

Chapitre 4

MODÉLISATION DES SYSTÈMES DISCRETS

Considérons de nouveau la structure de base d'un système de commande automatique (fig. 4-1).

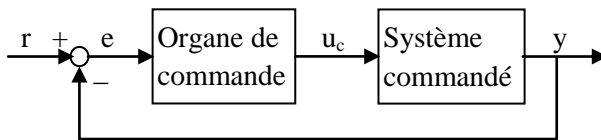


Fig. 4-1 Structure de base d'un système de commande

Le système commandé (le procédé) englobe l'objet commandé proprement dit ainsi que les actionneurs et les capteurs. En fonction d'un signal de commande u_c , l'actionneur agit sur l'objet commandé par une action u (tension, courant, pression, ...) et les capteurs mesurent la réponse de cet objet en la transformant en un signal y . L'organe de commande a pour rôle d'associer à l'écart e entre la référence r et la mesure y de la réponse un signal de commande u_c qui, par son effet sur l'actionneur et par suite sur l'objet commandé, tend à diminuer $|e|$.

L'organe de commande effectue essentiellement une opération mathématique qui peut être exécutée soit par un circuit analogique constitué d'amplificateurs opérationnels, de résistances et de capacités, comme nous l'avons fait jusqu'ici, soit numériquement par un programme introduit dans la mémoire d'un microprocesseur (μp). Les principaux avantages de cette dernière solution, dite discrète ou numérique, sont les suivants.

- Pour modifier la valeur d'un paramètre de la commande, il suffit de taper sur un clavier sa nouvelle valeur au lieu de démonter un ou plusieurs composants du circuit analogique et les remplacer par d'autres.

- La valeur d'un paramètre peut être introduite avec précision ce qui n'est pas le cas pour la réalisation électronique dont la précision est conditionnée par les valeurs des composants disponibles sur le marché.
- Dans un même μp on peut introduire plusieurs programmes destinés à commander plusieurs machines en *temps partagé* (time shearing).
- Au programme principal de commande on peut ajouter des instructions auxiliaires d'affichage et de protection permettant une meilleure supervision des installations commandées.
- Une plus grande immunité aux bruits.

En contre partie et contrairement à la commande analogique, le temps d'exécution du programme crée un retard entre l'instant de lecture de l'écart e et l'instant où le μp fournit la valeur correspondante du signal de commande u_c . Il est nécessaire de tenir compte de ce retard afin d'éviter les oscillations qu'il peut engendrer.

D'autre part, le microprocesseur ne peut traiter que des signaux digitaux alors que le système commandé est généralement analogique. Il est donc nécessaire d'intercaler entre ces sous systèmes une interface qui effectue la conversion du digital à l'analogique et de l'analogique au digital. Les éléments de cette interface et le fonctionnement du μp seront décrits au paragraphe suivant. La transformée Z qui jouera pour les signaux digitaux le même rôle que joue la transformée de Laplace pour les signaux analogiques fera l'objet du paragraphe 2. Dans les autres paragraphes seront modélisés les systèmes digitaux à échantillonnage synchrone, asynchrone ou à des fréquences multiples.

