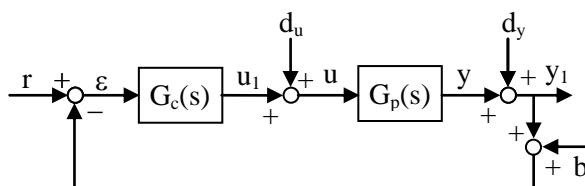


# Chapitre 3

## COMMANDE DES SYSTÈMES LINÉAIRES PAR RETOUR DE SORTIE

La structure de base d'un système de commande par retour de sortie est représentée à la figure 3-1 où  $G_p(s)$  est la fonction de transfert du procédé à commander constitué de l'actionneur, de l'objet commandé proprement dit et du capteur. Les perturbations à l'entrée et à la sortie de  $G_p(s)$  ainsi que le bruit qui accompagne généralement la mesure de la sortie sont représentés respectivement par les signaux  $d_u$ ,  $d_y$  et  $b$ . La structure plus performante comportant une boucle de retour de l'état de  $G_p(s)$  ne sera pas envisagée dans ce chapitre mais détaillée dans la partie de la commande multi-variable.



**Fig. 3-1** Structure de base d'un système de commande par retour de sortie.

En supposant que le modèle  $G_p(s)$  du procédé est connu, il s'agit dans ce chapitre de développer les techniques classiques de conception d'un organe de commande  $G_c(s)$  pouvant assurer au système global un bon fonctionnement. Ceci revient à satisfaire les critères suivants :

1) La stabilité. C'est l'exigence primordiale commune à tous les systèmes de commande car un système instable se détruit ou il est spontanément arrêté par ses dispositifs de protection.

2) La performance. La réponse effective  $y$  doit se rapprocher autant que possible de la réponse désirée  $r$ , rapidement et sans trop d'oscillations. En plus, le

système doit réduire au minimum les effets des perturbations  $d_u$  et  $d_y$  et du bruit  $b$  sur la réponse.

3) La robustesse. Le fonctionnement du système de commande doit rester acceptable lorsque la fonction de transfert nominale  $G_p(s)$  ne représente pas avec précision la réalité physique du procédé ou quand celui-ci s'écarte, dans certaines limites, de  $G_p(s)$  par usure ou à cause d'une mauvaise maintenance.

Nous commençons par préciser la signification de ces critères avant d'aborder la recherche d'un organe de commande pouvant les satisfaire.

### 3-1 STABILITÉ

Nous avons vu au chapitre précédent qu'une fonction de transfert  $G(s)$  est stable si et seulement si tous ses pôles  $p_i$  ont des parties réelles strictement négatives (prsn). Ceci signifie que si le système  $G(s)$  est initialement inerte (état initial nul), sa réponse  $g(t)$  à une impulsion de Dirac  $\delta(t)$  (dont la transformée de Laplace est égale à 1) converge vers 0 quand le temps  $t$  tend vers l'infini :

$$G(s) \text{ stable} \Leftrightarrow \Re(p_i) < 0 \forall i \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0. \quad (3-1)$$

La stabilité peut avoir d'autres définitions. Nous donnons ici, pour des systèmes linéaires monovariables et invariants, celles de la stabilité asymptotique et de la stabilité BIBO et nous montrons qu'elles sont, sous certaines conditions, équivalentes à (3-1). La stabilité dite de Liapunov, notion plus générale que les précédentes, sera définie ailleurs.

## 2 Commande des systèmes linéaires par retour de sortie

**Stabilité asymptotique.** À la fonction de transfert

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

correspond l'équation différentielle

$$\sum_{i=0}^2 a_i y^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^2 b_i u^{(i)}(t).$$

où  $h^{(i)}$  désigne la  $i^{\text{ème}}$  dérivée d'une fonction  $h$ . Si l'entrée  $u$  est nulle on dit que la réponse  $y$  est *libre*, dépendant seulement des conditions initiales  $y(0) = y_0$  et  $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$ . Dans ce cas, la transformée de Laplace de l'équation précédente s'écrit

$$a_2[s^2 y(s) - s y_0 - \dot{y}_0] + a_1[s y(s) - y_0] + a_0 y(s) = 0.$$

D'où  $y(s) = \frac{a_2 y_0 s + (a_2 \dot{y}_0 + a_1 y_0)}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$

a le même dénominateur que celui de la fonction de transfert  $G(s)$  du système considéré. Par conséquent, en supposant que des pôles de  $G(s)$  ne soient pas simplifiés par des zéros,  $y(s)$  a les mêmes pôles  $p_i$  que  $G(s)$  d'où,  $g(t) \rightarrow 0 \Leftrightarrow y(t) \rightarrow 0$ . Ceci se généralise directement à un système  $G(s)$  linéaire invariant d'ordre quelconque : Quand ses pôles instables ne sont pas simplifiés par des zéros alors  $G(s)$  est stable selon la définition (3-1) si et seulement s'il est *asymptotiquement stable* c.à.d. si sa réponse libre tend vers 0 quelles que soient les conditions initiales.

### Exemple 3-1

Soit  $G(s) = \frac{s-1}{s^2-1} = \frac{1}{s+1}$ .

Comme sa réponse impulsionnelle  $g(t) = e^{-t} \underset{t \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0$ ,

$G(s)$  est stable. Mais la transformée de Laplace de sa réponse libre quand les conditions initiales sont  $y(0)=1$  et  $\dot{y}(0)=0$  est

$$y(s) = \frac{a_2 y_0 s}{(s-1)(s+1)} = \frac{1}{2(s-1)} + \frac{1}{2(s+1)}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2} \left( e^t + e^{-t} \right) \underset{t \rightarrow \infty}{\rightarrow} \infty.$$

Bien que  $G(s)$  soit stable, le système n'est pas asymptotiquement stable car le pôle instable 1 de  $G(s)$  est simplifié par le zéro.

**Stabilité BIBO.** Un système est BIBO stable si sa réponse à toute entrée bornée est bornée (Bounded Input, Bounded Output).

On a d'abord la propriété suivante.

**P1.** Un système linéaire est BIBO stable si et seulement si sa réponse impulsionnelle  $g(t)$  est absolument intégrable, c.à.d. si

$$\int_0^\infty |g(t)| dt < \infty. \quad (3-2)$$

#### Preuve

a) Nous savons que la réponse  $y(t)$  d'un système linéaire à une entrée  $u(t)$ , nulle pour  $t < 0$ , est donnée à l'instant  $t$  par le produit de convolution

$$y(t) = \int_0^t g(\tau) u(t-\tau) d\tau = \int_0^\infty g(\tau) u(t-\tau) d\tau.$$

Si  $|u(t)|$  est borné par un nombre positif  $u_M$ , l'équation précédente et l'inégalité (3-2) impliquent

$$|y(t)| \leq \int_0^\infty |g(\tau)| |u(t-\tau)| d\tau \leq u_M \int_0^\infty |g(\tau)| d\tau < \infty \quad \forall t,$$

d'où le système est BIBO stable.

b) Inversement, montrons par l'absurde que si le système est BIBO stable l'inégalité (3-2) est vraie. Dans ce but, choisissons, pour  $t$  fixé, l'entrée définie par  $u(t-\tau) = \text{sgn}[g(\tau)]$  pour  $0 \leq \tau \leq t$  et nulle ailleurs. Il est évident que cette entrée est bornée et sa réponse à l'instant  $t$  est

$$y(t) = \int_0^t g(\tau) \text{sgn}[g(\tau)] d\tau = \int_0^t |g(\tau)| d\tau.$$

Si (3-2) n'était pas vraie, on aurait

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \int_0^\infty |g(\tau)| d\tau = \infty$$

ce qui est en contradiction avec la stabilité BIBO ■

### 3 Commande des systèmes linéaires par retour de sortie

Se basant sur la propriété P1, nous allons déduire la suivante.

**P2.** Un système linéaire invariant est stable au sens (3-1) si et seulement s'il est BIBO stable

#### Preuve

La condition (3-2) est suffisante puisque

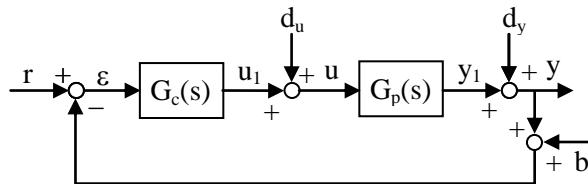
$$\int_0^{\infty} |g(t)| dt < \infty \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) \rightarrow 0.$$

Pour montrer sa nécessité remarquons que  $g(t)$  est une somme finie de termes de la forme  $C_{ik} t^k e^{p_i t}$  où  $p_i$  est un pôle de  $G(s)$  et  $C_{ik}$  une constante. Par conséquent, en posant  $p_i = -\sigma_i + j\omega_i$  et sachant que  $|e^{j\omega_i t}| = 1$ , on a :

$$\int_0^{\infty} |g(t)| dt = \sum_{\text{finie}} |C_{ik}| \int_0^{\infty} t^k e^{-\sigma_i t} dt.$$

Quand  $-\sigma_i = \Re(p_i) < 0 \forall i$ , chaque intégral au second membre est finie d'où la condition (3-1) implique (3-2) ■

**Stabilité interne.** Reprenons de nouveau la structure de base d'un système de commande par retour de sortie (fig. 3-1').



**Fig. 3-1'** Structure de base d'un système de commande par retour de sortie.

Si les entrées exogènes (externes)  $r$ ,  $d_u$ ,  $d_y$  et  $b$  sont bornées, non seulement la sortie  $y$  ne doit pas diverger mais aussi tout autre signal intérieur à la boucle. Dans ce cas on dit que le système de commande est *intégralement stable*.

La stabilité interne signifie que l'effet de toute entrée exogène bornée sur tout point de la boucle est borné (stabilité BIBO entre ces deux points). Or, quand  $r$ ,  $b$ ,  $d_u$  et  $d_y$  sont bornées, si  $u$  et  $y$  sont aussi

bornés, il en est de même des autres signaux internes puisque  $y_1 = y - d_y$ ,  $u_1 = u - d_u$  et  $\varepsilon = r - y - b$ . D'un autre côté, l'effet de  $d_y$  seul sur le système est le même (au signe près) que l'effet de  $r$  seul ou de  $b$  seul. Pour tester la stabilité interne, il suffit donc d'examiner seulement les effets des perturbations  $d_u$  et  $d_y$  sur l'entrée  $u$  et la sortie  $y$  du procédé  $G_p(s)$ .

À partir de la figure 3-1', il est facile de vérifier que  $u$  et  $y$  sont liés à  $d_u$  et  $d_y$  par les relations :

$$\begin{aligned} u &= Sd_u - G_c S d_y, \\ y &= G_p S d_u + S d_y, \end{aligned} \quad (3-3)$$

où  $S = (I + G)^{-1}$  avec  $G = G_c G_p$  est la fonction de sensibilité définie au chapitre précédent.

Par conséquent, le système de commande est intérieurement stable si chacune des 3 fonctions de transfert  $S$ ,  $G_c S$  et  $G_p S$  apparaissant dans (3-3) est stable. Cependant, on démontre que si, en effectuant le produit  $G_c G_p$ , on ne simplifie pas les pôles et les zéros à partie réelle positive (prp), les 3 fonctions de (3-3) seront stables si et seulement si une seule de ces fonctions de transfert, disons  $S$ , est stable.

#### Exemple 3-2

Supposons que

$$G_c(s) = \frac{s-1}{s} \quad \text{et} \quad G_p(s) = \frac{1}{(s-1)(s+1)}.$$

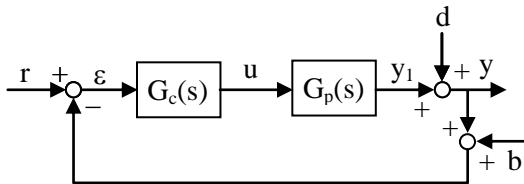
Si on ne simplifie pas  $(s-1)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} G &= \frac{s-1}{s(s-1)(s+1)} \quad S = \frac{s(s-1)(s+1)}{(s-1)(s^2+s+1)} \\ G_c S &= \frac{(s-1)^2(s+1)}{(s-1)(s^2+s+1)}, \quad G_p S = \frac{s(s-1)}{(s-1)^2(s^2+s+1)} \end{aligned}$$

et les 3 fonctions de transfert  $S$ ,  $G_c S$  et  $G_p S$  sont instables. Par contre, en simplifiant  $(s-1)$ , on constate que  $S$  et  $G_c S$  deviennent stables tandis que  $G_p S$  reste instable. La réponse  $y$  diverge vers l'infini pour la moindre perturbation  $d_u$  à l'entrée du procédé.

## 3-2 PERFORMANCE

Le schéma de la figure 3-1' est équivalent à celui de la figure 3-2 où  $d = d_y + G_p(s)d_u$  est l'effet global des deux perturbations  $d_y$  et  $d_u$  sur la sortie,



**Fig. 3-2** Structure de base équivalente d'un système de commande par retour de sortie.

L'objectif principal est de déterminer un organe de commande  $G_c(s)$  qui minimise l'écart  $e$  entre la référence  $r$  et la sortie  $y$  :  $e = r - y$ . Or,

$$\begin{aligned} y &= d + G_p u = d + G_p G_c \varepsilon, \\ &= d + G_p G_c (r - y - b). \end{aligned}$$

En remplaçant  $r - y$  par  $e$  et en regroupant les termes, on déduit que la transformée de Laplace de  $e$  est liée à celles des entrées  $r$ ,  $d$  et  $b$  par l'équation

$$e(s) = S(s)[r(s) - d(s)] + T(s)b(s) \quad (3-4)$$

où

$$S(s) = \frac{1}{1 + G(s)}, \quad T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \quad (3-5)$$

avec  $G = G_p G_c$ .

$S(s)$  est la *sensibilité* du système et  $T(s)$ , qui est la fonction de transfert entre  $r$  et  $y$ , est appelée *sensibilité complémentaire* car

$$S(s) + T(s) = 1 \quad \forall s. \quad (3-6)$$

On dit que le système est performant si la réponse  $y$  suit les variations de la référence  $r$  malgré la présence des perturbations  $d$  et des bruits de mesure  $b$ . En d'autres termes les effets de  $r$ ,  $d$  et  $b$  sur  $|e|$  doivent être minimum. Or, en remplaçant  $s$  par  $j\omega$  dans la transformée de Laplace, on obtient la transformée de Fourier

$$e(j\omega) = \int_0^\infty e(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (3-7)$$

La transformée de Fourier inverse,

$$e(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e(j\omega)e^{j\omega t} d\omega, \quad (3-8)$$

permet de reconstituer  $e(t)$  à partir de  $e(j\omega)$ .

De (3-7) et (3-8) on déduit les inégalités

$$|e(j\omega)| \leq \int_0^\infty |e(t)| dt \quad \forall \omega,$$

$$|e(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |e(j\omega)| d\omega \quad \forall t.$$

Par conséquent, pour que  $|e(t)|$  soit petit  $\forall t$ , il faut et il suffit que  $|e(j\omega)|$  le soit  $\forall \omega$ .

Déterminons alors les conditions pour que les effets de  $r$ ,  $d$  et  $b$  sur  $|e(j\omega)|$  soient faibles.

**Poursuite.** Un système de commande a une bonne poursuite si, dans l'absence des perturbations  $d$  et des bruits de mesure  $b$ , l'écart  $e$  entre la référence  $r$  et la réponse  $y$  est faible, c.à.d. si, pour  $d = b = 0$ ,  $|e(j\omega)|$  est petit  $\forall \omega$ . Comme d'après (3-4)

$$|e(j\omega)| = |S(j\omega)| \|r(j\omega)\|, \quad (3-9)$$

on a une bonne poursuite si  $|S(j\omega)| \ll 1$  dans l'ensemble  $\Omega_r$  des fréquences pour lesquelles  $|r(j\omega)|$  a une valeur significative (non négligeable). D'après la définition (3-5) de  $S$ , la bonne poursuite sera garantie si le gain de la chaîne directe  $|G(j\omega)| \gg 1$  pour les fréquences appartenant à  $\Omega_r$ .

En particulier, l'erreur stationnaire est d'autant plus petite que le gain  $|G(j\omega)|$  est grand à faibles fréquences. Pour le voir d'une manière plus explicite, le théorème de la valeur finale appliqué à l'équation (3-4) avec  $b = d = 0$  montre que l'écart  $e(t)$  tend vers

$$e_s = \lim_{s \rightarrow 0} s e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s S(s) r(s) \quad (3-10)$$

quand  $t \rightarrow \infty$ . Cette valeur limite de  $e$  dépend de la rapidité de variation de la référence  $r$  et ceci est caractérisé par les cas particuliers suivants.

## 5 Commande des systèmes linéaires par retour de sortie

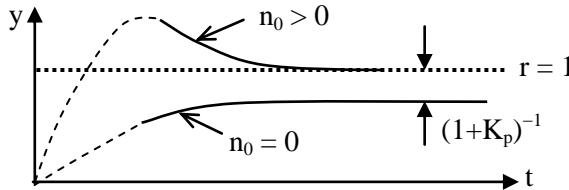
a)  $r(t) = 1$  (r ne varie pas). L'écart  $e_s$  sera appelé *erreur stationnaire de position* et désigné par  $e_{sp}$ . Il est donné par

$$e_{sp} = \lim_{s \rightarrow 0} s S(s) \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)}. \quad (3-11)$$

On dit que la fonction de transfert  $G(s)$  est de type  $n_0$  si cette fonction a un pôle 0 de multiplicité  $n_0$ . De la relation (3-11) on déduit que

$$e_{sp} = \begin{cases} 1/(1+K_p) & \text{si } n_0 = 0 \\ 0 & \text{si } n_0 \geq 1 \end{cases} \quad (3-12)$$

où  $K_p = G(0)$  est appelé constante de l'erreur de position. Les deux cas (3-12) sont illustrés sur la figure 3-3.

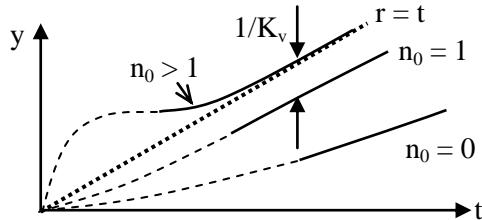


**Fig. 3-3** Allure de  $y(t)$  à l'infini quand  $r = 1$ .

b)  $r(t) = t$  (r varie avec une vitesse 1). L'écart  $e_s$  sera appelé *erreur stationnaire de vitesse* et désigné par  $e_{sv}$ . Il est donné par

$$e_{sv} = \lim_{s \rightarrow 0} s S(s) \frac{1}{s^2} = \frac{T}{\lim_{s \rightarrow 0} s G(s)} = \begin{cases} \infty & \text{si } n_0 = 0, \\ 1/K_v & \text{si } n_0 = 1, \\ 0 & \text{si } n_0 \geq 2 \end{cases} \quad (3-13)$$

et ceci est illustré par la figure 3-4.  $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s)$  est appelé constante de l'erreur de vitesse.

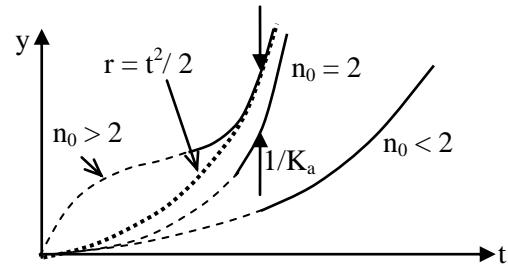


**Fig. 3-4** Allure de  $y(t)$  à l'infini quand  $r = t$ .

c)  $r(t) = t^2/2$  (r varie avec une accélération 1). L'écart  $e_s$  sera appelé *erreur stationnaire d'accélération* et désigné par  $e_{sa}$ . Il est donné par

$$e_{sa} = \lim_{s \rightarrow 0} s S(s) \frac{1}{s^3} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)} = \begin{cases} \infty & \text{si } n_0 \leq 1, \\ 1/K_a & \text{si } n_0 = 2, \\ 0 & \text{si } n_0 \geq 3 \end{cases} \quad (3-14)$$

et ceci est illustré par la figure 3-5.  $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)$  est appelé constante de l'erreur d'accélération.



**Fig. 3-5** Allure de  $y(t)$  à l'infini quand  $r = t^2/2$ .

### EXERCICE 3-1

La fonction de transfert du système commandé est  $G_p(s) = (s + 4)/(s^2 - 1)$  et celle de l'organe de commande est de la forme  $G_c(s) = k(s + c)/s$ . Représenter dans le plan  $(c, k)$  l'ensemble des points pour lesquels la boucle fermée sera stable et l'erreur stationnaire de vitesse est inférieure à 0.1.

