{\sigma}[GK + (I - G)]}{\delta} + 1.$$

3-19. Soit G une matrice carrée telle que $\overline{\sigma}(G) < 1$. Montrer que $(I - G)$ est inversible et que

$$(I - G)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} G^k.$$

3-20. Est-ce que $\|G^*\|_\infty = \|G\|_\infty$ et $\|G^*\|_2 = \|G\|_2$?

Est-ce que $\|G^*G\|_\infty = \|G\|_\infty^2$ et $\|G^*G\|_2 = \|G\|_2^2$?

Donner un exemple pour montrer que l'inégalité multiplicative $\|G_1G_2\|_2 \leq \|G_1\|_2\|G_2\|_2$ n'est pas toujours vraie.

3-21. On suppose que le système de l'exercice 3-16 est intérieurement stable.

a) Si G a un zéro z à prp de direction de sortie y_z , montrer que z est aussi un zéro de la sensibilité complémentaire T de direction de sortie y_z .

b) Si G a un pôle p à prp, montrer que p est un zéro de la sensibilité S .