4-1 LES ORGANES DE LA COMMANDE DISCRÈTE

Fonctionnement du μp . Un signal digital est une suite de nombres binaires chacun de n bits ($n = 8, 16$ ou 32). Un bit est matérialisé par la tension d'un fil électrique à laquelle on associe la valeur logique 1 si elle est haute, la valeur logique 0 si elle est basse. Dans un système de commande numérique, le microprocesseur transforme le signal digital constitué des valeurs successives $e(k)$ de l'erreur en un autre signal digital constitué des valeurs correspondantes $u_c(k)$ de la commande. Ceci est accompli en répétant continuellement deux opérations : 1) la communication avec l'extérieur et 2) l'exécution d'un programme introduit dans la mémoire du microprocesseur. À chaque impulsion d'une horloge H de période T , le microprocesseur communique avec l'extérieur pour recevoir à son entrée un nouveau nombre $e(k)$ et délivrer à sa sortie le résultat $u_c(k-1)$ du programme exécuté durant la période précédente. Ceci est illustré par la figure 4-2 où $e(k)$ est la valeur de l'entrée reçue à la $k^{\text{ème}}$ impulsion de l'horloge et $u_c(k-1)$ est la valeur délivrée à la sortie juste après cet instant. La durée de la lecture de $e(k)$ et de l'écriture de $u_c(k-1)$ étant beaucoup plus petite que la durée de l'exécution du programme (quelques dizaines de millisecondes), on peut admettre que ces deux opérations sont instantanées.

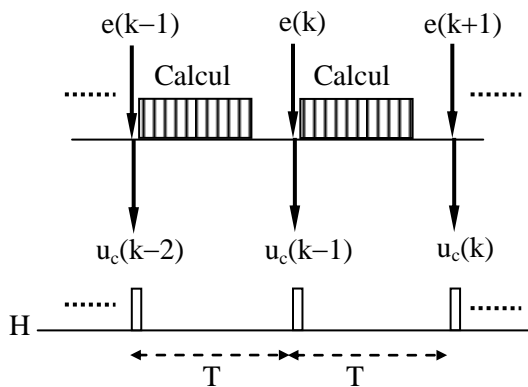


Fig. 4-2 Cycles de fonctionnement du μp

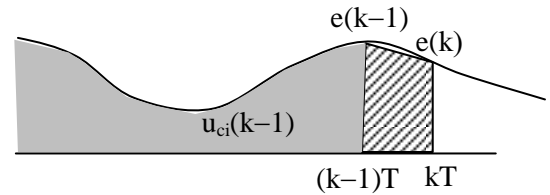
Supposons par exemple que le μp doit produire une commande de type PID c'est-à-dire de la forme :

$$u_c = u_{cp} + u_{ci} + u_{cd}$$

avec

$$u_{cp} = k_p e, \quad u_{ci} = k_i \int_0^t e(\tau) d\tau, \quad u_{cd} = k_d \frac{de}{dt}.$$

On commence par remplacer ces quantités par leurs approximations numériques. D'abord, on a directement $u_{cp}(k) = k_p e(k)$. D'autre part, en admettant que la période T est suffisamment petite, la dérivée $u_{cd}(k)$ peut être approximée par $k_d [e(k) - e(k-1)]/T$. Enfin, comme l'intégrale est la surface sous la courbe $e(t)$ entre 0 et $t = kT$, elle est approximativement égale à la surface avant $(k-1)T$ plus la surface du trapèze entre $(k-1)T$ et kT c.à.d. $u_{ci}(k) = u_{ci}(k-1) + k_i T [e(k-1) + e(k)]/2$ comme le montre la figure suivante.



Essentiellement, le programme consiste donc à calculer

$$u_c(k) = k_p e(k) + k_d \frac{e(k) - e(k-1)}{T} + u_{ci}(k)$$

avec

$$u_{ci}(k) = u_{ci}(k-1) + \frac{k_i T}{2} [e(k) + e(k-1)].$$

On voit qu'il faut retenir dans les registres du μp les dernières valeurs de e et de u_{ci} puisqu'elles interviennent dans le calcul de u_c à la période suivante.

Une fois ce calcul terminé, le microprocesseur attend l'arrivée d'une impulsion de l'horloge pour recevoir la nouvelle valeur de e et envoyer la dernière valeur calculée de u_c . Cette communication avec l'extérieur se fait à travers deux convertisseurs, l'un digital-analogique pour appliquer la commande analogique $u_c(t)$ au système commandé, l'autre analogique-digital pour recevoir en binaire l'écart analogique $e(t)$ entre la référence r et la réponse y du système commandé.