**Rejet des perturbations.** Un système de commande a un bon rejet des perturbations si, pour une référence  $r = 0$  et dans l'absence des bruits de mesure  $b$ , l'écart  $e$  entre la référence  $r$  et la réponse  $y$  est faible, c.à.d. si, pour  $r = b = 0$ ,  $|e(j\omega)|$  est petit  $\forall \omega$ . Comme d'après (3-4)

$$|e(j\omega)| = |S(j\omega)| |d(j\omega)|, \quad (3-15)$$

et par comparaison avec (3-9), on a un bon rejet des perturbations si la même condition que pour la bonne poursuite,  $|G(j\omega)| \gg 1$ , est remplie dans l'ensemble  $\Omega_d$  des fréquences pour lesquelles  $|d(j\omega)|$  a une valeur significative. Si cette condition est vérifiée dans l'ensemble des fréquences  $\Omega_p = \Omega_r \cup \Omega_d$ , le système aura à la fois une bonne

## 6 Commande des systèmes linéaires par retour de sortie

poursuite et un bon rejet des perturbations et on dit qu'il est performant.

**Filtrage des bruits.** Un système de commande filtre les bruits si, pour une référence  $r = 0$  et dans l'absence des perturbations  $d$ , l'écart  $e$  entre la référence  $r$  et la réponse  $y$  est faible, c.à.d. si, pour  $r = d = 0$ ,  $|e(j\omega)|$  est petit  $\forall \omega$ . Comme d'après (3-4)

$$|e(j\omega)| = T(j\omega) \|b(j\omega)\|, \quad (3-16)$$

on a un bon filtrage des bruits si  $|T(j\omega)| \ll 1$  dans l'ensemble  $\Omega_b$  des fréquences pour lesquelles  $|b(j\omega)|$  a une valeur significative (non négligeable). Tenant compte de la définition (3-5) de  $T$ , le filtrage des bruits sera assuré si  $|G(j\omega)| \ll 1$  pour les fréquences appartenant à  $\Omega_b$ . Ceci est en contradiction avec la condition  $|G(j\omega)| \gg 1$  de la bonne performance. Heureusement en pratique  $\Omega_b \cap \Omega_p = \emptyset$  car, en général, les fréquences des bruits sont nettement plus élevées que celles contenues dans la référence  $r$  ou les perturbations  $d$ .

Ainsi la fonction de transfert  $G(s)$  de la chaîne directe (boucle ouverte) d'un système de commande bien conçu satisfait aux conditions suivantes :

- $|G(j\omega)| \gg 1$  dans  $\Omega_p$  (faibles fréquences),
- $|G(j\omega)| \ll 1$  dans  $\Omega_b$  (hautes fréquences).

### 3-3 ROBUSTESSE

La fonction de transfert nominale  $G(s)$  de la chaîne directe ne représente pas exactement le système réel à cause de l'imprécision dans la modélisation (hypothèses simplificatrices) ou à cause de l'usure (variation des valeurs des paramètres). Cet écart de  $G(s)$  de la réalité peut réduire la performance attendue ou même conduire à l'instabilité.

**Sensibilité et marge de stabilité.** Un système de commande est d'autant plus robuste que la fonction de transfert  $T$  entre  $r$  et  $y$  est moins sensible à la déviation de  $G$  de son expression nominale. Cette sensibilité, que nous désignons aussi par  $S$ , se définit par la variation relative de la fonction  $T$  par unité de variation relative de la fonction  $G$ . En d'autres termes,

$$S = \frac{dT/T}{dG/G}. \quad (3-17)$$

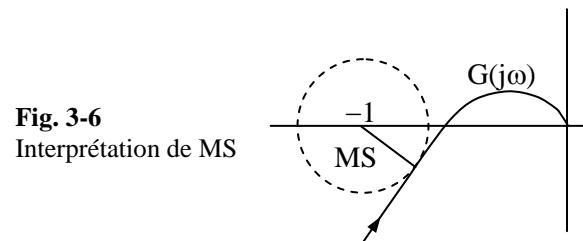
Sachant que  $T = G/(1 + G)$ , on déduit que

$$S = \frac{dT}{dG} \cdot \frac{G}{T} = \left[ \frac{(1+G)-G}{(1+G)^2} \cdot (1+G) \right] = \frac{1}{1+G}.$$

La sensibilité de  $T$  aux déviations de  $G$  a donc la même expression (3-5) que la sensibilité de l'écart  $e$  à la référence  $r$  ou à la perturbation  $d$  et c'est pour cette raison qu'elle est désignée par la même lettre  $S$ . Le système de commande est donc d'autant plus robuste que  $\max_{\omega} |S(j\omega)|$  est faible ou, ce qui revient au même, que

$$MS = \min_{\omega} |1 + G(j\omega)| \quad (3-18)$$

est grand. Comme le montre la figure 3-6, MS est la distance entre le point  $-1$  et la courbe de Nyquist  $G(j\omega)$ .



**Fig. 3-6**  
Interprétation de MS

Supposons que la boucle fermée est nominalement stable. Quand  $G$  s'écarte de la nominale, la stabilité sera maintenue tant que le nombre  $Z = P - N$  du critère de Nyquist reste nul et ne se modifie pas. Or, rarement  $P$  change de valeur, surtout quand les pôles de  $G(s)$  ne sont pas très voisins de l'axe des imaginaires. Par contre,  $N$  ne conserve sa valeur que si la courbe  $G(j\omega)$  de Nyquist reste d'un même côté par rapport au point  $-1$ . Par conséquent, le risque de déstabilisation à cause de la déviation de  $G$  est d'autant plus faible que la distance  $MS$  entre  $-1$  et la courbe  $G(j\omega)$  est grande.  $MS$  sera appelée la marge de stabilité du système (ou marge en module).

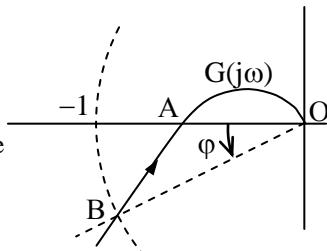
**Marges de gain et de phase.** Le calcul de la marge de stabilité  $MS$  définie par (3-18) n'est pas simple sauf dans des cas très particuliers. Pour cette raison, on préfère la remplacer par deux autres grandeurs, appelées marge de gain et marge de

## 7 Commande des systèmes linéaires par retour de sortie

phase, qui constituent ensemble une mesure de l'éloignement de la courbe  $G(j\omega)$  du point  $-1$ .

Pour définir ces marges considérons la figure 3-7 où  $G(j\omega)$  est la courbe de Nyquist de la chaîne directe à retour unitaire d'une boucle fermée nominalement stable et soient A et B les points d'intersection de cette courbe respectivement avec l'axe des réels et le cercle unité. Si  $G(j\omega)$  coupe l'axe des réels ou le cercle unité en plusieurs points, A et B désigneront les intersections les plus voisines du point  $-1$ .

**Fig. 3-7** Marges de stabilité



La marge de gain d'un système stable est le rapport  $1/|OA|$ , généralement exprimée en décibels :

$$MG = 20 \log_{10} \frac{1}{|OA|} \text{ dB} \quad (3-19)$$

et la marge de phase est l'angle  $\varphi$  entre l'axe des réels négatifs et le vecteur  $\overrightarrow{OB}$ , généralement exprimé en degrés :

$$MP = \arg(\overrightarrow{OB}) + 180^\circ \bmod 360^\circ. \quad (3-20)$$

$|MG|$  et  $|MP|$  sont d'autant plus grands que A et B sont éloignés de  $-1$  c.à.d. que le risque d'instabilité est faible. Il est généralement recommandé que la marge  $|MG|$  soit supérieure à  $6\text{db}$  ( $|OA| < 1/2$  ou  $> 2$ ) et que la marge  $|MP|$  soit supérieure à  $30^\circ$ .

À noter que  $|OA| = |G(j\omega_{cp})|$  où  $\omega_{cp}$  est la fréquence pour laquelle

$$\begin{aligned} \arg[G(j\omega_{cp})] &= (2k+1)180^\circ \\ \Leftrightarrow \text{Im}[G(j\omega_{cp})] &= 0 \text{ et } G(j\omega_{cp}) < 0 \end{aligned} \quad (3-21)$$

et  $\arg(\overrightarrow{OB}) = \arg[G(j\omega_{cg})]$  où  $\omega_{cg}$  est la fréquence pour laquelle

$$|G(j\omega_{cg})| = 1. \quad (3-22)$$

$\omega_{cp}$  est appelé la *fréquence de coupure de phase* et  $\omega_{cg}$  la *fréquence de coupure de gain*. Une fois ces fréquences sont calculées en résolvant les équations (3-21) et (3-22), les marges de stabilité s'obtiennent en appliquant (3-19) et (3-20), qui peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} MG &= -20 \log_{10} |G(j\omega_{cp})|, \\ MP &= \arg[G(j\omega_{cg})] + 180^\circ \bmod 360^\circ. \end{aligned} \quad (3-23)$$

### Exemple 3-3

La fonction de transfert de la chaîne directe d'un système de commande est

$$G(s) = \frac{96}{(s+1)(s+2)(s+8)}$$

d'où

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= 96 \frac{(1-j\omega)(2-j\omega)(8-j\omega)}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)(\omega^2+64)} \\ &= 96 \frac{[16-11\omega^2]+j\omega(\omega^2-26)}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)(\omega^2+64)}. \end{aligned}$$

On détermine les marges de stabilité MG et MP, en appliquant (3-21), (3-22) et (3-23).

a) MG ?

$$\begin{aligned} \text{Im}[G(j\omega_{cp})] &= 0 \Rightarrow \omega_{cp}^2 = 26 \\ \Rightarrow G(j\omega_{cp}) &= 96 \frac{16-11(26)}{(26+1)(26+4)(26+64)} = -\frac{32}{90} \\ \Rightarrow MG &= -20 \log_{10} |G(j\omega_{cp})| = 8.98 \text{ db}. \end{aligned}$$

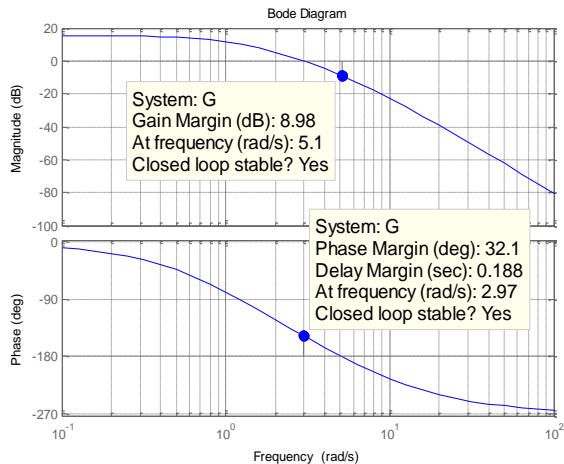
b) MP ?

$$\begin{aligned} |G(j\omega_{cg})| &= 1 \\ \Leftrightarrow (\omega_{cg}^2+1)(\omega_{cg}^2+4)(\omega_{cg}^2+64) &= (96)^2. \end{aligned}$$

En résolvant à l'aide de Matlab ou d'une calculatrice cette équation de troisième degré en  $x = \omega_{cg}^2$ , on trouve  $x = 8.8473$  d'où  $\omega_{cg} = 2.97 \text{ rad/sec}$  et

$$\begin{aligned} MP &= 180 - \left[ \operatorname{Arctg} \frac{2.97}{1} + \operatorname{Arctg} \frac{2.97}{2} + \operatorname{Arctg} \frac{2.97}{8} \right] \\ &= 32.2^\circ. \end{aligned}$$

Comme le montre la figure suivante, Matlab fournit ces résultats sur le diagramme de Bode de  $G(s)$  par «Right-click >> Characteristics >> Minimum Stability Margins».



D'après (3-23), MG est la distance algébrique d'origine la courbe de gain et d'extrémité l'axe 0 db à la fréquence  $\omega_{cp}$  (intersection de la courbe de phase avec l'axe  $-180^\circ$ ). MP est la distance algébrique d'origine l'axe  $-180^\circ$  et d'extrémité la courbe de phase à la fréquence  $\omega_{cg}$  (intersection de la courbe de gain avec l'axe 0 db).

### EXERCICE 3-2

La fonction de transfert de la chaîne directe d'une boucle à retour unitaire est

$$G(s) = \frac{k(s+1)}{s(s-1)(s+10)}.$$

- 1) À partir de quelle valeur de  $k$  la boucle sera stable ?
- 2) Représenter le diagramme de Bode de la fonction asymptotique  $G_a(s)$  associée à  $G(s)$  en précisant en fonction de  $k$  ses valeurs aux fréquences de cassure.
- 3) Estimer à partir de  $G_a(s)$  la valeur de  $k$  pour laquelle la fréquence de coupure de gain  $\omega_{cg}$  de  $G(s)$  est égale à 5 rad/sec et calculer MP.
- 4) Calculer la fréquence de coupure de phase  $\omega_{cp}$  et estimer MG de  $G_a(s)$ .
- 5) Vérifier les résultats précédents par Matlab.

Le lieu des racines ou d'Evans, le diagramme de Bode et l'abaque de Nichols sont des moyens classiquement employés dans la recherche d'un organe de commande répondant, pour un procédé donné  $G_p(s)$ , aux critères de stabilité, de performance et de robustesse détaillés ci-dessus. Le lieu d'Evans montre comment les pôles de la boucle fermée se déplacent quand un paramètre de la boucle ouverte varie, ce qui aide à concevoir un organe de commande satisfaisant des exigences temporelles. Le diagramme de Bode, défini au chapitre 2, est un moyen pour concevoir un organe de commande en se basant sur des considérations fréquentielles et l'abaque de Nichols permet de déduire la réponse fréquentielle de la boucle fermée à partir de celle de la boucle ouverte. Comme il existe une corrélation entre les caractéristiques des réponses temporelle et fréquentielle, le concepteur a le choix d'employer l'un ou l'autre de ces moyens selon l'importance qu'il accorde à certaines spécifications. Cependant, avant d'adopter définitivement un organe de commande, il est toujours utile d'examiner ses conséquences à la fois temporelles et fréquentielles.

## 3-4 LIEU DES RACINES

**Règles de construction.** La figure 3-8 représente le schéma simplifié d'un système de commande où  $K$  est un paramètre positif ajustable (pour  $K < 0$  voir exercice 3-4).

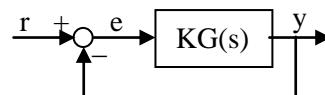


Fig. 3-8 Schéma simplifié d'un système de commande

La réponse  $y(t)$  à une référence  $r(t)$  dépend surtout de la position dans le plan complexe des pôles  $p_i$  de la fonction de transfert. Ces pôles sont les valeurs  $p_i$  de  $s$  qui annulent le dénominateur de

$$T(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)}, \quad K > 0$$

c.à.d. qui sont les racines de

$$1 + KG(s) = 0. \quad (3-23)$$

## 9 Commande des systèmes linéaires par retour de sortie

En posant  $G(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - q_j)}$ ,  $m \leq n$ , les pôles sont donc les  $n$  racines dépendantes de  $K$  du polynôme caractéristique

$$P(s, K) = \prod_{j=1}^n (s - q_j) + K \prod_{i=1}^m (s - z_i). \quad (3-24)$$

Quand  $K$  varie, chaque racine  $p_i$  décrit une courbe appelée branche et les  $n$  branches constituent le lieu  $\mathcal{L}$  des racines de  $P(s, K)$ . Ce lieu nous permettra de choisir la valeur de  $K$  pour laquelle la position des pôles est la plus convenable.

Les règles qui suivent servent à construire l'allure de ce lieu et de préciser ses points essentiels.

**R1.**  $\mathcal{L}$  est symétrique par rapport à l'axe des réels.

□ Pour  $K$  donné,  $P(p_i, K) = 0 \Leftrightarrow P(\bar{p}_i, K) = 0$  ■

**R2.**  $p \in \mathcal{L} \Leftrightarrow \arg[G(p)] = (2k + 1)\pi$ .

□  $p \in \mathcal{L} \Leftrightarrow \exists K > 0$  tel que  $G(p) = -1/K \in \mathbb{R}^-$  ■

**R3.** Pour  $p$  réel,  $p \in \mathcal{L} \Leftrightarrow (m_d + n_d)$  impair,  $m_d$  et  $n_d$  étant respectivement les nombres des  $z_i$  réels et des  $q_j$  réels situés à droite de  $p$ .

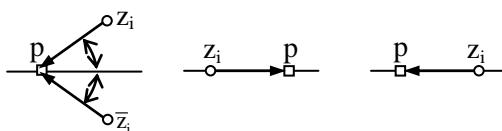
□ R2  $\Leftrightarrow \sum_1^m \arg(p - z_i) - \sum_1^n \arg(p - q_j) = (2k + 1)\pi$ .

Or, comme le montre les figures ci-dessous,

a) si  $z_i \notin \mathbb{R}$ ,  $\arg(p - z_i) + \arg(p - \bar{z}_i) = 0$ .

b)  $z_i < p \Rightarrow \arg(p - z_i) = 0$ .

c)  $z_i > p \Rightarrow \arg(p - z_i) = \pi$ .



D'où  $\sum_1^m \arg(p - z_i) = m_d \pi$ .

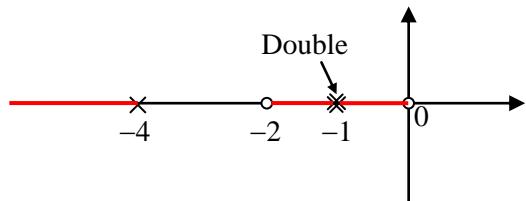
De même  $\sum_1^n \arg(p - q_j) = n_d \pi$ .

Donc  $(m_d - n_d)\pi = (2k + 1)\pi \Leftrightarrow (m_d + n_d)$  impair ■

**Exemple 3-4**

Supposons que  $G(s) = \frac{s(s+2)}{(s+1)^2(s+4)}$ .

Les traits rouges de la figure suivante représentent l'ensemble  $\mathbb{R} \cap \mathcal{L}$  c.à.d. les points de l'axe des réels qui appartiennent au lieu des racines. Les ronds sont les zéros de  $G$  et les croix les pôles de  $G$ .



**R4.** Une branche part d'un pôle  $q_j$  quand  $K = 0$  et aboutit à un zéro  $z_i$  ou à l'infini quand  $K \rightarrow \infty$ . D'où  $m$  branches se dirigent vers les  $m$  zéros  $z_i$  et  $n - m$  branches divergent vers l'infini.

□  $p \in \mathcal{L} \Leftrightarrow K = -\frac{\prod_{j=1}^n (p - q_j)}{\prod_{i=1}^m (p - z_i)}$ .

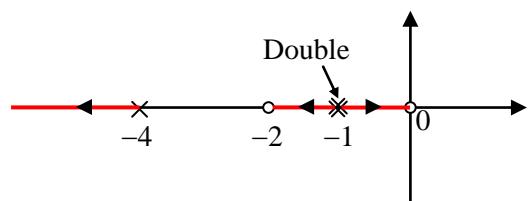
a)  $K = 0 \Leftrightarrow \exists j$  tel que  $p = q_j$ .

b)  $K \rightarrow \infty \Leftrightarrow (\exists i \mid p \rightarrow z_i)$  ou, si  $n > m$ ,  $p \rightarrow \infty$  ■

**Exemple 3-5**

Considérons de nouveau la fonction de transfert de la chaîne directe de l'exemple 3-4.

Comme le montrent les flèches de la figure suivante, quand  $K$  varie de 0 à l'infini, chaque pôle  $p$  de la boucle fermée  $T(s) = KG(s)/(1 + KG(s))$  part d'un pôle de  $G(s)$  et se dirige vers un zéro de  $G(s)$  ou vers l'infini. Dans cet exemple,  $\forall K > 0$ , les pôles de  $T(s)$  sont réels.



Remarque.  $p \in \mathcal{L} \Leftrightarrow K = -1/G(p)$  d'où à un point  $p$  du lieu  $\mathcal{L}$  correspond une valeur de  $K$  et une seule. Par conséquent,

1) Une branche de  $\mathcal{L}$  ne passe pas deux fois par le même point (ne comporte pas une boucle).

2) Deux branches ont la même valeur  $K_b$  de  $K$  en leur point d'intersection  $p_b$  appelé point de *bifurcation* (ou de rencontre ou de séparation). Ce point  $p_b$  est une racine multiple de  $P(s, K_b)$ .

**R5.** Soient  $N$  et  $D$  le numérateur et le dénominateur de  $G$ .  $p_b$  est un point de bifurcation si et seulement si  $p_b \in \mathcal{L}$  et

$$D'(p_b)N(p_b) - N'(p_b)D(p_b) = 0 \quad (\Leftrightarrow dK/ds|_{s=p_b} = 0).$$

□  $p_b \in \mathcal{L}$  de bifurcation  $\Leftrightarrow G(p_b) = -1/K \in \mathbb{R}^-$

$$\text{et } P(s, K_b) = (s - p_b)^v Q(s, K_b), \quad v \geq 2 \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow P(p_b, K_b) = 0 \text{ et } (dP/ds)(p_b, K_b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} D(p_b) + K_b N(p_b) = 0, \\ D'(p_b) + K_b N'(p_b) = 0. \end{cases}$$

En éliminant  $K_b$  des deux dernières équations, on obtient  $D'(p_b)N(p_b) - N'(p_b)D(p_b) = 0$  ■

### Exemple 3-6

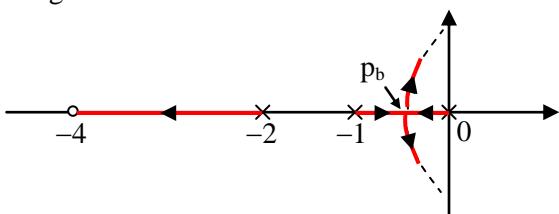
Soit  $G(s) = (s + 4)/s(s + 1)(s + 2)$ . Ses points de bifurcation doivent vérifier l'équation

$$\begin{aligned} (3s^2 + 6s + 2)(s + 4) - (s^3 + 3s^2 + 2s) \\ = 2s^3 + 15s^2 + 24s + 8 = 0. \end{aligned}$$

À l'aide d'une calculatrice, on trouve que les racines de cette équation sont  $-0.45$ ,  $-1.62$  et  $-5.42$ . Seule la racine  $-0.45$  est un point de bifurcation, les deux autres n'appartiennent pas au lieu ayant chacune à sa droite un nombre pair de  $z_i$  et de  $q_j$ . La valeur de  $K$  au point  $p_b = -0.45$  est

$$K_b = -\frac{1}{G(p_b)} = \frac{0.45(1-0.45)(2-0.45)}{(4-0.45)} = 0.108$$

La figure suivante montre que les branches qui proviennent des pôles  $0$  et  $-1$  se rencontrent en  $p_b$  pour  $K = K_b$  et, ne pouvant pas repasser par les mêmes points, sortent de l'axe des réels et divergent vers l'infini (selon des directions qui seront précisées) tandis que la branche qui part du pôle  $-2$  se dirige vers le zéro  $-4$ .



**R6.** Soit  $p_b$  un point de bifurcation de multiplicité  $v$ . L'angle entre deux branches de  $\mathcal{L}$  qui arrivent à  $p_b$  ou qui partent de ce point est  $2k\pi/v$ . L'angle entre une branche qui arrive à  $p_b$  et une autre qui part de

$p_b$  est  $(2k + 1)\pi/v$ .

□ Soit  $p$  un point de  $\mathcal{L}$  voisin de  $p_b$ . La valeur de  $K$  en  $p$  est voisine de sa valeur  $K_b$  en  $p_b$  et par développement de Taylor de 1<sup>er</sup> ordre on a :

$$\begin{aligned} 0 = P(p, K) &= P[p, K_b + (K - K_b)] \\ &\approx P(p, K_b) + \left. \frac{\partial P}{\partial K} \right|_{K_b} (K - K_b). \end{aligned} \quad (1)$$

Or

$$P(p, K_b) = (p - p_b)^v Q(p, K_b) \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial P}{\partial K} \right|_{K_b} = N(p)$$

où  $Q(p, K_b)$  est un polynôme de degré  $n - v$  tel que  $Q(p_b, K_b) \neq 0$  et  $N$  est le numérateur de  $G$ . Ainsi, en remplaçant dans (1), on déduit que

$$\arg(p - p_b)^v = \arg\left(\frac{N(p)}{Q(p, K_b)}\right) + \arg(K_b - K) + 2k\pi$$

Mais  $\arg(K_b - K)$  est égal à  $0$  si  $K < K_b$  et il est égal à  $\pi$  si  $K > K_b$ . En posant

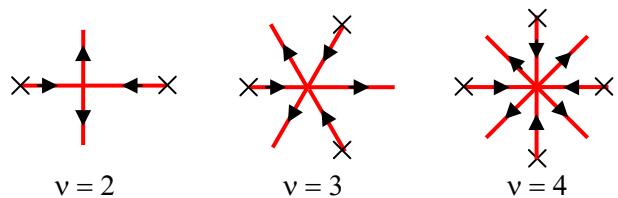
$$\alpha = \arg\left(\frac{N(p_b)}{Q(p_b, K_b)}\right) \quad (3-25)$$

on tire que quand  $p \rightarrow p_b$ ,

$$\arg(p - p_b) \rightarrow \begin{cases} \alpha/v + 2k\pi/v & \text{si } K < K_b \text{ (arrivée à } p_b\text{),} \\ \alpha/v + (2k+1)\pi/v & \text{si } K > K_b \text{ (départ de } p_b\text{).} \end{cases} \quad (3-26)$$

Ceci démontre la règle R6 ■

Remarque. Si  $p_b$  est réel, il en est de même de  $N(p_b)/Q(p_b, K_b)$  d'où, d'après (3-35),  $\alpha$  est égal à  $0$  ou à  $\pi$  et, d'après (3-26),  $\arg(p - p_b)$  est un nombre entier de  $\pi/v$  comme l'illustre la figure suivante.



## 11 Commande des systèmes linéaires par retour de sortie

**R7.** Une branche de  $\mathcal{L}$  part d'un pôle  $q_d$  (resp. arrive à un zéro  $z_a$ ) de multiplicité  $v$  avec une inclinaison

$$\varphi = \frac{1}{v} [\sum_i \arg(q_d - z_i) - \sum_{j \neq d} \arg(q_d - q_j) - (2k+1)\pi] \quad (3-27)$$

resp.

$$\varphi = \frac{1}{v} [\sum_{j \neq a} \arg(z_a - q_j) - \sum_i \arg(z_a - z_i) + (2k+1)\pi]. \quad (3-27')$$

$$\square p \in \mathcal{L} \Leftrightarrow \sum_i \arg(p - z_i) - \sum_j \arg(p - q_j) = (2k+1)\pi$$

Or, quand  $p \rightarrow q_d$ ,

a)  $\arg(p - q_d) \rightarrow \varphi$  ( $v$  fois),

b)  $\arg(p - q_j) \rightarrow \arg(q_d - q_j)$ , pour  $j \neq d$ ,

c)  $\arg(p - z_i) \rightarrow \arg(q_d - z_i)$ ,  $\forall i$ . D'où (3-27).

(3-27') se démontre de la même manière ■

### Exemple 3-7

Soit

$$KG(s) = Ks/(s^2 + 1)^2$$

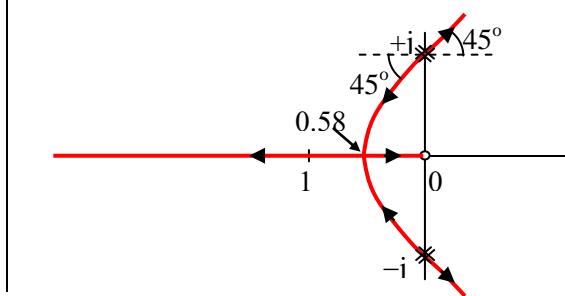
la fonction transfert de la chaîne directe. Du pôle double  $+j$  partent deux branches dont les angles de départ sont, d'après (3-27),

$$\varphi = [\pi/2 - 2\pi/2 - (2k+1)\pi]/2 = -3\pi/4 + k\pi.$$

Comme le montre la figure ci-dessous, l'une des deux branches se dirige vers l'infini et l'autre rencontre la branche qui provient de  $-j$  au point de bifurcation réel  $p_b$  tel que

$$4p_b^2(p_b^2 + 1) - (p_b^2 + 1)^2 = 0 \Rightarrow p_b = 0.58.$$

Après cette rencontre, l'une des deux branches se dirige sur l'axe des réels vers le zéro  $z = 0$  et l'autre vers l'infini.



**R8.** Les  $n - m$  branches de  $\mathcal{L}$  qui divergent vers l'infini admettent des asymptotes qui se rencontrent au point réel  $a$  et ont des inclinaisons  $\theta$  donnés par

$$a = \frac{\sum q_j - \sum z_i}{n - m} \quad \text{et} \quad \theta = (2k+1) \frac{\pi}{n - m}. \quad (3-28)$$

□ Soient  $p \in \mathcal{L}$  et  $a$  un point fini. On a :

$$\begin{aligned} -K &= \prod_1^n (p - q_j) / \prod_1^m (p - z_i) \\ &= \prod_1^n [(p - a) - (q_j - a)] / \prod_1^m [(p - a) - (z_i - a)] \\ &= \frac{(p - a)^n - [\sum (q_j - a)](p - a)^{n-1} + \dots}{(p - a)^m - [\sum (z_i - a)](p - a)^{m-1} + \dots} \end{aligned}$$

Le développement de cette division donne :

$$-K = (p - a)^{n-m} - [\sum (q_j - a) - \sum (z_i - a)](p - a)^{n-m-1} + \dots$$

Quand  $K$  et  $p \rightarrow \infty$ , on a  $-K \approx (p - a)^{n-m}$  où  $a$  est le nombre qui annule le second terme du développement c.à.d.  $a = (\sum q_j - \sum z_i) / (n - m)$ .

Comme  $\arg(-K) = (2k+1)\pi$ , l'argument de  $(p - a)$  est  $\theta = (2k+1)\pi/(n - m)$  ■

### Exemple 3-8

Soit

$$KG(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s+6)}$$

la fonction de transfert de la chaîne directe. Comme le montre la figure ci-dessous, les asymptotes des deux branches ( $n - m = 2$ ) qui divergent vers l'infini se rencontrent au point

$$a = \frac{(-6 - 0 - 0) - (-1)}{2} = -2.5$$

$$\text{et ont les inclinaisons } \theta = (2k+1) \frac{\pi}{2} = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Supposons qu'on désire que les 3 pôles de la boucle fermée soient situés sur une même verticale. En désignant par  $-\sigma$  la partie réelle de ces pôles, leur somme sera égale à  $-3\sigma$ . Cette somme étant

## 12 Commande des systèmes linéaires par retour de sortie

l'opposé du deuxième coefficient du polynôme caractéristique

$$P(s) = s^2(s+6) + K(s+1) = s^3 + 6s^2 + Ks + K,$$

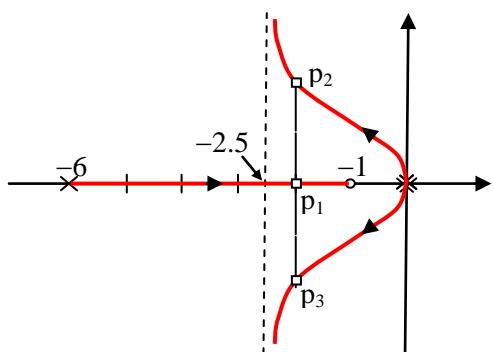
on a :  $-3\sigma = -6$ , d'où  $\sigma = 2$ . La valeur de  $K$  correspondante à ces pôles, en particulier au pôle réel  $p_1 = -2$ , est

$$K = -\frac{1}{G(-2)} = -\frac{(-2)^2(-2+6)}{(-2+1)} = 16.$$

Les deux autres pôles sont les racines de

$$\frac{s^3 + 6s^2 + 16s + 16}{s+2} = s^2 + 4s + 8 = 0$$

d'où  $p_2 = -2 + 2j$  et  $p_3 = -2 - 2j$ .



### EXERCICE 3-3

Refaire l'exemple précédent en remplaçant le pôle  $-6$  par  $-9$ .

Nous récapitulons les règles de construction du lieu des racines par l'exemple suivant.

### Exemple 3-9

La fonction de transfert de la chaîne directe

$$KG(s) = \frac{K(2s+1)}{s^2(s^2+4s+8)}$$

a un zéro en  $z = -1/2$ , un pôle double en  $q_1 = 0$  et deux pôles simples complexes en  $q_{2,3} = -2 \pm 2j$ .

a) Lieu sur l'axe des réels

Le nombre de pôles et de zéros réels à droite d'un point réel  $p$  est impair si et seulement si  $p < -1/2$ .

b) Angle de départ du pôle simple  $q_2$   
Selon la règle R7,

$$\begin{aligned}\varphi &= \arg(2q_2 + 1) - 2\arg(q_2 - 0) - \arg(q_2 - q_3) - 180^\circ \\ &= \arg(-3 + 4j) - 2\arg(-2 + 2j) - \arg(4j) - 180^\circ \\ &= [180 - \text{Arctg}(4/3)] - 2(180 - 45) - 90 - 180^\circ \\ &= -53.13^\circ - 360^\circ \text{ c.à.d. } -53.13^\circ.\end{aligned}$$

Par symétrie, l'angle de départ de  $q_3 = \bar{q}_2$  est  $+53.13$  et les deux branches qui partent du pôle double  $q_1 = 0$  sont, d'après R6, inclinées de  $\pm\pi/2$ .

c) Points de bifurcation

D'après la règle R5, ces points vérifient

$$\begin{aligned}&(4s^3 + 12s^2 + 16s)(2s+1) - 2s^2(s^2 + 4s + 8) \\ &= 2s(3s^3 + 10s^2 + 14s + 8) \\ &= 2s(3s+4)(s^2 + 2s + 2) = 0\end{aligned}$$

dont les racines sont  $0, -4/3$  et  $-1 \pm j$ . Le point  $0$  est évidemment de bifurcation puisqu'il est un point de rencontre de deux branches. Le point  $-4/3$  est aussi un point de bifurcation puisqu'il appartient à  $\mathcal{L}$  et correspond à

$$K = -\frac{1}{G(-4/3)} = \frac{(-4/3)^2[(-4/3)^2 - 16/3 + 8]}{8/3 - 1} = 4.74$$

D'autre part, comme

$$-\frac{1}{G(-1+j)} = -\frac{(-2j)(2j+4)}{2j-1} = 4,$$

les points  $-1 \pm j$  sont aussi de bifurcation et correspondent à  $K = 4$ . D'après (3-25) et (3-26), les branches provenant des pôles  $q_1 = 0$  et  $q_2 = -2 + 2j$  arrivent au point de bifurcation  $p_b = -1 + j$  inclinées de  $\alpha/2 + k\pi$  avec  $\alpha = \arg[(2p_b + 1)/Q(p_b, 4)]$  où

$$Q(s, 4) = \frac{P(s, 4)}{(s - p_b)^2}.$$

Or,  $p_b$  étant une racine double de  $P(s, 4)$ , il en est de même de  $\bar{p}_b$  et comme  $d^o P = 4$ , on a :

## 13 Commande des systèmes linéaires par retour de sortie

$$P(s, 4) = (s - p_b)^2(s - \bar{p}_b)^2$$

d'où  $Q(p_b, 4) = (p_b - \bar{p}_b)^2$  dont l'argument est  $\pi$ . Par conséquent,  $\alpha = \arg(-1 + 2j) - \pi = -\text{Arctg}2$  et l'inclinaison des branches en  $p_b$  est donc

$$\alpha/2 + k(180) = -31.7^\circ + k(180^\circ).$$

### d) Asymptotes.

Comme  $n - m = 3$ , il existe 3 branches qui divergent vers l'infini de point d'intersection et d'inclinaisons (R8)

$$a = \frac{-4+1/2}{3} = -\frac{7}{6} \quad \text{et} \quad \theta = (2k+1)\frac{\pi}{3}.$$

Après leur rencontre en  $p_b = -1 + j$ , chacune des deux branches bifurque de  $90^\circ$ , l'une pour se diriger vers le point de bifurcation  $-4/3$  et l'autre vers l'infini.

### e) Intersection avec l'axe des imaginaires

Un tel point  $p = j\omega$  de  $\mathcal{L}$  vérifie

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{2j\omega + 1}{-\omega^2[(8 - \omega^2) + 4j\omega]} \\ &= -\frac{(2j\omega + 1)[(8 - \omega^2) - 4j\omega]}{\omega^2[(8 - \omega^2)^2 + 16\omega^2]} = -\frac{1}{K}. \end{aligned}$$

D'où

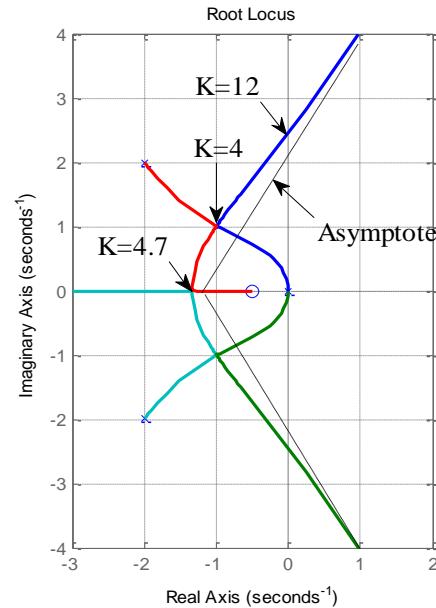
$$\text{Im}[G(j\omega)] = 0 \Rightarrow 2\omega(8 - \omega^2 - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \omega = 0, \\ \omega = \pm\sqrt{6} \end{cases}$$

La solution  $j\omega = 0$  est attendue puisque deux branches partent du pôle double  $q_1 = 0$  où  $K = 0$  tandis que les solutions  $j\omega = \pm j\sqrt{6}$  sont les points d'intersection avec l'axe des imaginaires des branches qui quittent les points de bifurcation  $-1 \pm j$  et dirigent vers l'infini. La valeur de  $K$  correspondante à ces intersections est donnée par

$$K = -\frac{1}{G(j\sqrt{6})} = \frac{6[(8-6)^2 + 16(6)]}{(8-6) + 8(6)} = 12.$$

On peut vérifier les résultats obtenus dans cet exemple sur Matlab en écrivant les instructions suivantes :

```
>> n = [2 1]; d = [1 4 8 0 0];
>> G = tf(n,d);
>> rlocus(G)
```



### EXERCICE 3-4

Pour  $K < 0$ , en examinant les démonstrations des règles R1 à R8, indiquer celles qui doivent être modifiées et de quelle manière.

Représenter le lieu des racines du polynôme caractéristique  $P(s, K) = s^2(s + 1)^2 + K(s + 2)$  pour a)  $0 \leq K < \infty$ , b)  $-\infty < K < 0$ .

## 3-5 ABAQUE DE NICHOLS

Comme nous l'avons signalé plus haut, cette abaque permet de déduire graphiquement la réponse fréquentielle de la boucle fermée  $T(j\omega)$  à partir de celle de la boucle ouverte  $G(j\omega)$ . Nous savons que la relation algébrique entre ces deux fonctions est

$$T(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)}$$

## 14 Commande des systèmes linéaires par retour de sortie

d'où  $T(j\omega)$  ne dépend que de la position du point  $G(j\omega)$  dans le plan complexe. Pour une fréquence donnée  $\omega$ , en posant  $G(j\omega) = x + jy$ , la valeur de  $T(j\omega)$  en ce point est

$$T = \frac{x + jy}{(1+x) + jy}. \quad (3-29)$$

a) Lieu des points  $G$  où le gain  $|T|$  est constant.  
D'après (3-29), le gain  $|T|$  de la boucle fermée prend la valeur  $M$  aux points  $x + jy$  vérifiant l'équation

$$\frac{x^2 + y^2}{(1+x)^2 + y^2} = M^2$$

qui s'écrit

$$(1 - M^2)x^2 - 2M^2x + (1 - M^2)y^2 = M^2.$$

D'où

$$\begin{cases} x = -1/2 & \text{si } M = 1, \\ (x - c)^2 + y^2 = R^2 & \text{si } M \neq 1 \end{cases} \quad (3-30)$$

avec

$$c = \frac{M^2}{1 - M^2} \quad \text{et} \quad R^2 = \frac{M^2}{(1 - M^2)^2}. \quad (3-31)$$

Les relations (3-30) et (3-31) montrent que le lieu des points où le gain  $M = 1$  est la droite  $x = -1/2$  et pour  $M \neq 1$ , ce lieu est un cercle de centre  $(c, 0)$  avec  $c \geq 0$  si  $0 \leq M < 1$  et  $c < -1$  si  $M > 1$ . D'autre part, on peut vérifier que  $-1/2 < c - R \leq 0$  si  $M < 1$ ,  $-1 \leq c + R < -1/2$  si  $M > 1$ .

Ces lieux s'obtiennent sur Matlab (fig. 3-9) par l'instruction «meshgrid» qui définit l'ensemble des points  $x + jy$  où la fonction  $z = |T|^2$  sera évaluée et par l'instruction «contour» qui détermine l'ensemble des points où  $z$  prend la même valeur  $M^2$  et ceci pour différentes valeurs de  $M^2$ .

```
>> [x,y] = meshgrid(-5:0.1:5, -5:0.1:5);
>> z = (x.^2 + y.^2)./((1+x).^2 + y.^2);
>> M2 = [0.2 0.4 0.6 0.8 1 1.2 1.6 2 4];
>> [c,h] = contour(x, y, z, M2);
>> set(h,'ShowText','on')
```

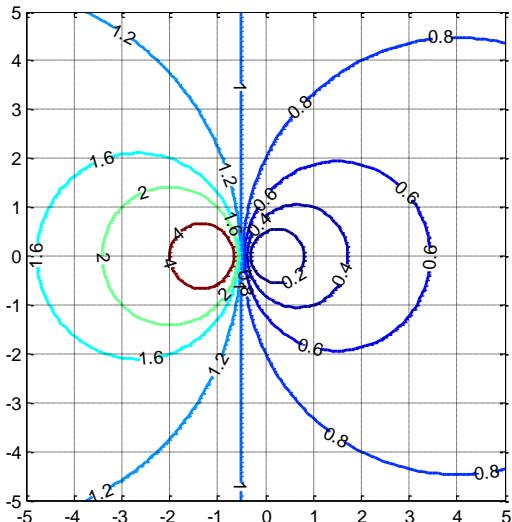


Fig. 3-9 Niveaux du gain  $|T|$  dans le plan de Nyquist

On voit que les niveaux de  $|T|$  sont très serrés au voisinage du point  $-1/2 + 0j$  c.à.d. quand l'argument de  $G(j\omega)$  est voisin de  $-180^\circ$  et son module est voisin de  $1/2$  (-6 db). Comme dans cette région sont évaluées les marges de stabilité et souvent d'autres caractéristiques de la réponse fréquentielle, on préfère représenter ces niveaux dans le plan de Black (phase  $\varphi$  en degrés, module  $m$  en décibels) au lieu du plan de Nyquist (réel  $x$ , imaginaire  $y$ ).