Convertisseur-bloqueur D/A. Il transforme le signal digital $u_c(k)$ fourni par le microprocesseur en un signal analogique $u_c(t)$ compatible avec les exigences d'entrée de l'actionneur. Comme le montre la figure 4-3, cette conversion se déroule en deux étapes. D'abord le convertisseur D/A proprement dit transforme successivement les nombres binaires $u_c(k)$ matérialisés par les tensions des fils à son entrée en des impulsions de tensions proportionnelles à ces nombres. Ensuite, le bloqueur maintient durant une période de l'horloge la valeur de la dernière tension. On obtient ainsi une fonction en escalier $u_c(t)$ approximant un signal de commande analogique.

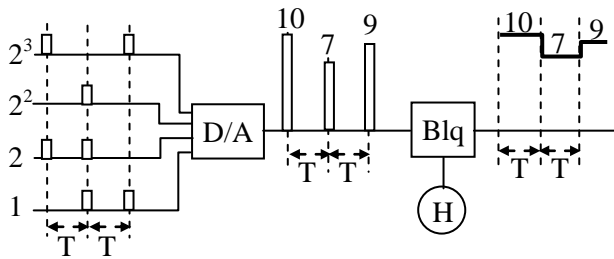


Fig. 4-3 Fonctionnement d'un convertisseur-bloqueur

Voyons comment peut-on réaliser physiquement le convertisseur D/A et le bloqueur.

Circuit du convertisseur D/A. Plusieurs solutions sont possibles mais le circuit de la figure 4-4, sans qu'il soit le plus apte à être construit en circuit intégré, il est le plus facile à comprendre. En effet,

$$u^* = -\frac{R_0}{R} (2^3 u_3 + 2^2 u_2 + 2 u_1 + u_0)$$

et on voit que la tension de sortie u^* est proportionnelle (au signe près) au nombre binaire représenté par les tensions d'entrée u_i , chacune ne pouvant avoir que deux valeurs logiques 0 ou 1.

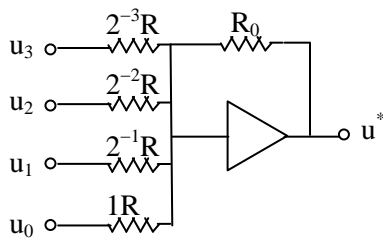


Fig. 4-4 Un circuit D/A

Si E est la tension haute relative au bit logique 1, le gain du convertisseur est $g = (R_0/R)E$ volt/bit et sa valeur maximum (full scale) est $FS = g(2^n - 1)$. Par exemple, pour $n = 8$ et $g = 0.04$, $FS = 10.2$ volts.

Circuit du bloqueur. Le circuit représenté à la figure 4-5 est appelé bloqueur d'ordre 0 et on le désigne par B_0 .

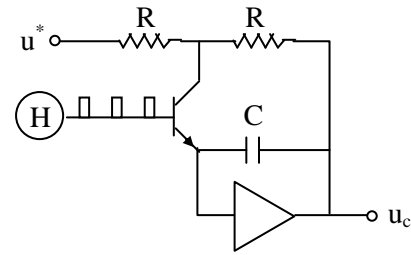


Fig. 4-5 Circuit d'un bloqueur d'ordre 0.

Durant une impulsion de l'horloge le transistor conduit et entre deux impulsions il se bloque. Or, quand le transistor est passant, le circuit est équivalent à celui de la figure 4-6a et quand il est bloqué il est équivalent au celui de la figure 4-6b.