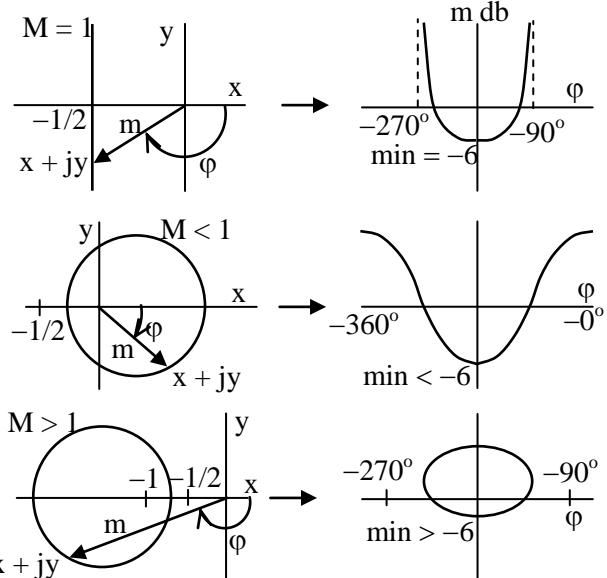


Fig. 3-10 Transformation des courbes de niveau de  $|T|$  du plan de Nyquist au plan de Black

## 15 Commande des systèmes linéaires par retour de sortie

La figure 3-10 montre l'allure des transformations du plan  $(x, y)$  au plan  $(\phi, m)$  : a) de la droite  $M = 1$  ( $0 \text{ db}$ ), b) d'un cercle  $M < 1$  et c) d'un cercle  $M > 1$ .

### b) Lieu des points G où $\arg(T)$ est constant.

De l'équation (3-29), on déduit que l'argument de la fonction de transfert  $T(j\omega)$  de la boucle fermée prend la valeur  $\psi$  aux points  $G(j\omega) = x + jy$  tels que

$$\begin{aligned}\psi &= \arg[(x + jy)(1 + x - jy)] \\ &= \arg[(x^2 + x + y^2) + jy].\end{aligned}$$

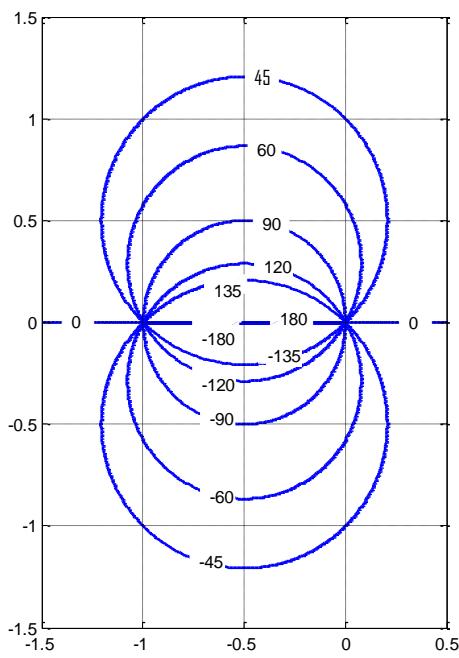
En posant  $N = \operatorname{tg}\psi$ , l'équation précédente s'écrit :

$$N(x^2 + x + y^2) = y$$

ou

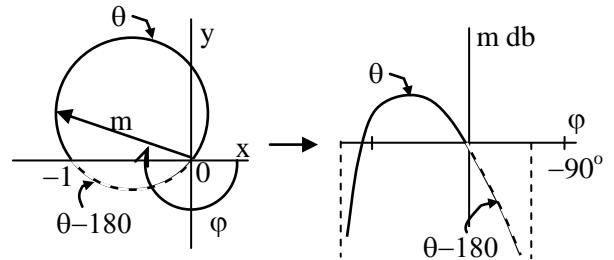
$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2N}\right)^2 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{N^2}\right). \quad (3-32)$$

Le lieu des points  $G(j\omega) = x + jy$  où l'argument de  $T(j\omega)$  est  $\psi = \theta - k(180^\circ)$ ,  $0 \leq \theta \leq 180^\circ$  et  $k = 0$  ou  $1$ , est donc un cercle de centre  $(-1/2, 1/2\tan\psi)$  et de rayon  $R = 1/2|\sin\psi|$ . Ces cercles sont centrés sur l'axe  $x = -1/2$  et passent tous par  $0$  et  $-1$  (fig. 3-11).



**Fig. 3-11** Niveaux de la phase de  $T$  dans le plan de Nyquist

La figure (3-12) montre la transformation du plan de Nyquist  $(x, y)$  au plan de Black  $(\phi, m)$  d'un cercle de niveau  $\psi = \theta - k(180^\circ)$ .



**Fig. 3-12** Transformation des courbes de niveau de  $\arg(T)$  du plan de Nyquist au plan de Black

L'abaque de Nichols regroupe dans le plan de Black les courbes de niveau de  $|T(j\omega)|$  et les courbes de niveau de  $\arg[T(j\omega)]$ . L'intersection de ces courbes avec la courbe de Black de la boucle ouverte  $G(j\omega)$  permet d'obtenir point par point la réponse fréquentielle  $T(j\omega)$  de la boucle fermée.

Considérons, par exemple la fonction de transfert de la chaîne directe d'un système de commande à retour unitaire

$$G(s) = \frac{40}{s(s+2)(s+10)}.$$

On obtient sa courbe de Black de  $G(j\omega)$  en employant l'instruction «nichols» :

```
>> G = zpk([], [0 -2 -10], 40);
>> nichols(G)
>> grid
```

De cette courbe, superposée à l'abaque de Nichols et représentée en trait gras à la figure 3-13, on déduit les caractéristiques fréquentielles suivantes de la boucle fermée  $T(j\omega)$ .

a) La fréquence de coupure du gain  $\omega_{cg}$  de  $G(j\omega)$  s'obtient à l'intersection de sa courbe de Black avec l'axe horizontal  $m = 0 \text{ db}$  et la marge de phase MP est la distance horizontale du point  $(-180^\circ, 0\text{db})$  à la courbe  $G(j\omega)$ .

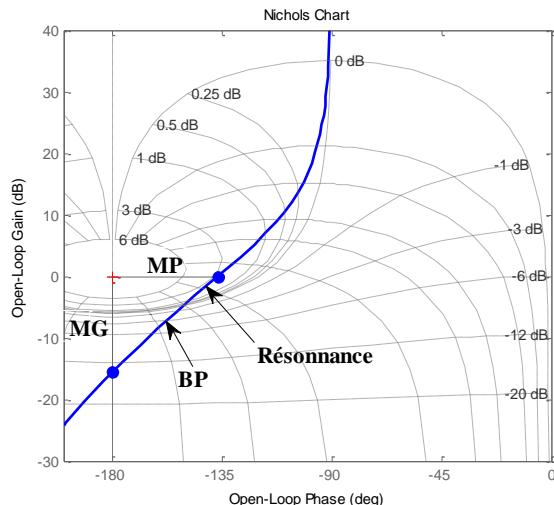
b) La fréquence de coupure du phase  $\omega_{cp}$  s'obtient à l'intersection de  $G(j\omega)$  avec l'axe vertical  $\phi = -180^\circ$

## 16 Commande des systèmes linéaires par retour de sortie

et la marge de gain MG est la distance verticale de la courbe  $G(j\omega)$  au point ( $-180^\circ$ , 0db).

c) La fréquence et la valeur de résonnance,  $\omega_r$  et  $M_r$ , s'obtiennent au point de tangence de la courbe  $G(j\omega)$  à une courbe de niveau de  $|T|$ . Si  $G(j\omega)$  est tangent à plus qu'une courbe de niveau, la résonnance correspond à celle qui a la plus grande valeur.

d) La fréquence de coupure de gain  $\omega_{cgt}$  de la boucle fermée  $T(j\omega)$  s'obtient à l'intersection de  $G(j\omega)$  avec le niveau 0 db et la bande passante BP est l'ensemble des fréquences  $\omega$  pour lesquelles la valeur de la courbe de niveau en  $G(j\omega)$  est supérieure à -3 db.



**Fig. 3-13** Caractéristiques fréquentielles d'une boucle fermée.

À l'aide du menu et du curseur, on trouve sur Matlab les valeurs suivantes :

- $\omega_{cgt} = 1.56$  rad/sec,  $MP = 43.2^\circ$ ,
- $\omega_{cp} = 4.47$  rad/sec,  $MG = 15.6$  db,
- $\omega_r \approx 1.7$  rad/sec,  $M_r \approx 3$  db,
- $\omega_{cgt} = 2.56$  rad/sec et  $BP = [0, 2.64]$ .

D'autre part on voit sur la figure 3-13 qu'à faibles fréquences  $G(j\omega)$  est tangent au niveau 0 db pour rencontrer ensuite des niveaux croissants jusqu'à la résonnance puis décroissants jusqu'à  $-\infty$ . Ceci signifie que le gain de  $T(j\omega)$  est égal à 1 à faibles fréquences, passe par un maximum  $M_r = \sqrt{2}$  (3 db)

à la fréquence 1.7 rad/sec pour décroître ensuite et tendre vers 0.

Les résultats précédents peuvent être vérifiés en représentant le diagramme de Bode de  $T(j\omega)$  qu'on obtient en écrivant  $T = G/(1 + G)$  ou en employant l'instruction

```
>> T = feedback(G,1)
```

où 1 est la fonction de transfert de la chaîne de retour (de contre réaction). On obtient :

$$T(s) = \frac{40}{(s + 10.45)(s^2 + 1.547s + 3.827)}.$$

Comparons la réponse fréquentielle de ce système de 3<sup>ème</sup> ordre à celle d'un système de second ordre,

$$T_{ap}(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

ayant la même fréquence  $\omega_r$  et la même valeur  $M_r$  de résonnance que  $T(j\omega)$ . Rappelons que pour un système de second ordre (voir 2-53)

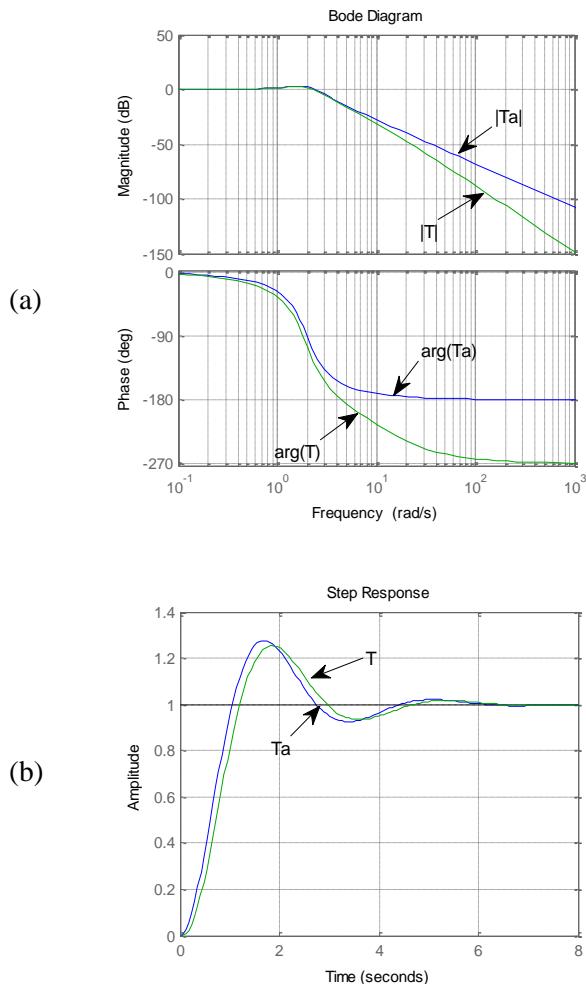
$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \text{ et } M_r = \left(2\xi\sqrt{1 - \xi^2}\right)^{-1} \quad (3-33)$$

d'où, en remplaçant  $\omega_r$  et  $M_r$  par leurs valeurs 1.7 rad/sec et  $\sqrt{2}$ , on tire  $\xi = 0.38$ ,  $\omega_n = 2.01$  et

$$T_{ap}(s) = \frac{4.04}{s^2 + 1.53s + 4.04}.$$

Les diagrammes de Bodes de  $T(s)$  et de  $T_{ap}(s)$ , représentés dans le même plan (fig. 3-14a), sont presque confondus à faibles fréquences et ne diffèrent qu'à hautes fréquences, là où leur gain est faible et les harmoniques sont négligeables. En fait,  $T_{ap}(s)$  peut être obtenu de  $T(s)$  en éliminant le pôle non dominant -10.45 et en ajustant le numérateur de sorte que le gain des deux systèmes soit le même à faibles fréquences. Par conséquent,  $T(s)$  et  $T_{ap}(s)$  ont presque le même comportement et ceci peut être vérifié en représentant leurs réponses temporelles (fig. 3-14b).

Ces remarques sont utiles pour la conception de l'organe de commande qui se déduit souvent en remplaçant la fonction de transfert réelle par son approximation de premier ou de second ordre.



**Fig. 3-14** Approximation de  $T$  par un système  $T_{ap}$  de second ordre.

### 3-6 CONCEPTION DE L'ORGANE DE COMMANDE

**Objectifs et contraintes.** Nous sommes maintenant en mesure d'aborder la conception de l'organe de commande. Il s'agit de déterminer la fonction de transfert  $G_c(s)$  de cet organe afin d'assurer un fonctionnement stable de la boucle fermée qui satisfait les exigences temporelles et/ou fréquentielles imposées dans un cahier de charges.

Du point de vu temporel on exige généralement

- une erreur stationnaire nulle ou petite,
- une réponse transitoire rapide,
- des oscillations de faibles amplitudes,
- un signal de commande minimisé afin d'éviter la saturation de l'actionneur et de réduire la consommation d'énergie.

Par les exigences fréquentielles on cherche à assurer la bonne performance, le filtrage des bruits (de mesure et des dynamiques négligées) ainsi que la robustesse. En posant  $G(s) = G_c(s)G_p(s)$ , nous avons vu aux paragraphes 3-2 et 3-3 que ces exigences se traduisent mathématiquement par

- un grand gain  $|G(j\omega)|$  dans l'ensemble  $\Omega_p$  des fréquences pour lesquelles la référence  $r(j\omega)$  et la perturbation  $d(j\omega)$  sont non négligeables (en pratique  $r$  et  $d$  sont constitués d'harmoniques de faibles fréquences).
- Un gain faible  $|G(j\omega)|$  dans l'ensemble  $\Omega_b$  des fréquences pour lesquelles le bruit  $b(j\omega)$  est non négligeable (en pratique  $b$  est constitués d'harmoniques de hautes fréquences).
- Des grandes marges de gain et de phase.
- Une faible valeur de résonance (souvent on exige  $M_r \leq 1.3$  db) pour éviter les fortes oscillations.

Pour satisfaire ces exigences, on peut procéder de deux manières :

1) On opte pour un organe de commande d'un type fixé à priori et on détermine les valeurs les plus convenables de ses paramètres. Cette manière de procéder fera l'objet des sous-paragraphe 3-6-1 et 3-6-2 où seront respectivement envisagés la commande PID et les compensateurs à avance et à retard de phase.

2) On construit par déduction la fonction de transfert  $G_c(s)$  à partir de la fonction de transfert  $T(s)$  désirée de la boucle fermée. Cette manière de procéder fera l'objet du sous-paragraphe 3-6-3.

Signalons d'abord qu'il est impératif lors de la conception de  $G_c(s)$  de tenir compte des contraintes générales suivantes.

**C<sub>1</sub>. La simplification d'un pôle instable par un zéro de  $G_c(s)$  doit être évitée** car, à cause de l'imprécision des valeurs des paramètres ou leur variation par vieillissement ou par usure, cette simplification ne sera pas effective en pratique et entraîne une instabilité inattendue.

Supposons par exemple que la fonction de transfert du procédé est  $G_p(s) = 1/(s - 1)$  et qu'on cherche à simplifier son pôle instable par l'organe de commande  $G_c(s) = k(s - 1)/s$ . Théoriquement la fonction de transfert de la référence  $r$  à la sortie  $y$  est  $T(s) = k/(s + k)$  qui est stable  $\forall k > 0$ . Cependant, si le pôle effectif de  $G_p(s)$  est 1.01 au lieu de 1, la vraie fonction de transfert entre  $r$  et  $y$  sera

$$T(s) = k(s - 1)/[s^2 + (k - 1.01)s - k]$$

qui est instable  $\forall k > 0$ .

La simplification d'un pôle stable ne pose généralement pas de problèmes car si cette simplification n'est pas effective en pratique, la présence d'un zéro au voisinage d'un pôle stable rend négligeable le terme de la réponse relatif à ce pôle (voir section 2-2). Cependant, il faut éviter de simplifier un pôle très voisin de l'axe des imaginaires car si la simplification n'est pas parfaite l'effet de ce pôle durera longtemps.

**C<sub>2</sub>. Le système de commande doit être intérieurement stable** afin d'éviter la divergence vers l'infini d'un signal interne. Ceci sera assuré si et seulement si la fonction de sensibilité  $S = 1/(1 + G)$  est stable quand elle est calculée sans simplifier les pôles instables (voir section 3-1).

Soient de nouveau

$$G_p(s) = 1/(s - 1) \text{ et } G_c(s) = k(s - 1)/s.$$

Nous avons vu que si le pôle instable se simplifie effectivement, la fonction de transfert entre  $r$  et  $y$ ,  $T(s) = k/(s + k)$ , est stable  $\forall k > 0$ . Mais en calculant  $S$  sans simplifier le pôle instable, on obtient

$$S = s(s - 1)/(s - 1)(s + k)$$

qui est instable, d'où le système est intérieurement instable. En effet, la fonction de transfert entre une

perturbation  $d_u$  à l'entrée du procédé et la réponse  $y$  est  $y(s)/d_u(s) = G_p(s)S(s) = s/(s - 1)(s + k)$ . Étant instable, la réponse  $y$  divergera vers l'infini pour la moindre perturbation  $d_u$  même quand la simplification du pôle instable est parfaite.

**C<sub>3</sub>. Le système de commande doit être totalement propre** c.à.d. la fonction de transfert entre deux points quelconques de ce système doit être propre et en particulier chaque organe de ce système doit être propre. Rappelons qu'une fonction de transfert  $H(s)$  est propre si le degré de son numérateur est inférieur ou égal au degré de son dénominateur, c.à.d. si  $H(\infty) < \infty$ . Pour voir pourquoi cette contrainte doit être respectée, supposons qu'un bruit sinusoïdal  $a \sin \omega t$ , de haute fréquence  $\omega$ , arrive à l'entrée d'une fonction de transfert impropre  $H(s)$ . Ce bruit sort de  $H(s)$  amplifié de  $|H(j\omega)|$  et tend vers l'infini quand  $\omega$  augmente, ce qui est évidemment indésirable.

Par une justification analogue à celle de la stabilité interne (voir section 3-1), un système de commande est totalement propre si et seulement si les 3 fonctions de transfert  $S$ ,  $G_c S$  et  $G_p S$  des équations

$$u = Sd_u - G_c S d_y, \quad y = G_p S d_u + S d_y$$

sont propres. Mais, comme le procédé  $G_p$  et l'organe de commande  $G_c$  doivent être tous les deux propres, le système est totalement propre si et seulement si  $S = 1/(1 + G)$ ,  $G = G_c G_p$ , est propre, c'est-à-dire si

$$G(\infty) \neq -1.$$

Supposons par exemple que  $G_p(s) = (2 - s)/(s + 4)$  et  $G_c(s) = (s + 1)/s$ . Les deux fonctions sont propres mais  $G(s) = (s + 1)(2 - s) / s(s + 4) \rightarrow -1$  quand  $s \rightarrow \infty$  d'où le système de commande n'est pas totalement propre. En effet, la figure 3-2 montre que la fonction de transfert entre le bruit de mesure  $b$  et la commande  $u$  est

$$\begin{aligned} G_c S &= \frac{s+1}{s} \frac{s(s+4)}{s(s+4)+(s+1)(2-s)} \\ &= \frac{(s+1)(s+4)}{5s+2}. \end{aligned}$$

Étant impropre, elle amplifie le bruit  $b$  d'autant plus que la fréquence de celle-ci est élevée. Ce bruit

## 19 Commande des systèmes linéaires par retour de sortie

amplifié s'ajoute à la commande et la déforme considérablement.

### 3-6-1 Commande PID

Ce type de commande est de loin le plus employé dans l'industrie. Il est défini par

$$G_c(s) = \frac{u(s)}{e(s)} = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s \quad (3-34)$$

où  $u$  est le signal de commande et  $e = r - y$  est l'écart entre la réponse désirée  $r$  et la réponse effective  $y$ . On voit que cette commande est constituée de 3 composantes : la proportionnelle, l'intégrale et la dérivée.

#### 1) La composante proportionnelle,

$$u_p(t) = k_p e(t), \quad k_p > 0,$$

est d'autant plus forte que la réponse effective  $y$  à l'instant considéré  $t$  est éloignée de la désirée  $r$ . Elle est positive si  $y < r$  et négative si  $y > r$  et tend donc à rapprocher  $y$  de  $r$ . Cependant cette composante n'est pas toujours suffisante par elle-même pour annuler l'écart  $e$  en régime stationnaire. Par exemple, si la fonction de transfert du procédé est  $G_p(s) = 1/(s + a)$  et  $G_c(s) = k_p$ , la fonction de transfert de la boucle ouverte est  $G(s) = G_p(s)G_c(s) = k_p/(s+a)$ . Étant de type 0, l'erreur stationnaire de position n'est pas nulle et vaut, d'après (3-11),  $e_{sp} = 1/[1 + G(0)] = a/(k_p + a)$ . Physiquement, si le système en régime stationnaire a besoin de l'énergie (pour compenser par exemple les pertes durant ce régime), la commande  $u_p$ , si elle est seule, ne doit pas s'annuler et il en est donc de même de  $e_{sp}$ .

#### 2) La composante intégrale,

$$u_i(t) = k_i \int_0^t e(\tau) d\tau, \quad k_i > 0,$$

est équivalente à  $du_i/dt = k_i e$ . Si la boucle fermée est stable et  $r = c^{te}$ ,  $u_i$  sera constante en régime stationnaire et  $e$  s'annule. Ainsi, il suffit que le système soit stable, pour que l'action  $u_i$  annule l'erreur stationnaire de position. Mathématiquement, avec la commande  $G_c(s) = k_i/s$ , le type de  $G(s) =$

$G_c(s)G_p(s)$  est  $n_0 \geq 1$  d'où, d'après (3-12),  $e_{sp} = 0$ . Cependant, la présence de pôles à l'origine tend à amplifier les oscillations de la réponse.

#### 3) La composante dérivée,

$$u_d(t) = k_d \frac{de(t)}{dt}, \quad k_d > 0,$$

s'écrit  $u_d(t) = -k_d(dy/dt)$  quand  $r$  est une constante. Ceci montre que l'action  $u_d$  s'oppose à la vitesse de la réponse exactement comme le fait un amortisseur. Cette composante amortit donc les oscillations de la réponse et en particulier diminue le dépassement maximum. Nous attirons l'attention que le terme de dérivation  $k_d s$  n'est pas propre et il est en pratique remplacé par un quasi-déivateur de fonction de transfert  $k_d s / (\tau_f s + 1)$  où  $\tau_f$  est une constante de petite valeur. À faibles fréquences, pour  $\omega < 1/\tau_f$ , le quasi-déivateur est pratiquement un déivateur pur  $k_d s$  mais à hautes fréquences son gain, au lieu de tendre vers l'infini, il se limite à  $k_d/\tau_f$ . Ainsi, à la place de (3-34), on a en réalité

$$G_c(s) = \frac{k_d s^2 + k_p s + k_i}{s} \frac{1}{\tau_f s + 1},$$

mais  $1/(\tau_f s + 1)$  est un filtre passe bas dont le pôle  $-1/\tau_f$  peut être négligé en première analyse car il est généralement choisi au moins 5 fois plus éloigné de l'axe des imaginaires que les pôles de  $G_p(s)$ . En posant  $\alpha$  et  $\beta$  les racines de  $s^2 + (k_p/k_d)s + (k_i/k_d) = 0$ , nous supposerons que

$$G_c(s) = k_d \frac{(s + \alpha)(s + \beta)}{s}$$

quitte à le filtrer par  $1/(\tau_f s + 1)$  lors de la réalisation pratique.

**Emploi du lieu d'Evans.** Afin d'obtenir une réponse rapide dont la fréquence des oscillations est modérée, les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  sont généralement choisis de sorte à trouver sur le lieu d'Evans (lieu des racines de  $1 + G_c G_p$ ) des pôles dominants assez éloignés de l'axe des imaginaires sans être très éloignés de l'axe des réels. Ceci peut souvent se faire en éliminant par les zéros  $\alpha$  et  $\beta$  de  $G_c$  les pôles stables de  $G_p$  les plus voisins de l'axe des

imaginaires ce qui éloigne vers la gauche le point d'intersection des asymptotes (voir règle R8) ainsi que l'ensemble du lieu. Il est toujours utile de simuler le système final pour tester les effets des pôles non dominants et des zéros ainsi que l'effet des simplifications imparfaites. En plus, il est important de s'assurer que le signal de commande reste dans des limites acceptables. Ce signal atteint des valeurs d'autant plus grandes que la réponse est rapide c.à.d. que les pôles dominants sont éloignés de l'axe des imaginaires.

### Exemple 3-10

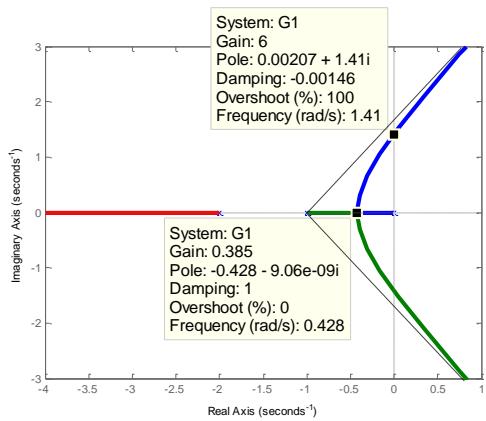
Soit  $G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$

la fonction de transfert du procédé à commander et considérons d'abord l'organe de commande le plus simple  $G_c(s) = k_p$  (commande proportionnelle (P)). Pour cette commande, les fonctions de transfert de la chaîne directe et de la boucle fermée sont respectivement

$$G_1(s) = \frac{k_p}{s(s+1)(s+2)},$$

et  $T_1(s) = \frac{G_1(s)}{1+G_1(s)} = \frac{k_p}{s^3 + 3s^2 + 2s + k_p}$ .

Le lieu des pôles de  $T_1(s)$  quand  $k_p$  varie de 0 à l'infini est représenté par la figure suivante.



Les pôles  $p_1$  et  $p_2$  de  $T_1(s)$  qui partent des pôles 0 et  $-1$  de  $G_1(s)$  se rencontrent au point de bifurcation  $s_b = -0.428$  pour  $k_p = k_{pb} = 0.385$  et se dirigent ensuite vers l'infini en coupant l'axe des imaginaires en

$\pm j\sqrt{2}$  quand  $k_p$  devient 6. Leurs asymptotes sont inclinées de  $\pm\pi/3$  et passent par  $-1$ . Le troisième pôle de  $T_1(s)$  quitte le pôle  $-2$  de  $G_1(s)$  et se dirige sur l'axe des réels vers  $-\infty$ . Sachant que la constante de temps de la réponse est  $\tau = 1/\min(\sigma_i)$  où  $-\sigma_i$  est la partie réelle d'un pôle  $p_i$  de  $T_1(s)$ ,  $i = 1, 2, 3$  (voir (2-18)), sa valeur minimum correspond au point de bifurcation  $s_b$  et vaut  $\tau_{\min} = 1/(-s_b) = 2.336$  sec.

Si l'on désire un dépassement d'environ 4 %, les pôles dominants  $-\sigma \pm j\omega_a$  de  $T_1(s)$  doivent être tels que  $\sigma/\omega_a = 1$  ( $DM = e^{-\pi\sigma/\omega_a}$ ). Le curseur de Matlab indique que ces pôles sont  $-0.378 \pm j0.378$  obtenus pour  $k_p = 0.647$ . Pour cette valeur de  $k_p$ , on a les estimations suivantes des caractéristiques de la réponse :

- Constante de temps :  $\tau = 1/\sigma = 2.645$  sec.
- Temps de stabilisation :  $t_s = 4\tau = 10.58$  sec.
- Période des oscillations :  $T_a = 2\pi/\omega_a = 16.62$  sec.
- Nombre des oscillations :  $n = t_s/T_a = 0.636$
- Dépassement maximum :  $DM = 4$  %.
- Erreur stationnaire de vitesse

$$e_{sv} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG_1(s)} = \frac{2}{k_p} = 3.09.$$

L'amplitude des oscillations est faible mais la réponse est très lente ( $t_s = 10.58$  sec) et l'erreur stationnaire de vitesse est grande. Pour accélérer la réponse, essayons la commande PID dont les zéros  $\alpha$  et  $\beta$  sont choisis confondus avec les pôles stables 0 et  $-1$  de  $G_p(s)$ , c.à.d.

$$G_c(s) = k_d \frac{s(s+1)}{s} = k_d(s+1).$$

Pour cette commande, qui est en fait de type PD (proportionnelle - dérivée), les fonctions de transfert de la chaîne directe et de la boucle fermée sont respectivement :

$$G_2(s) = k_d \frac{1}{s(s+2)} \quad \text{et} \quad T_2(s) = \frac{k_d}{s^2 + 2s + k_d}.$$

On obtient un dépassement maximum de 4 % si les pôles de  $T_2(s)$  sont de la forme  $-\sigma \pm j\sigma$  (sur les bissectrices). Du dénominateur de  $T_2(s)$  on déduit

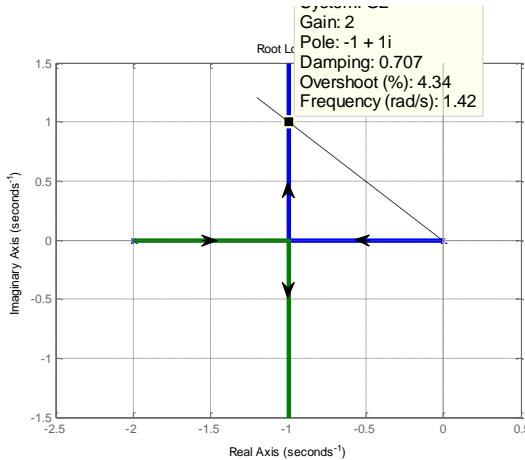
## 21 Commande des systèmes linéaires par retour de sortie

que  $2\sigma = 2$  et  $k_d = 2\sigma^2$ . D'où  $\sigma = \omega_a = 1$  et  $k_d = 2$ . Les caractéristiques de la réponse deviennent donc les suivantes :

- Constante de temps :  $\tau = 1/\sigma = 1$  sec.
- Temps de stabilisation :  $t_s = 4\tau = 4$  sec.
- Période des oscillations :  $T_a = 2\pi/\omega_a = 6.28$  sec.
- Nombre des oscillations :  $n = t_s/T_a = 0.636$
- Dépassement maximum : DM = 4 %.
- Erreur stationnaire de vitesse

$$e_{sv} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG_2(s)} = \frac{2}{k_d} = 1.$$

Ainsi, sans modifier l'amplitude des oscillations, cette politique (qui a poussé le lieu vers la gauche comme le montre la figure suivante) a accéléré de 2.6 fois la réponse et a diminué 3 fois l'erreur stationnaire de vitesse.



Supposons maintenant qu'on désire annuler l'erreur stationnaire de vitesse. Dans ce but, pour que la chaîne directe soit de type 2, on évite la simplification du pôle 0 de  $G_p$  et on simplifie seulement son pôle  $-1$  par le zéro  $\alpha$  de  $G_c$ . Le zéro  $\beta$  sera choisi différent de 0 mais voisin de 0 afin de ne pas trop rapprocher les asymptotes de l'axe des imaginaires (règle R8). Essayons donc la politique PID définie par

$$G_c(s) = k_d \frac{(s+1)(s+0.1)}{s}.$$

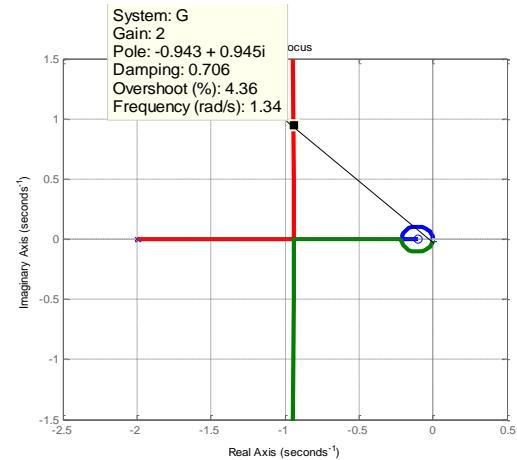
Pour cette commande, les fonctions de transfert de la chaîne directe et de la boucle fermée sont respectivement :

$$G_3(s) = k_d \frac{s+0.1}{s^2(s+2)}$$

et

$$T_3(s) = \frac{k_d(s+0.1)}{s^3 + 2s^2 + k_d s + 0.1k_d}.$$

Comme  $G_3(s)$  est de type 2, l'erreur stationnaire de vitesse est maintenant nulle. D'autre part, en représentant le lieu des racines de  $1 + G_3(s)$  (figure suivante), on constate que l'un des pôles de  $T_3(s)$  sera voisin du zéro  $-0.1$  quand les deux autres pôles arrivent aux bissectrices. L'amplitude du terme de la réponse relative à ce pôle est donc faible mais, étant voisine de l'axe des imaginaires, son influence est de longue durée. Provisoirement, malgré cette influence, nous ne tenons pas compte du pôle voisin du zéro  $-0.1$  et on s'intéresse seulement aux deux autres pôles (les dominants). Or, pour les points  $s$  du lieu éloignés de l'origine on a  $s \approx s + 0.1$  et la fonction de transfert  $G_3(s)$  en ces points peut être approximée par  $G_{3ap}(s) = k_d/(s+2)$ .

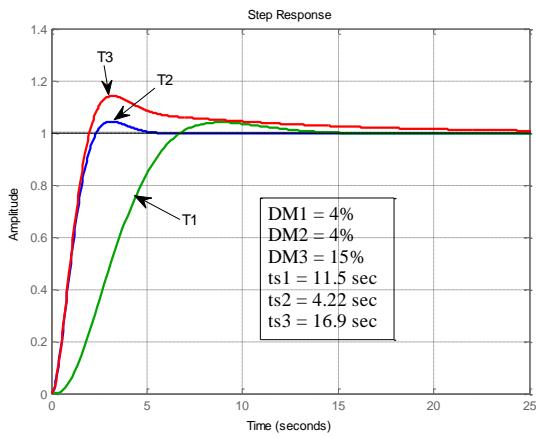


Ces pôles dominants vérifient donc le polynôme caractéristique approximatif

$$s^2 + 2s + k_d = 0.$$

Le dépassement maximum relatif à ces pôles est d'environ 4 % quand ils sont situés sur les bissectrices  $-\sigma \pm j\sigma$ . D'où  $2\sigma = 2$  et  $2\sigma^2 = k_d$ , c.à.d.  $\sigma = 1$  et  $k_d = 2$ . Pour obtenir les vraies caractéristiques de la réponse de  $T_3(s)$  quand  $k_d = 2$ , il est nécessaire de tenir compte de son zéro et son pôle négligés c.à.d de revenir à son expression exacte donnée ci-dessus. Ceci peut se faire analytiquement mais il est plus simple d'employer

l'instruction «`step(T3)`» de Matlab. Quelques essais peuvent parfois améliorer la valeur de  $k_d$ . La figure suivante montre les réponses des fonctions  $T_1(s)$ ,  $T_2(s)$  et  $T_3(s)$  relatives respectivement aux commandes P, PD et PID définies dans cet exemple.



On voit que le prix payé pour annuler l'erreur stationnaire de vitesse  $e_{sv}$  par la commande PID est un plus grand dépassement et un temps de stabilisation plus long.

#### EXERCICE 3-5

Un procédé  $G_p(s) = 1/(s^2 - a^2)$ ,  $a > 0$ , est commandé par le régulateur PID,  $G_c(s) = k(s + \alpha)/(s + \beta)/s$ . En choisissant  $\alpha = a$  pour simplifier le pôle stable de  $G_p$ ,

- a) à partir de quelle valeur de  $k$  la boucle fermée  $T(s)$  sera stable.
- b) Montrer que les pôles complexes de  $T(s)$  décrivent un cercle de centre  $-\beta$  et de rayon  $R = [\beta(\beta + a)]^{1/2}$ . Déduire les points de bifurcations et les valeurs de  $k$  correspondantes.
- c) On désire une réponse de constante de temps  $\tau$  et de facteur d'amortissement 0.5. Déterminer  $k$  et  $\beta$  en fonction de  $a$  et  $\tau$ .

#### EXERCICE 3-6

La sensibilité d'un pôle  $p$  aux variations du paramètre  $K$  vérifiant  $1 + KG(p) = 0$  se définit par

$$S_p^K = \frac{dp/p}{dK/K} = \frac{K}{p} \frac{dp}{dK}.$$

Expliquer pourquoi il est préférable que  $p$  ne soit pas en un point de bifurcation.

**Emploi de l'abaque de Nichols.** Voyons maintenant comment procéder pour construire un PID à partir de données fréquentielles. Signalons d'abord que si  $T(0) = 1$ , la boucle fermée  $T(s)$  admet généralement une approximation de second ordre  $T_{ap}(s) = \omega_n^2 / (s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)$  dont la constante de temps est  $\tau = 1/\xi\omega_n$  et son gain en  $\omega_n$  est  $1/2\xi$ . Pour  $\xi < (1/2)^{1/2}$ ,  $|T_{ap}(j\omega_n)| > (1/2)^{1/2} = |T_{ap}(j\omega_b)|$ , par définition de la bande passante  $\omega_b$ . D'où, pour ces valeurs de  $\xi$ , tenant compte de (3-33),

$$\omega_r < \omega_n < \omega_b \quad \text{et} \quad 1/\xi\omega_b < \tau < 1/\xi\omega_r. \quad (3-35)$$

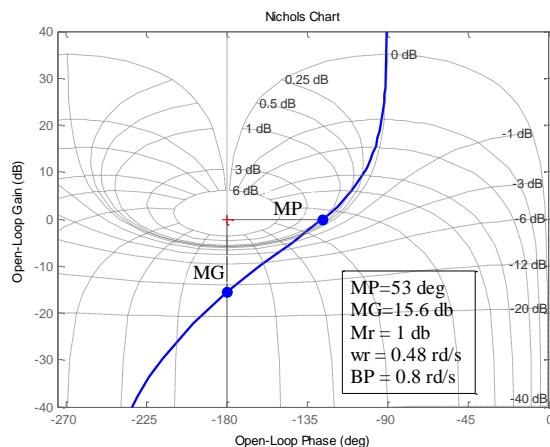
La réponse est donc d'autant plus rapide que  $\omega_r$  est grande et elle est d'autant plus lente que  $\omega_b$  est petite.

#### Exemple 3-11

Considérons de nouveau le procédé de l'exemple précédent :

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}.$$

Pour examiner d'abord la commande proportionnelle  $G_c(s) = k_p$ , représentons la courbe de Black de  $G(s) = k_p G_p(s)$  sur l'abaque de Nichols en commençant par  $k_p = 1$ .



À l'aide du curseur on peut lire les caractéristiques fréquentielles indiquées sur la figure :  $MP = 53^\circ$ ,  $MG = 15.6 \text{ db}$ ,  $M_r = 1 \text{ db}$ ,  $\omega_r = 0.48 \text{ rd/s}$  et  $BP = 0.8 \text{ rd/s}$ .

- Comme  $MP \gg 30^\circ$  et  $MG \gg 6 \text{ db}$ , la robustesse est très bonne.

-  $M_r \approx -20\log_{10}[2\xi(1 - \xi^2)^{1/2}] = 1 \text{ db} \Rightarrow \xi = 0.52$  d'où le dépassement maximum  $DM = \exp[-\pi\xi(1 - \xi^2)^{1/2}]$

## 23 Commande des systèmes linéaires par retour de sortie

est autour de 15 % ce qui est généralement acceptable.

- La bande passante  $BP = \omega_b$  (qui est la fréquence à l'intersection de la courbe de Black avec la courbe de niveau -3db) n'est que 0.8rd/s. De (3-35) on déduit que  $\tau > 1/(0.52 \times 0.8) = 2.4$  sec d'où la réponse sera très lente.