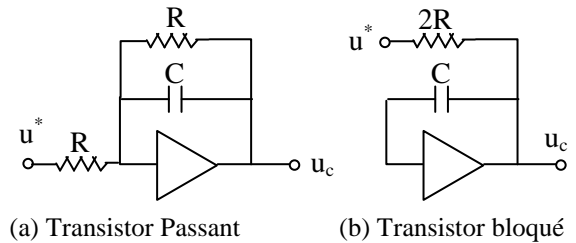


Fig. 4-6 Circuits équivalents du bloqueur

Par conséquent, durant une impulsion de l'horloge, la fonction de transfert entre u^* et u_c est

$$\frac{u_c}{u^*} = -\frac{1}{R} \cdot \frac{R/Cs}{R + 1/Cs} = -\frac{1}{RCs + 1}$$

La tension de sortie u_c tend donc vers u^* (au signe près) avec une constante de temps $\tau = RC$. Si d est la largeur de l'impulsion et $\tau < d/5$, u_c atteint u^* quelle que soit sa valeur initiale.

D'autre part, entre deux impulsions de l'horloge où le transistor se bloque, la capacité conserve sa charge puisque aucun courant ne peut pénétrer dans l'ampli-op. La tension u_c se maintient donc à sa

dernière valeur durant l'impulsion. La figure 4-7 montre l'allure de u_c pour deux impulsions successive de u^* .

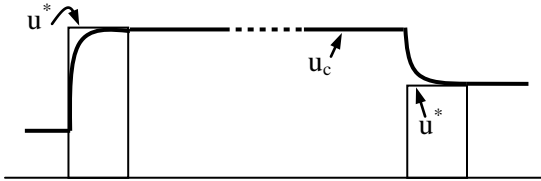
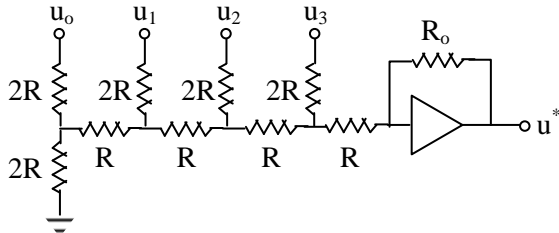


Fig. 4-7 Allure de u_c

Remarque. Nous avons supposé dans ce qui précède que tous les nombres binaires $u_c(k)$ délivrés par le up sont positifs. Ceci sera le cas si l'on ajoute 2^{n-1} au résultat du programme quitte à retrancher la tension correspondante $2^{n-1}g$ après le convertisseur D/A, n étant le nombre de bits et -2^{n-1} le plus petit nombre négatif possible.

EXERCICE 4-1

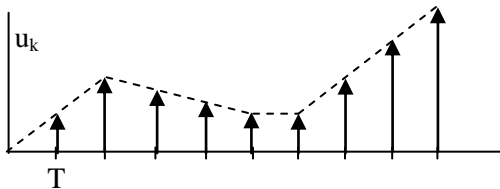
Déterminer l'effet de chaque entrée u_i sur la sortie u^* du circuit suivant et déduire par superposition qu'il est aussi un convertisseur D/A. (Il est plus commode à construire en circuit intégré).



EXERCICE 4-2

On appelle bloqueur d'ordre partiel $\alpha \in [0, 1]$ un circuit noté B_α dont la réponse à une entrée échantillonnée $u_k = u(kT)$ est donnée par $u_c(t) = u_k + \alpha u'_k(t - kT)$ pour $kT \leq t < (k+1)T$ avec $u'_k = [u_k - u_{k-1}] / T$.

Représenter la réponse $u_c(t)$ d'un bloqueur B_α à l'entrée u_k suivante pour $\alpha = 0, 1/2, 1$.



Convertisseur A/D. Il transforme le signal analogique $e(t)$ représentant l'écart entre la référence $r(t)$ et la sortie $y(t)$ du système commandé en un signal digital $e(k) \approx e(kT)/g$, g étant un gain de même valeur que le gain du convertisseur D/A. La détermination de $e(k)$ se déroule durant la période $[kT, (k+1)T]$ en bloquant la tension $v = e(kT)$ et en recherchant par approximations successives le nombre binaire $e(k)$ qui correspond le mieux à cette tension v .