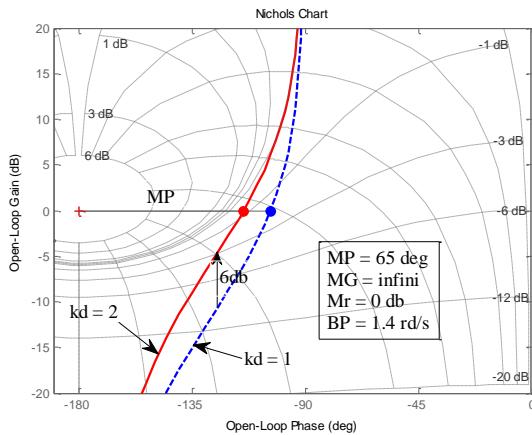
En augmentant la valeur de  $k_p$ , la courbe de black de  $G(j\omega)$  se translate vers le haut ce qui augmente  $\omega_b$  et  $\omega_r$  et accélère la réponse. Mais, en contre partie, les marges de stabilité MP et MG diminuent et la valeur de résonnance  $M_r$  augmente. Bien qu'il existe une marge pour diminuer MP et MG tout en conservant une bonne robustesse, l'augmentation de  $M_r$  conduit à un dépassement élevé.

Si on déplace la courbe de Black  $G(j\omega)$  vers la droite pour l'éloigner des courbes fermées de Nichols (de valeurs  $M > 0$ db), on peut alors, hausser verticalement  $G(j\omega)$  pour élargir la bande passante BP sans que la valeur de résonnance  $M_r$  dépasse de trop 0db. Or, déplacer  $G(j\omega)$  vers la droite revient à augmenter sa phase en lui ajoutant un zéro de petite valeur ou en simplifiant un pôle stable voisin 0. Dans le cas considéré le mieux est de simplifier le pôle -1 de  $G_p(s)$  par la commande PD,

$$G_c(s) = k_d(s + 1).$$

La fonction de transfert de la chaîne directe devient

$$G(s) = G_c(s)G_p(s) = \frac{k_d}{s(s+2)}.$$



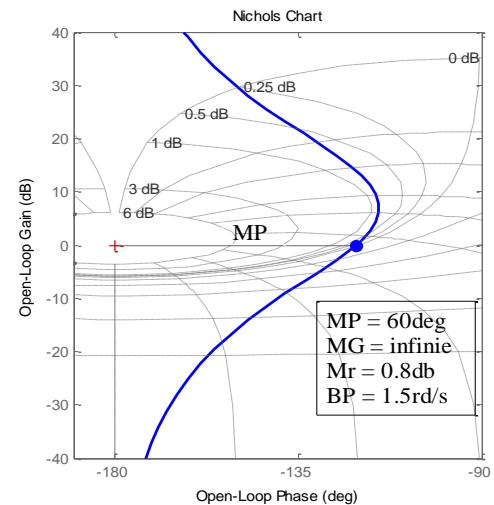
En représentant la courbe de Black de  $G(j\omega)$  pour  $k_d = 1$ , on constate qu'on peut la hausser verticalement de 6db, c.à.d. multiplier  $k_d$  par 2, sans qu'elle traverse les courbes fermées de Nichols. Ainsi, pour  $k_d = 2$ ,  $M_r = 0$ db d'où  $\xi = (1/2)^{1/2}$  (voir 3-33) et le dépassement est de l'ordre de 4%. D'autre part, on lit à l'aide du curseur sur la courbe finale rouge que la bande passante et la marge de phase sont devenues  $BP = 1.4$ rd/s et  $MP = 65^\circ$  tandis que la marge de gain est infinie. Cette commande PD a donc accéléré considérablement la réponse, réduit le dépassement maximum, amélioré la robustesse et elle a diminué l'erreur stationnaire de vitesse mais sans l'annuler.

S'il est exigé que cette erreur soit nulle, il faut introduire dans l'organe de commande un intégrateur. Mais comme ce dernier déplace la courbe de Black vers la gauche de  $90^\circ$ , il faut ajouter un zéro voisin de 0 afin de la rapprocher, pour  $\omega \geq \omega_r$ , de sa position précédente. En donnant à ce zéro la valeur -0.1, on obtient la commande PID définie par

$$G_c(s) = \frac{2(s+1)(s+0.1)}{s}$$

et l'expression de la fonction de transfert de la chaîne directe devient :

$$G(s) = \frac{2(s+0.1)}{s^2(s+2)}.$$



On voit sur l'abaque de Nichols qu'on a presque les mêmes caractéristiques obtenues par la commande PD à part une plus grande valeur de  $M_r$  c.à.d. un plus haut dépassement (environ 13%). C'est le prix à payer pour annuler l'erreur stationnaire de vitesse.

### EXERCICE 3-7

Soient  $G_p(s) = 1/(s^2 - 1)$  et  $G_c(s) = k(s + 1)(s + \beta)/s$  les fonctions de transfert du système commandé et de l'organe de commande.

- Écrire le polynôme caractéristique de la boucle fermée et déterminer  $k$  et  $\beta$  pour lesquels la constante de temps et le facteur d'amortissement des pôles sont  $\tau = 1/3$  sec et  $\xi = 1$ .
- En donnant à  $\beta$  la valeur trouvée dans a), déterminer à l'aide Matlab la valeur de  $k$  pour laquelle la bande passante de la boucle fermée est  $BP = 20$  rd/s, estimer la valeur de  $\xi$  de la boucle fermée et représenter sa réponse temporelle.

**Emploi du diagramme de Bode.** À cause de sa propriété d'additivité graphique :

$$|G_1(j\omega)G_2(j\omega)|^{db} = |G_1(j\omega)|^{db} + |G_2(j\omega)|^{db}, \\ \arg[G_1(j\omega)G_2(j\omega)] = \arg[G_1(j\omega)] + \arg[G_2(j\omega)],$$

le diagramme de Bode est jugé plus simple à employer pour concevoir l'organe de commande que l'abaque de Nichols. Avant d'en donner un exemple, établissons les relations approximatives entre la fréquence de coupure du gain  $\omega_{cg}$  et la rapidité de la réponse et entre la marge de phase MP et le dépassement maximum DM.

Si  $T(0) = 1$  c.à.d. si  $e_{sp} = 0$ , nous avons vu que l'approximation de second ordre de la fonction de transfert de la boucle fermée  $T(s)$  est

$$T_{ap}(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3-36)$$

Si  $T(0) \neq 1$ , le second membre de (3-36) doit être multiplié par  $T(0)$ . L'expression (3-36) peut aussi s'écrire sous la forme :

$$T_{ap}(s) = \frac{G_{ap}(s)}{1 + G_{ap}(s)} \quad \text{avec} \quad G_{ap}(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)}.$$

La fréquence de coupure du gain  $\omega_{cg}$  vérifie :

$$|G_{ap}(j\omega_{cg})| = 1 \quad \text{ou} \quad \omega_{cg}^2(\omega_{cg}^2 + 4\xi^2\omega_n^2) = \omega_n^4.$$

En résolvant cette dernière équation, on trouve

$$\omega_{cg} = \omega_n \sqrt{-2\xi^2 + \sqrt{1 + 4\xi^4}} \quad (3-37)$$

d'où

$$\omega_r < \omega_{cg} < \omega_n. \quad (3-38)$$

Comme pour  $\xi \leq (1/2)^{1/2}$ ,  $\omega_n \leq \omega_b$  (voir (3-35)), la bande passante est d'autant plus large et la réponse de  $T_{ap}(s)$  est d'autant plus rapide que  $\omega_{cg}$  est grand. Mais  $\omega_{cg}$  doit être inférieure à la plus faible fréquence des bruits afin d'éviter leur amplification.

D'autre part, la marge de phase étant définie par  $MP = \arg[G_{ap}(j\omega_{cg})] + 180^\circ$  où la fréquence  $\omega_{cg}$  est donnée par (3-37), on déduit de l'expression de  $G_{ap}(s)$  que

$$MP = 90 - \text{Arctg} \frac{\sqrt{-2\xi^2 + \sqrt{1 + 4\xi^4}}}{2\xi} \\ = \text{Arctg} \frac{2\xi}{\sqrt{-2\xi^2 + \sqrt{1 + 4\xi^4}}}.$$

Cette relation forme avec celle du dépassement maximum,  $DM = 100 \exp[-\pi\xi / (1 - \xi^2)^{1/2}] \%$ , les équations paramétriques liant DM à MP. Cette relation est représentée par la figure 3-15 qui montre que le dépassement maximum est d'autant plus faible que la marge de phase est grande.

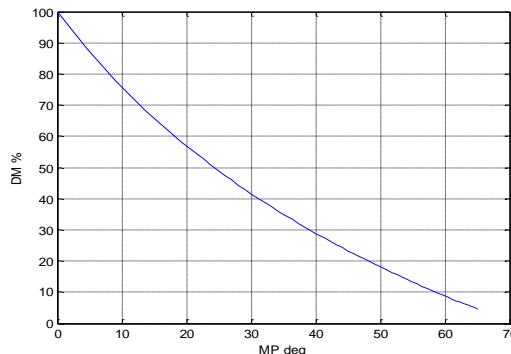


Fig. 3-15 Relation entre DM et MP

**Exemple 3-12**

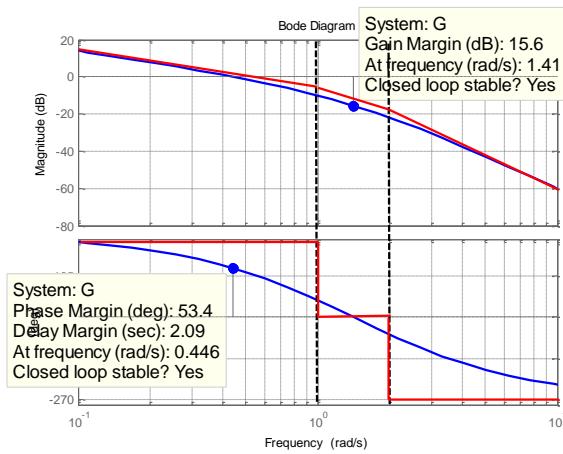
En considérant le procédé  $G_p(s)$  des exemples précédents commandé par  $G_c(s) = k$ , avec, pour commencer,  $k = 1$ , le tableau de l'approximation asymptotique  $G_a(s)$  de la chaîne directe

$$G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)}, \quad k=1,$$

est le suivant (voir exemple 2-5).

Intervalle	$G_a(s)$	$ G_a _{\text{int}}$ (db)	$m \text{ db/dc}$	$\phi^\circ$
$0.1 < \omega \leq 1$	$1/2s$	5 (14)	-20	-90
$1 < \omega \leq 2$	$1/2s^2$	1/2 (-6)	-40	-180
$2 < \omega$	$1/s^3$	1/8 (-18)	-60	-270
$\omega = 10$	$10^{-3}$	$10^{-3} (-60)$	-60	-270

Les diagrammes de Bode de  $G(j\omega)$  et  $G_a(j\omega)$  sont représentés sur la figure suivante.



On voit sur cette figure que la marge de gain et la marge de phase sont bonnes mais, la fréquence de coupure du gain étant faible ( $\omega_{cg} = 0.446 \text{ rad/s}$ ), la réponse sera très lente. Pour augmenter  $\omega_{cg}$ , il suffit de hausser la courbe de gain en augmentant la valeur du gain  $k$  de l'organe de commande. Mais, comme ceci ne modifie pas la courbe de phase, les marges de stabilité diminuent ce qui réduit la robustesse et augmente le dépassement maximum.

Si on augmente la phase en ajoutant à la boucle ouverte un zéro de petite valeur ou en simplifiant le pôle  $-1$ , le plus voisin de  $0$ , il devient possible de hausser la courbe de gain sans diminuer les marges

de stabilité. La commande PD,

$$G_c(s) = k_d(s + 1),$$

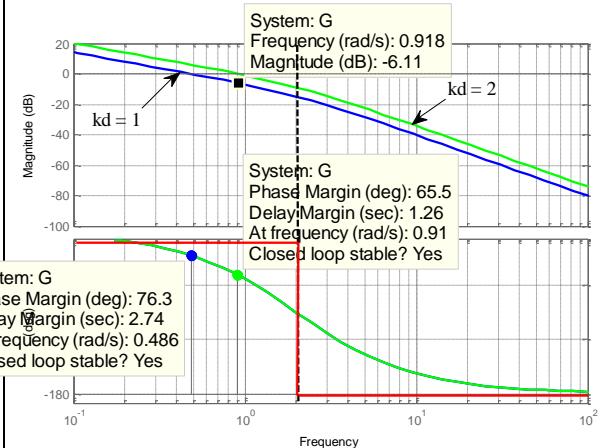
simplifie le pôle  $-1$  et la fonction de transfert de la boucle ouverte devient

$$G(s) = G_c(s)G_p(s) = \frac{k_d}{s(s+2)}$$

dont le tableau de Bode pour  $k_d = 1$  est le suivant (à comparer avec le tableau précédent).

Intervalle	$G_a(s)$	$ G_a _{\text{int}}$ (db)	$m \text{ db/dc}$	$\phi^\circ$
$0.1 < \omega \leq 2$	$1/2s$	5 (14)	-20	-90
$2 < \omega$	$1/s^2$	1/4 (-12)	-40	-180
$\omega = 10$	$10^{-2}$	$10^{-2} (-40)$	-40	-180

Sur le diagramme de Bode on lit que, pour  $k_d = 1$ , la marge de phase est augmentée de  $76.3^\circ - 53.4^\circ \approx 23^\circ$  et la marge de gain est devenue infinie. On peut donc hausser la courbe de gain pour accélérer la réponse tout en ayant une marge de phase suffisante.



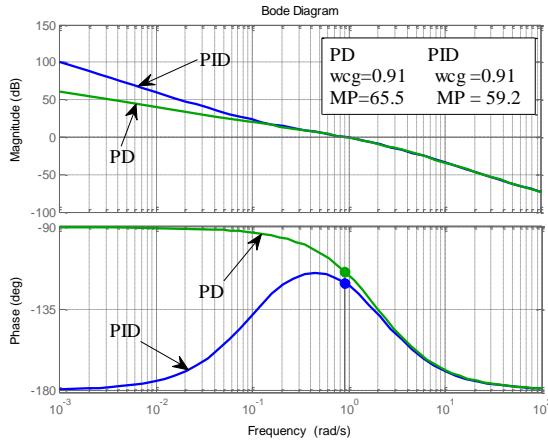
La figure 3-15, montre que si l'on désire un dépassement maximum de 4%, la marge de phase doit être égale à  $65^\circ$  d'où la fréquence de coupure du gain doit être celle pour laquelle la phase est égale à  $-180 + 65 = -115^\circ$ . On lit que cette fréquence est environ  $\omega_{cg} = 0.9 \text{ rad/s}$  et lui correspond un gain de  $-6 \text{ db}$ . On obtient donc la marge de phase désirée en haussant la courbe de gain de 6 db c.à.d. en multipliant  $k_d$  par 2. L'organe de commande sera le PD

$$G_c(s) = 2(s + 1).$$

S'il faut annuler l'erreur stationnaire de vitesse, il est nécessaire d'introduire dans l'organe de commande un intégrateur. Mais ceci diminue la phase de  $90^\circ$  et déplace la fréquence de coupure de gain de  $\omega_{cg}$  à  $\omega'_{cg}$  telle que  $|G_a(j\omega'_{cg})|/\omega'_{cg} = |G_a(j\omega_{cg})| = 1$ . De la première ligne du tableau de  $G_a(s)$ , on déduit que  $(\omega'_{cg})^2 = \omega_{cg}$ . La fréquence  $\omega'_{cg} = (\omega_{cg})^{1/2}$  est donc à mi-distance logarithmique entre 1 et  $\omega_{cg}$ . Ces modifications diminuent la marge de phase et augmentent donc le dépassement. Pour conserver la valeur de  $\omega_{cg}$  sans trop modifier la courbe de phase en cette fréquence (et à partir d'elle), on introduit dans l'organe de commande PD l'intégrateur et un zéro voisin de 0. En choisissant ce zéro en  $-0.1$  on récupère le  $G_a(s)$  du PD pour les fréquences  $\omega > 0.1$  et on arrive au même résultat obtenu par les méthodes d'Evans et de Nichols :

$$G_c(s) = \frac{2(s+1)(s+0.1)}{s} \quad \text{et} \quad G(s) = \frac{2(s+0.1)}{s^2(s+2)}.$$

La figure suivante permet de voir l'effet de l'intégrateur et du zéro ajoutés à la commande PD définie ci-dessus.



### EXERCICE 3-8

Le fonction de transfert du procédé à commander est  $G_p(s) = 1/(s^2 + 2s + 25)$ .

1) Déterminer la valeur  $k_p$  de la commande P,  $G_c(s) = k_p$ , pour que la fréquence de coupure du gain asymptotique soit  $\omega_{cga} = 10$  rad/sec. Calculer l'erreur stationnaire de position  $e_{sp}$  et estimer la marge de phase MP.

2) Déterminer le facteur  $k_d$  de la commande PD,  $G_c(s) = k_d(s + 5)$ , afin que  $\omega_{cga}$  conserve sa valeur précédente. Calculer la nouvelle valeur de  $e_{sp}$  et estimer celle de MP.

3) Pour annuler  $e_{sp}$ , on introduit un intégrateur et un autre zéro en  $-5$ . Que doit être la valeur de  $k_d$  de la commande PID,  $G_c(s) = k_d(s + 5)^2/s$ , afin de conserver la même valeur de  $\omega_{cga}$ ? Estimer MP et le dépassement maximum DM et vérifier ces résultats par Matlab.

### 3-6-2 Compensateurs

Un compensateur est un filtre passe-haut, passe-bas ou passe-bande qui peut, dans un certain intervalle de fréquences, augmenter la phase, la diminuer ou assouplir sa variation. Comme le PID, les compensateurs peuvent servir comme organes de commande. Dans cette section, nous décrirons 2 types de compensateurs : à avance de phase et à retard de phase et nous montrerons à l'aide d'exemples comment les employer en tant qu'organes de commande.

**Compensateur à avance de phase.** La fonction de transfert de ce compensateur est de la forme

$$G_c(s) = a \frac{s + 1/\tau}{s + a/\tau}, \quad a > 1. \quad (3-39)$$

La figure 3-16 montre le diagramme de Bode de  $G_c(s)$  avec ses asymptotes.

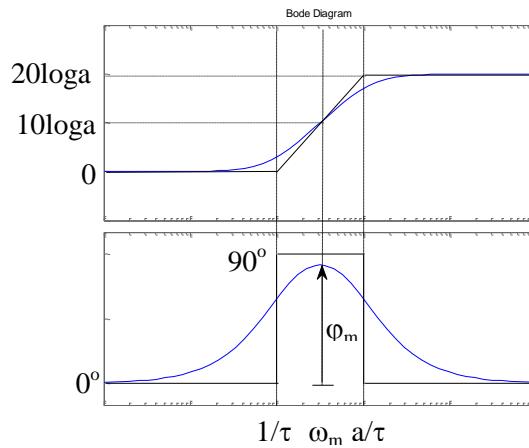


Fig. 3-16 Bode d'un compensateur à avance de phase

$G_c(s)$  est donc un filtre passe haut de gain 1 à faibles fréquences et  $a (> 1)$  à hautes fréquences. Sa phase est nulle loin de l'intervalle  $[1/\tau, a/\tau]$  et elle positive dans une région entourant cet intervalle, d'où son nom : compensateur à avance de phase (AP).

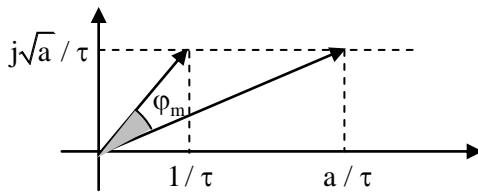
La phase est maximum au milieu logarithmique du segment  $[1/\tau, a/\tau]$  c.à.d. à la fréquence  $\omega_m$  telle que  $\log\omega_m = [\log(1/\tau) + \log(a/\tau)]/2$  ou

$$\omega_m = \frac{\sqrt{a}}{\tau}. \quad (3-40)$$

Le gain en  $\omega_m$  est le milieu logarithmique entre les deux asymptotes d'ordonnées 1 et  $a$ , c.à.d.

$$|G_c(j\omega_m)| = \sqrt{a} \quad (3-41)$$

et la phase en  $\omega_m$  est l'angle  $\varphi_m$  représenté par la figure suivante.



De cette figure on peut déduire que

$$\sin \varphi_m = \frac{a-1}{a+1}. \quad (3-42)$$

Ayant les relations (3-40), (3-41) et (3-42), il est possible de déterminer les paramètres  $a$  et  $\tau$  de  $G_c(s)$  de sorte que la performance et la robustesse de la boucle fermée soient acceptables.

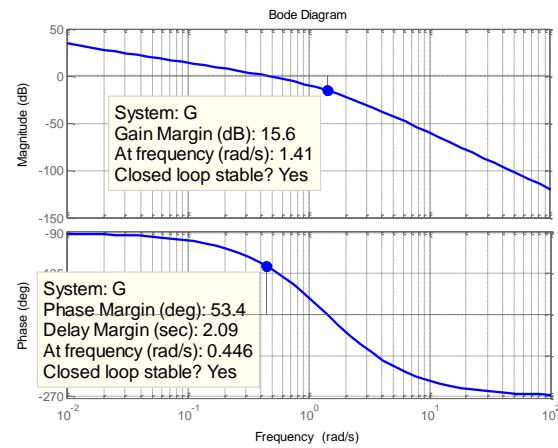
### Exemple 3-13

Considérons toujours le procédé

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

dont le diagramme de Bode, représenté de nouveau sur la figure suivante, montre que les marges de stabilité sont bonnes mais la fréquence de coupure du gain  $\omega_{cg} = 0.446$  rad/sec est faible, d'où la

réponse de la boucle fermée sera lente.



Un compensateur AP augmente la phase et, en haussant la courbe de gain, il augmente  $\omega_{cg}$ . Si l'on choisit une nouvelle fréquence de coupure de gain  $\omega_{cgn} (> \omega_{cg})$  pour laquelle la phase de  $G_p(s)$  n'est pas beaucoup plus petite que  $-180^\circ$  et si la fréquence de phase maximum  $\omega_m$  du compensateur AP est choisie égale à  $\omega_{cgn}$ , on peut espérer élargir la bande passante et obtenir en même temps une marge de phase acceptable.

Choisissons  $\omega_{cgn} = 1$  rad/sec. On lit sur le diagramme de Bode que  $|G_p(j1)| = -10.1\text{db}$  et  $\arg[G_p(j1)] = -162^\circ$ . Pour que la nouvelle fréquence de coupure de gain soit égale à  $\omega_{cgn}$ , le compensateur AP,  $G_c(s) = a(s + 1/\tau)/(s + a/\tau)$ , doit hausser la courbe de gain de  $10.1\text{db}$  à cette fréquence. Comme  $\omega_m = \omega_{cgn}$ , on déduit des relations (3-41), (3-42) et (3-40) que

$$\sqrt{a} = 10^{10.1/20} = 3.12 \quad \text{et} \quad a = 10.23,$$

$$\varphi_m = \text{Arcsin} \frac{9.23}{11.23} = 55^\circ,$$

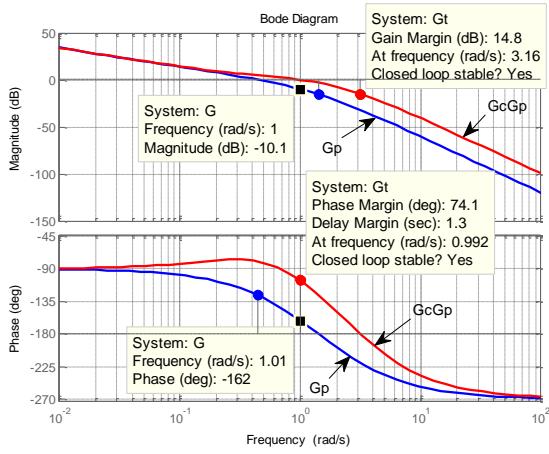
$$\frac{1}{\tau} = \frac{\omega_m}{\sqrt{a}} = \frac{1}{3.12} = 0.32\text{sec}^{-1}.$$

D'où  $G_c(s) = 10.23 \frac{s + 0.32}{s + 3.27}$

et

$$G(s) = G_c(s)G_p(s) = 10.23 \frac{s + 0.32}{s(s+1)(s+2)(s+3.27)}.$$

Avec cet organe de commande, la nouvelle marge de phase est donc  $MP = 180 - 162 + 55 = 73^\circ$ . La nouvelle marge de gain est  $MG = -20\log|G(j\omega_{cp})|$  où  $\omega_{cp}$  est la solution de  $\text{Im}[G(j\omega_{cp})] = 0$ . La figure suivante montre l'effet du compensateur AP ainsi construit sur la réponse fréquentielle et la robustesse.



Il est toujours utile de déterminer à l'aide de l'abaque de Nichols la bande passante, la fréquence et la valeur de résonnance et par la réponse temporelle le temps de stabilisation, le dépassement et le temps de monté. Si l'une de ses caractéristiques est jugé inacceptable, une autre valeur de  $\omega_{cgn}$  peut conduire à de meilleurs résultats.

### EXERCICE 3-9

On commande le procédé instable  $G_p(s) = 1/(s^2 - 1)$  par le compensateur  $G_c(s) = k(s+1)/(s+a)$ .

- 1) Déterminer  $a$  et  $k$  pour que la constante de temps de la boucle fermée  $\tau$  et le facteur d'amortissement  $\xi$  soient égales à 0.25sec et 0.707. Déduire l'erreur stationnaire de position et la marge de phase MP.
- 2) Représenter sur le même graphique les diagrammes de Bode de  $G_p(s)$  et de  $G(s) = G_c(s)G_p(s)$ .

Si l'on donne plus d'importance aux spécifications temporelles, il est généralement préférable d'employer le lieu d'Evans pour construire le compensateur AP.

### Exemple 3-14

Pour éloigner le lieu d'Evans de l'axe des imaginaires, un moyen consiste à éliminer par le zéro  $1/\tau$  de  $G_c(s) = k(s+1/\tau)/(s+a/\tau)$ ,  $a \geq 1$ , le pôle

stable du procédé  $G_p(s)$  le plus voisin de l'axe des imaginaires. Pour

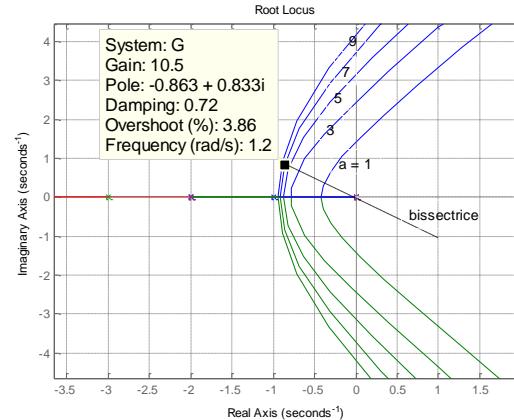
$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

on prend  $1/\tau = 1$ . La fonction de transfert de la chaîne directe devient

$$G(s) = G_c(s)G_p(s) = \frac{k}{s(s+2)(s+a)}$$

Par les instructions suivantes on représente sur le même graphique les lieux d'Evans de  $G(s)$  pour différentes valeurs de  $a$ .

```
>> hold
Current plot held
>> for a = 1:2:9
    z = []; p = [0 -2 -a];
    G = zpk(z,p,1);
    rlocus(G)
end
```



On constate sur cette figure que sur la bissectrice les deux pôles dominants ne se déplacent presque plus pour  $a \geq 7$  et le troisième pôle est au moins 7 fois plus éloigné de l'axe des imaginaires que les pôles dominants. Ces derniers caractérisent donc suffisamment bien la réponse temporelle. Sur le lieu relatif à  $a = 7$ , on lit à l'aide du curseur qu'un pôle p situé sur la bissectrice a les valeurs suivantes :

$$k = 10.5, p \approx 0.86 + 0.86j, \xi = 0.7 \text{ et } DM \approx 4\%$$

Le temps de stabilisation est  $t_s \approx 4\tau = 4/0.86 = 4.6\text{sec}$ , la période est  $T = 2\pi/\omega_a = 2\pi/0.86 = 7.3\text{sec}$

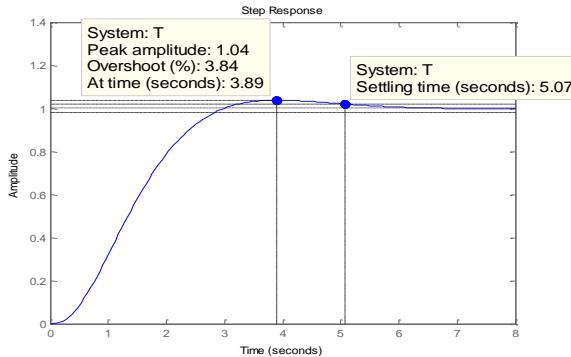
## 29 Commande des systèmes linéaires par retour de sortie

et le nombre des oscillations est  $n = t_s/T = 0.63$ .

On vérifie ces caractéristiques en représentant la réponse temporelle sous la commande

$$G_c(s) = 10.5 \frac{s+1}{s+7}.$$

```
>> z = -1; p = -7; k = 10.5;
>> Gc = zpk(z,p,k);
>> z = []; p = [0 -1 -2]; k = 1;
>> Gp = zpk(z,p,k);
>> G = Gc*Gp;
>> T = feedback(G,1);
>> step(T)
```



### EXERCICE 3-10

Pour l'exemple 3-14 précédent,

- 1) Montrer que le point de bifurcation  $s_b$  d'un lieu vérifie  $1 + (2a/3)(s_b+1)/s_b(s_b+4/3) = 0$  et déduire que  $s_b$  tend en décroissant vers  $-1$  quand  $a \rightarrow \infty$ .
- 2) Pour  $a = 7$ , déterminer par le calcul le pôle  $p$  sur la bissectrice et la valeur de  $k$  correspondante.

### EXERCICE 3-11

On commande le procédé  $G_p(s) = (s + 3)/s(s+1)$  par un compensateur AP,  $G_c(s) = k(s + 1/\tau)/(s + a/\tau)$ . Pour que le lieu d'Evans de  $G_c(s)G_p(s)$  passe par le point  $p = -3 + j$

- 1) Quelle valeur doit avoir  $\arg[G_c(p)]$ ?
- 2) Si l'on choisit  $1/\tau = 1$ , que doit être la valeur de  $a/\tau$ ? Représenter à l'aide de Matlab le lieu des racines.
- 3) Pour quelle valeur de  $k$  le point  $p$  est un pôle de la boucle fermée? Représenter à l'aide de Matlab la réponse temporelle de cette boucle.

**Compensateur à retard de phase.** La fonction de transfert de ce compensateur a la même forme que celle d'un compensateur à avance de phase à part que le paramètre  $a > 1$  est remplacé par un paramètre  $b < 1$ :

$$G_c(s) = b \frac{s + 1/\tau}{s + b/\tau}, \quad b < 1. \quad (3-43)$$

Le diagramme suivant montre que ce compensateur est un filtre passe bas dont la phase est négative.

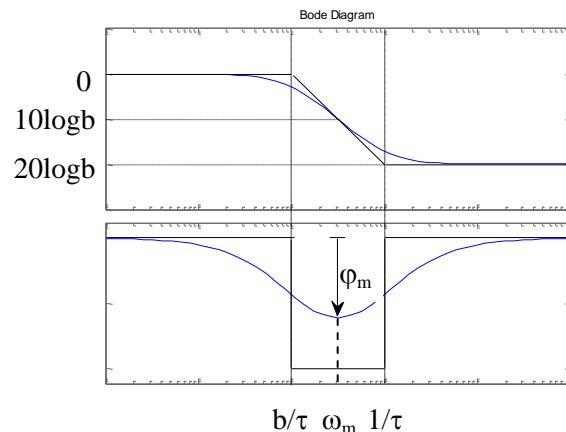


Fig. 3-17 Bode d'un compensateur à retard de phase

Les formules (3-40), (3-41) et (3-42) du compensateur à avance de phase (AP) sont aussi valables pour le compensateur à retard de phase (RP) mais, comme  $b < 1$ , le gain en décibels et la phase en degrés sont maintenant négatifs.

Le compensateur RP sert à améliorer la robustesse et l'erreur stationnaire en diminuant la fréquence de coupure du gain (la rapidité).

### Exemple 3-15

En commandant  $G_p(s) = 1/s(s + 1)(s + 2)$  par un organe P suivi d'un compensateur RP,

$$G_c(s) = kb \frac{s + 1/\tau}{s + b/\tau}, \quad b < 1,$$

l'erreur stationnaire de vitesse sera égale à 0.2 si

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G_p(s) = 5 \Rightarrow k = 10.$$

D'autre part, pour des fréquences  $\omega$  suffisamment supérieures à  $1/\tau$  (10 fois ou plus), le gain et la phase de  $G(j\omega) = G_c(j\omega)G_p(j\omega)$  vérifient

$$|G(j\omega)| \approx b |kG_p(j\omega)|$$

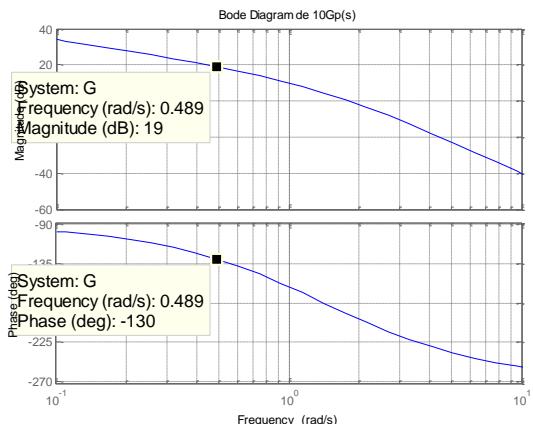
et  $\arg[G(j\omega)] \approx \arg[G_p(j\omega)]$ .

Si l'on désire que la marge de phase de  $G(j\omega)$  soit, par exemple,  $MP = 45^\circ$ , sa fréquence de coupure de gain  $\omega_{cg}$  et le paramètre  $b$  doivent vérifier

$$\arg[G_p(j\omega_{cg})] = -180 + 45 + 5 = -130^\circ$$

et  $b = \frac{1}{|kG_p(j\omega_{cg})|}$ .

Comme la phase du compensateur RP est légèrement négative à haute fréquence, nous avons ajouté  $5^\circ$  à  $\arg[G_p(j\omega_{cg})]$  afin de s'assurer que MP sera supérieure à  $45^\circ$



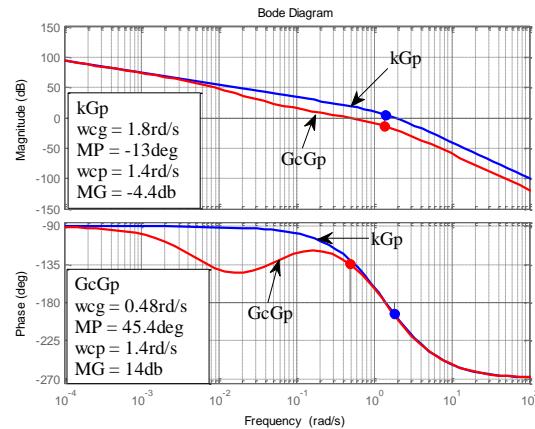
Sur le diagramme de Bode de  $kG_p(s)$ ,  $k = 10$ , ci-dessus, on lit que sa phase est égale à  $-130^\circ$  à la fréquence  $\omega_{cg} = 0.49$  rad/sec où le gain est égal à 19 db. Par conséquent,

$$b = \frac{1}{10^{19/20}} = 0.11 \quad \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_{cg}}{10} = 0.049 \text{ rad/sec.}$$

L'organe de commande est donc

$$G_c(s) = kb \frac{s + 1/\tau}{s + b/\tau} = 0.49 \frac{s + 0.049}{s + 0.0054}.$$

La figure suivante montre comment le compensateur RP modifie le diagramme de Bode de  $kG_p(j\omega)$  afin que la marge de phase soit égale à  $45^\circ$ . On remarque aussi que la marge de gain MG a passé de  $-4.4\text{db}$  à  $14\text{db}$  mais cette amélioration de la stabilité est au dépend de la rapidité puisque  $\omega_{cg}$  a diminué d'environ 3.75 fois.



### EXERCICE 3-12

Montrer que la phase d'un compensateur RP à la fréquence  $10/\tau$  est comprise entre  $-5^\circ$  et  $0^\circ$ .

### EXERCICE 3-13

Vérifier par le calcul les valeurs fournies par Matlab dans l'exemple précédent.

Un compensateur à retard de phase peut être employé pour diminuer l'erreur stationnaire sans trop modifier le régime transitoire. En effet, soit  $p$  un pôle dominant (racine de  $1 + kG_p(s) = 0$ ) ayant des caractéristiques temporelles acceptables ( $p$  assez loin de l'origine) mais que l'erreur stationnaire en ce point est grande. En introduisant le compensateur  $G_c(s) = (s + 1/\tau)/(s + b/\tau)$  avec  $b < 1$  et  $1/\tau$  très voisin de l'origine,  $p$  reste presque une racine du nouveau polynôme caractéristique  $1 + kG_c(s)G_p(s)$  car, étant éloigné de l'origine,  $G_c(p) \approx 1$ . Par conséquent, le régime transitoire se conserve mais, comme

$$\lim_{s \rightarrow 0} kG_c(s)G_p(s) = \frac{1}{b} \lim_{s \rightarrow 0} kG_p(s) > \lim_{s \rightarrow 0} kG_p(s),$$

l'erreur stationnaire diminue.

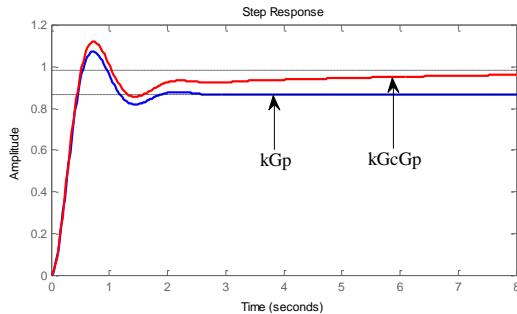
### 31 Commande des systèmes linéaires par retour de sortie

La figure suivante montre les réponses temporelles des boucles fermées à retour unitaire autour de

$$kG_p(s) = \frac{20}{(s+1)(s+3)}$$

et  $kG_c(s)G_p(s) = \frac{20(s+0.2)}{(s+0.02)(s+1)(s+3)}$ .

On voit que le compensateur RP diminue l'erreur stationnaire tout en conservant presque le même régime transitoire. En contre partie, comme ce compensateur introduit un pôle (non dominant) voisin de l'origine, il augmente le temps de stabilisation.



Pour terminer cette section, signalons que si un organe de commande ne répond pas à toutes les spécifications désirées, on peut placer deux organes en cascade de même type ou de deux types différents : PID suivi d'un compensateur AP ou RP, deux compensateurs AP ou un compensateur mixte l'un de type AP et l'autre RP.

#### 3-6-3 Méthode déductive

Jusqu'ici nous n'avons considéré que des systèmes de commande ayant la configuration à retour unitaire représentée par la figure 3-18 suivante.

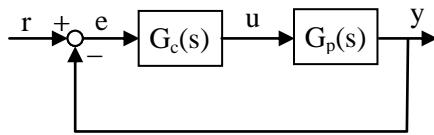


Fig. 3-18 Configuration à retour unitaire.

Pour cette configuration, la commande  $u$  est liée à la référence  $r$  et à la sortie  $y$  par la relation

$$u = G_c(s)(r - y) = \frac{N_c(s)r - N_c(s)y}{D_c(s)}$$

où  $N_c(s)$  et  $D_c(s)$  sont le numérateur et le dénominateur de  $G_c(s)$ . Pour généraliser, nous allons considérer dans cette section des commandes de la forme

$$u = \frac{N_r(s)r - N_y(s)y}{D_c(s)} \quad (3-44)$$

où les polynômes  $N_r(s)$  et  $N_y(s)$  ne sont pas nécessairement égaux. Cette commande dite à deux paramètres  $N_r/D_c$  et  $N_y/D_c$  peut être représentée par la figure 3-19.

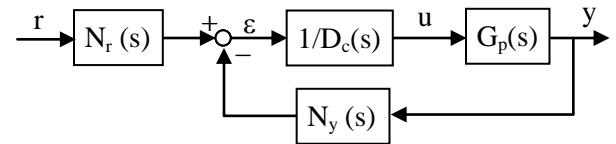


Fig. 3-19 Configuration à 2 paramètres.

Pour que le procédé  $G_p(s) = N(s)/D(s)$  et que les fonctions de transfert de  $r$  à  $u$  et de  $y$  à  $u$  soient propres, il est nécessaire que

$$\begin{aligned} d^0 N &\leq d^0 D = n, \\ d^0 N_r &\leq d^0 D_c = n_c \quad \text{et} \quad d^0 N_y \leq d^0 D_c = n_c. \end{aligned} \quad (3-45)$$

En admettant que les polynômes  $N(s)$  et  $D(s)$  du procédé sont premiers entre eux, la méthode déductive consiste à déterminer les polynômes  $N_r(s)$ ,  $N_y(s)$  et  $D_c(s)$  définissant la commande  $u$  afin d'obtenir une fonction de transfert désirée  $T(s) = y(s)/r(s)$  du système global. Or, de la figure 3-19 on déduit que

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{N_r(s)N(s)/D_c(s)D(s)}{1 + N_y(s)N(s)/D_c(s)D(s)}, \\ &= \frac{N_r(s)N(s)}{D_c(s)D(s) + N_y(s)N(s)} = \frac{N_T(s)}{D_T(s)} \end{aligned} \quad (3-46)$$

et on choisit les polynômes  $N_T(s)$  et  $D_T(s)$  premiers entre eux. Cependant ce choix n'est pas tout à fait arbitraire puisque  $T(s)$  doit être asymptotiquement

stable et propre. Ces contraintes se traduisent par les conditions suivantes.

**C<sub>1</sub>.** Nous savons que  $T(s)$  est asymptotiquement stable si tous ses pôles sont stables sans que les pôles instables soient simplifiés par des zéros. Ceci implique, d'après (3-46), que les pôles de  $T(s)$  doivent être tous à partie réelle négative et que les zéros à partie réelle positive de  $G_p(s)$ , c.à.d. de  $N(s)$ , doivent être tous des zéros de  $T(s)$ .

**C<sub>2</sub>.** Désignons par  $m_r$  et  $m$  les degrés de  $N_r$  et  $N$  et par  $n_T$  et  $m_T$  les degrés de  $D_T$  et  $N_T$ . Comme  $d^oD_cD \geq d^oN_yN$ , on déduit de (3-46) que

$$(n_c + n) - (m_r + m) = n_T - m_T$$

ou

$$n_c - m_r = (n_T - m_T) - (n - m).$$

Pour que  $N_r/D_c$  soit propre ( $n_c \geq m_r$ ) il est nécessaire que l'excès des pôles de  $T(s)$  (la différence entre les degrés du dénominateur et du numérateur) soit au moins égal à celui de  $G_p(s)$ :

$$n_T - m_T \geq n - m. \quad (3-47)$$

**C<sub>3</sub>.** Si l'erreur stationnaire de position doit être nulle, il est nécessaire que  $T(0) = 1$ .

**Procédure.** Ayant défini une fonction de transfert  $T(s)$  satisfaisant aux conditions précédentes, posons

$$\frac{T(s)}{N(s)} = \frac{N_T(s)}{D_T(s)N(s)} = \frac{N_0(s)}{D_0(s)} \quad (3-48)$$

où  $N_0$  et  $D_0$  sont premiers entre eux après la simplification des facteurs communs à  $N_T(s)$  et  $N(s)$ . D'où (3-46) devient

$$\frac{N_r(s)}{D_c(s)D(s) + N_y(s)N(s)} = \frac{N_0(s)}{D_0(s)}. \quad (3-49)$$

En prenant  $N_r(s) = N_0(s)$ , les coefficients des deux autres polynômes de la commande,  $D_c$  et  $N_y$ , s'obtiennent par identification des deux membres de l'équation

$$D_c(s)D(s) + N_y(s)N(s) = D_0(s).$$

Le nombre d'inconnues est  $(d^oD_c + 1) + (d^oN_y + 1) = 2n_c + 2$  (car on peut choisir  $N_y$  tel que  $d^oN_y = n_c$ ) et l'identification donne  $d^oD_c + d^oD + 1 = n_c + n + 1 = d^oD_0 + 1 = n_0 + 1$  équations. Or la solution n'est possible que si le nombre des inconnues est au moins égal au nombre d'équations c.à.d. il est nécessaire que  $2n_c + 2 \geq n_c + n + 1 = n_0 + 1$  d'où

$$n_c \geq n - 1 \quad \text{et} \quad n_0 \geq 2n - 1. \quad (3-50)$$

Si  $n_0 < 2n - 1$ , on remplace le second membre de (3-49) par  $N_0(s)A(s)/D_0(s)A(s)$  où  $A(s)$  est un polynôme arbitraire de degré supérieur à  $2n - 1 - n_0$  et dont les racines sont toutes à partie réelle négative, moins dominantes que les racines de  $D_0(s)$ . Dans ce cas on prend donc

$$N_r(s) = N_0(s)A(s) \quad (3-51)$$

et de

$$D_c(s)D(s) + N_y(s)N(s) = D_0(s)A(s) \quad (3-52)$$

on détermine  $D_c$  et  $N_y$  par identification.

### Exemple 3-16

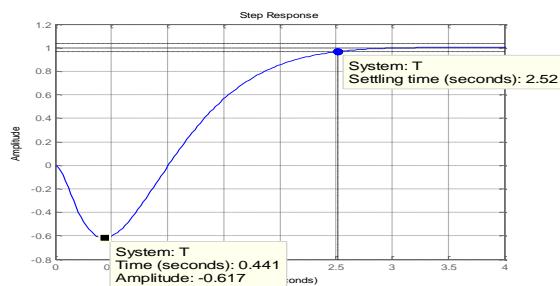
La fonction de transfert du procédé est

$$G_p(s) = \frac{s-1}{s(s^2-4)}. \quad (1)$$

Le zéro à prp de  $G_p$  doit être maintenu dans la fonction de transfert  $T(s)$  et l'excès des pôles de  $T(s)$  doit être au moins égal à celui de  $G_p$  c.à.d. à 2. Prenons

$$T(s) = \frac{-50(s-1)}{(s+10)(s^2+4s+5)} \quad (2)$$

où le pôle  $-10$  est non dominant, les deux autres pôles sont choisis de sorte que la réponse soit suffisamment rapide et peu oscillatoire et le facteur  $-50$  rend  $T(0) = 1$  ( $e_{sp} = 0$ ). La figure suivante représente la réponse temporelle de  $T(s)$ .



### 33 Commande des systèmes linéaires par retour de sortie

Pour déterminer les polynômes  $N_r$ ,  $N_y$  et  $D_c$  de la commande à deux paramètres qui réalise  $T(s)$ , on pose :

$$\frac{N_0(s)}{D_0(s)} = \frac{T(s)}{N(s)} = \frac{-50}{(s+10)(s^2 + 4s + 5)}. \quad (3)$$

Comme  $d^0 D_0 = 3 < 2n - 1 = 5$ , on introduit un polynôme  $A(s)$  de second degré dont les racines sont à prn éloignées de l'axe des imaginaires. En prenant  $A(s) = (s + 10)^2$ , (3-51) donne

$$N_r(s) = N_0(s)A(s) = -50(s+10)^2$$

et, tenant compte de (1) et (3), l'équation (3-52) s'écrit :

$$\begin{aligned} (a_2 s^2 + a_1 s + a_0)(s^3 - 4s) + (b_2 s^2 + b_1 s + b_0)(s - 1) \\ = (s+10)^3(s^2 + 4s + 5) \\ = s^5 + 34s^4 + 425s^3 + 2350s^2 + 5500s + 5000 \end{aligned}$$

où les  $a_i$  et les  $b_i$  sont les coefficients de  $D_c(s)$  et  $N_y(s)$ . En égalisant les termes de même puissance des deux membres de l'équation précédente, on obtient l'équation matricielle suivante :

$$\left( \begin{array}{cc|cc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ a_1 \\ b_1 \\ a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 34 \\ 425 \\ 2350 \\ 5500 \\ 5000 \end{pmatrix}.$$

Remarquer que les deux premières colonnes de la matrice sont les coefficients de  $D(s)$  et  $N(s)$  et que les autres pairs de colonnes sont décalés l'un par rapport au précédent d'une ligne. En résolvant cette équation ( $Ax = B \Rightarrow x = \text{inv}(A)*B$ ), on tire

$$D_c(s) = (3s^2 + 102s - 13415) / 3$$

$$N_y(s) = (14702s^2 + 22160s - 15000) / 3.$$

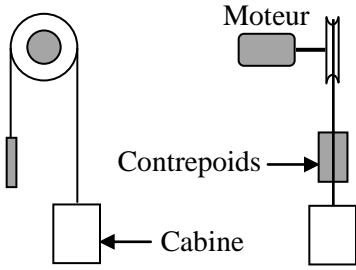
Le lecteur peut vérifier qu'avec les polynômes  $N_r$ ,  $N_y$  et  $D_c$  ainsi obtenus, la fonction de transfert  $T(s)$  entre  $r$  et  $y$  est effectivement celle donnée en (2).

#### EXERCICE 3-14

- 1) Montrer que le choix du polynôme  $A(s)$  n'affecte pas la commande  $u$  d'une configuration à deux paramètres.
- 2) Pour un procédé  $G_p(s) = 1/s(s - 1)$  et une fonction de transfert désirée  $T(s) = 8/(s^2 + 4s + 8)$  et  $A(s) = s + a$ , déterminer en fonction de  $a$  les polynômes  $N_r$ ,  $N_y$  et  $D_c$ .
- 3) Écrire la fonction de transfert  $H(s)$  entre une perturbation  $d$  à la sortie de  $G_p(s)$  et la réponse  $y$  et représenter à l'aide de Matlab la réponse temporelle de  $H(s)$  pour différentes valeurs de  $a$ . Conclure sur le choix de  $a$ .
- 4) Étudier à l'aide de Matlab l'effet de  $a$  sur la robustesse et conclure sur le choix de  $a$ .

**AUTRES EXERCICES ET COMPLÉMENTS**

**3-15.** La figure suivante montre de face et de côté un ascenseur entraîné par un moteur cc commandé par son courant  $i$  d'induit dont l'inductance est négligeable et la résistance est  $R$ . Le facteur de couple  $k$  ( $\Gamma_m = ki$ ) est égal au facteur de la force contre électromotrice ( $e_b = k\Omega$ ). Le contrepoids et la cabine ont la même masse  $M$ , le rayon de la poulie est  $r$ , le facteur de frottement sur l'axe moteur est  $c$  et on néglige l'inertie du rotor et de la poulie.



1) Montrer que la fonction de transfert entre la tension  $u$  appliquée à l'induit et la vitesse  $v$  de la cabine est de la forme  $G_p(s) = v_L/(\tau s + 1)$ .

2) En remplaçant les paramètres par leurs valeurs et en multipliant par les gains de l'actionneur et du capteur, on obtient

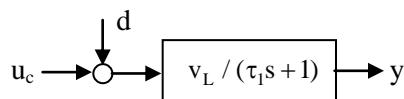
$$G_p(s) = y(s)/u_c(s) = 1/(s + 2)$$

où  $y$  est la tension représentant  $v$  à la sortie du capteur et  $u_c$  est la tension de commande appliquée à l'actionneur. Sachant que le gain du capteur est 1 volt/(m/s), que vaut la vitesse limite  $v_L$  de la cabine quand  $u_c = 1$  volt et en combien de temps cette vitesse sera atteinte ?

3) On désire que la fonction de transfert du système global soit  $T(s) = y(s)/r(s) = 4/(s + 4)$ . Déterminer la fonction de transfert de l'organe de commande

- a)  $G_{c1}(s)$  en boucle ouverte (sans signal de retour)
- b)  $G_{c2}(s)$  en boucle fermée (avec retour unitaire).

4) Tenant compte de la variation de la masse des passagers, la masse de la cabine est en fait  $M + m$  au lieu de  $M$ ,  $m$  étant une masse variable. Déterminer en fonction de  $m$  et des autres paramètres de l'ascenseur la nouvelle constante de temps  $\tau_1$  de  $G_p(s)$  et la perturbation  $d$  à son entrée (voir figure suivante).



5) Pour  $m = 2M$ , comparer les réponses temporelles du système commandé par  $G_{c1}(s)$  en boucle ouverte et par  $G_{c2}(s)$  en boucle fermée quand

- a)  $r = 1$  et  $d = 0$ ,
- b)  $r = 0$  et  $d = 1$ .

Conclure.

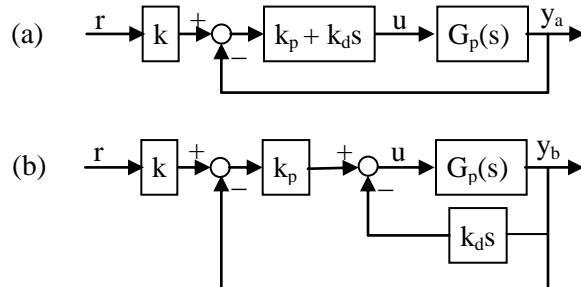
**3-16.** Soit le processus  $G_p(s) = 1/(s - 1)$ .

- a) Que doit être l'organe de commande en boucle fermée à retour unitaire  $G_c(s)$  afin que la fonction de transfert globale entre la référence  $r$  et la réponse  $y$  soit  $T(s) = 1/(s + 1)$ ? Est-ce que ce système de commande sera intérieurement stable ?
- b) Que doit être  $G_c(s)$  si l'il est placé dans la chaîne de retour au lieu de la chaîne directe ? Le système de commande sera-t-il intérieurement stable ?

**3-17.** Le procédé  $G_p(s) = 1/s(s + 2)$  est commandé par un organe  $G_c(s)$  avec retour unitaire.

- 1) Si  $G_c(s) = k$  (de type P), déterminer  $k$  pour que le taux d'amortissement  $\xi$  de ce système soit égal à 0.5. Calculer, pour cette valeur de  $k$ , l'erreur stationnaire de vitesse  $e_{sv}$  et la constante de temps  $\tau$ .
- 2) Déterminer un compensateur AP de sorte que  $\xi$  et  $e_{sv}$  conservent leurs valeurs précédentes mais que  $\tau$  soit divisé par 2.
- 3) Déterminer un compensateur AP tel que  $e_{sv} = 0.05$  et la marge de phase supérieure à  $40^\circ$ .
- 4) Déterminer un compensateur RP tel que  $e_{sv} = 0.05$ ,  $\tau = 1$  sec et  $\xi = 0.5$ .
- 5) Déterminer un organe de commande PID pour lequel la boucle fermée est de second ordre ayant une erreur stationnaire de vitesse nulle, une constante de temps  $\tau = 0.5$  sec et un taux d'amortissement  $\xi = (1/2)^{1/2}$ .

**3-18.** Un procédé  $G_p(s)$  est commandé par l'une des configurations (a) et (b) suivantes où  $k$ ,  $k_p (> 0)$  et  $k_d (> 0)$  sont des constantes.

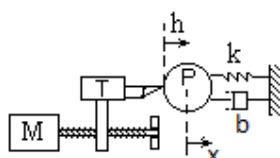


- 1) Montrer que les deux systèmes ont les mêmes pôles, la même erreur stationnaire de position  $e_{sp}$  mais un zéro de (a) n'apparaît pas dans (b).
- 2) Montrer que  $y_a = y_b + (k_d / k_p)\dot{y}_b$  et déduire que  $y_b$  est plus amortie que  $y_a$ .
- 3) Montrer que la valeur de  $k$  qui annule  $e_{sp}$  dépend des termes constants de  $G_p(0)$ .
- 4) Pour  $G_p(s) = 1/(s^2 + 1)$ ,  $k_p = 12$ ,  $k_d = 4$  et  $e_{sp} = 0$ , comparer les réponses temporelles et fréquentielles des deux configurations ainsi que leur robustesse.

**3-19.** Soit un procédé  $G_p(s) = 1/(s^2 - 4)$ .

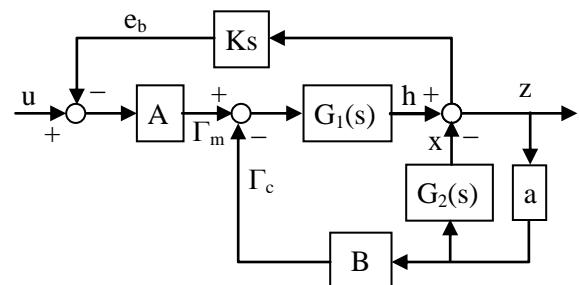
- 1) Déterminer les coefficients d'un organe de commande de la forme  $G_c(s) = (b_1s + b_0)/(a_1s + a_0)$  tel que  $2 \pm 2j$  et  $-8$  soient les pôles de la boucle fermée unitaire  $T(s)$ . Que sera l'erreur stationnaire de position  $e_{sp}$  ?
- 2) Déterminer les coefficients de  $G_c(s) = (b_2s^2 + b_1s + b_0)/(a_2s^2 + a_1s + a_0)$  qui annule  $e_{sp}$  et place les pôles de  $T(s)$  en  $2 \pm 2j$ ,  $-8$  et  $-8$ .
- 3) Vérifier que le lieu d'Evans de  $kG_c(s)G_p(s)$  passe par les pôles de 2) pour  $k = 1$ .

**3-20.** La figure suivante représente un système d'usinage d'une pièce P montée sur un tour.

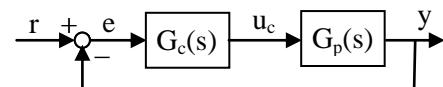


Au repos, l'outil de coupe est juste en contact avec la pièce à l'extrémité de son diamètre horizontal. Pour l'enfoncer dans la pièce, on déplace le porte-outil T à l'aide d'un moteur cc commandé par son induit et d'une vis sans fin de pas p. Sous l'action de ce déplacement  $h$ , l'outil s'enfonce de  $z$  dans la pièce et fléchit celle-ci de  $x$ . Pour décrire les variations de  $x$ , on modélise la pièce par une masse  $m$  liée à un ressort de rigidité  $k$  et à un amortisseur de facteur  $b$ . On admet que l'enfoncement  $z$  de l'outil dans la pièce nécessite une force  $f = az$ . D'autre part, le moment d'inertie de l'axe moteur (rotor et vis) est  $J$ , le facteur de frottement sur cet axe est  $c$  et la masse de l'outil est négligeable. L'induit du moteur a une résistance  $R$  et une inductance négligeable. Le facteur de la tension contre-électromotrice est égal au facteur du couple  $k_a$  ( $\Gamma_m = k_a i$ ,  $e_b = k_a \Omega$ ).

- 1) Le schéma-bloc suivant montre comment l'enfoncement  $z$  est lié à la tension  $u$  appliquée au moteur. Écrire en fonction des paramètres du système les expressions des constantes K, A, B et des fonctions de transfert  $G_1$  et  $G_2$ . Déduire la fonction de transfert  $G(s) = z(s)/u(s)$ .



L'enfoncement  $z$  est mesuré en tout instant par un capteur placé entre l'outil et la pièce et le signal de mesure  $y$  est ramené à un organe de commande  $G_c(s)$  suivi d'un organe d'action. L'ensemble est équivalent au schéma suivant où  $G_p(s)$  regroupe l'organe d'action, le système commandé et l'organe de mesure.



On suppose qu'en remplaçant les paramètres par leurs valeurs, on obtient :

$$G_p(s) = \frac{s^2 + 2s + 26}{(s+1)(s+3)(s^2 + 4s + 8)}.$$

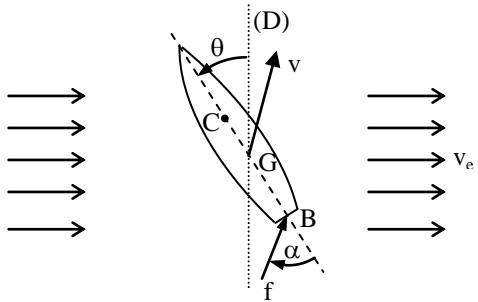
- 2) Si  $G_c(s) = k_p$ , représenter à l'aide de Matlab le lieu d'Evans et déterminer a) les valeurs de  $k_p$  pour lesquels le système sera stable, b) la valeur  $k_{pb}$  de  $k_p$  pour laquelle la constante de temps est minimum et c) les valeurs de  $k_p$  pour lesquelles l'erreur stationnaire de position est inférieure à 0.1 et le système est stable.

- 3) Écrire l'expression de  $G_c(s)$  qui élimine les zéros et les pôles complexes de  $G_p(s)$ , remplace le pôle  $-3$  par un zéro en  $-3$  et produit une réponse temporelle de la boucle fermée d'erreur stationnaire de position nulle et de constante de temps 0.2 sec.

- 4) Déterminer les polynômes  $N_r$ ,  $D_c$  et  $N_y$  d'une commande à deux paramètres pour laquelle la fonction de transfert du système global est la même que celle obtenue en 3).

- 5) Comparer à l'aide de Matlab la robustesse des deux politiques 3) et 4).

3-21.



Un bateau de masse  $m$  et de moment d'inertie  $J$  autour de son centre de gravité  $G$  doit traverser une rivière perpendiculairement au courant d'eau dont la vitesse est  $v_e$ . L'hélice de propulsion qui exerce une force  $f$  de module constant peut tourner dans un plan horizontal autour d'un point  $B$  à l'arrière du bateau. On admet que le courant d'eau exerce au centre de poussé  $C$  du bateau une force  $f_e = a(v_e - v)$  où  $v$  est la vitesse de  $G$ . On désigne par  $\alpha$  l'angle entre l'axe du bateau et  $f$  et par  $b$  et  $c$  les distances entre  $G$  et les points  $B$  et  $C$ .

1) Écrire les équations de translation de  $G$  dans la direction  $x$  de  $v_e$  et dans la direction  $y$  de la droite (D) perpendiculaire à  $v_e$  ainsi que l'équation de rotation  $\theta$  du bateau autour de  $G$ .

2) On désire que la vitesse selon  $x$  soit  $v_x = 0$  et que  $v_y = v_0 = c^{\text{te}}$  et  $\theta$  constant. Que doivent être  $\alpha$ ,  $f$  et  $\theta$  en fonction de  $v_0$ ? Linéariser les équations obtenues en 1) autour de ce point de fonctionnement et déduire la fonction de transfert entre l'entrée  $u = \alpha$  et la sortie  $y = v_x$ .

3) Pour  $m = 2000 \text{ Kg}$ ,  $J = 8000 \text{ Kgm}^2$ ,  $a = 400 \text{ N/(m/s)}$ ,  $b = 4 \text{ m}$  et  $c = 1 \text{ m}$ , établir une politique de commande qui ramène rapidement et sans trop d'oscillation la vitesse  $v_x$  à 0 chaque fois qu'il s'en écarte.