Voyons comment fonctionne le convertisseur A/D dont le circuit est représenté par la figure 4-8. En plus du bloqueur B_0 , il est constitué d'un sélecteur SL, d'un convertisseur D/A, d'un comparateur logique Cmp. et d'un circuit logique CL. Comme nous l'avons fait pour le convertisseur D/A, nous supposons que l'entrée $e(t)$ est toujours positive grâce à un décalage positif avant le bloqueur puis négatif après le convertisseur.

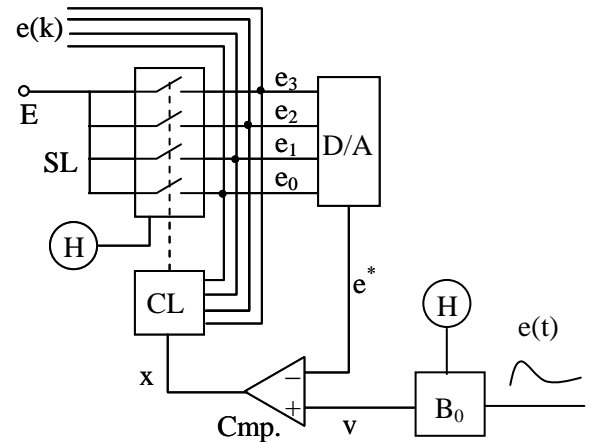


Fig. 4-8 Circuit d'un convertisseur A/D.

À l'arrivée d'une impulsion de l'horloge, le sélecteur connecte sa sortie relative au bit le plus significatif (e_n) à la tension E tandis que les autres sorties restent déconnectées de E et liées à la masse, ce qui donne $e(k) = (1 \ 0 \dots 0) = 2^{n-1}$, presque la moitié de la valeur maximum $FS = 2^n - 1$. La valeur de la tension de sortie e^* du convertisseur D/A sera donc $e^* = 2^{n-1}g$ où g est le gain de ce convertisseur. La sortie x du comparateur logique Cmp est 1 si $v > e^*$ et elle est 0 dans le cas contraire. Maintenant, le circuit logique CL commande le sélecteur selon la règle suivante :

Soit e_i le bit 1 le moins significatif de $e(k)$. CL connecte e_{i-1} à E mais si $x = 1$ il laisse la sortie de e_i connectée à E et si $x = 0$ il la déconnecte de E. Ainsi, la valeur actuelle de e^* sera liée à la précédente par la relation

$$e^* \leftarrow \begin{cases} e^* + 2^{i-1}g & \text{si } v > e^*, \\ e^* - 2^{i-1}g & \text{si } v \leq e^*. \end{cases}$$

Ces itérations se répètent de $i = n$ à $i = 1$ et se terminent avant la fin de la période $[kT, (k+1)T]$. Quand i devient 1, l'écart entre la valeur de e^* et celle de v sera inférieur à la tension correspondante à 1 bit c'est-à-dire à g volt. La figure 4-9 montre schématiquement les approximations successives d'un convertisseur A/D à $n = 4$ bits.

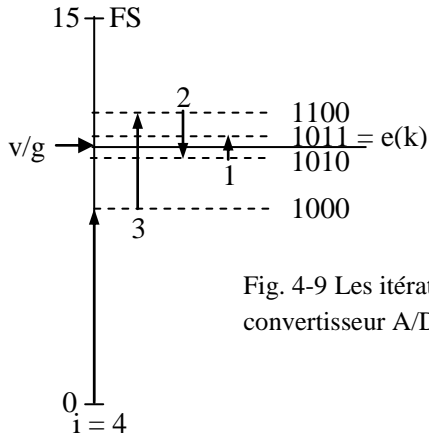


Fig. 4-9 Les itérations d'un convertisseur A/D

Structure de base et représentation d'un système de commande numérique. La figure 4-10 montre la structure de base d'un système de commande numérique groupant le microprocesseur μp , les convertisseurs A/D et D/A, le bloqueur B_0 et le système commandé SC.

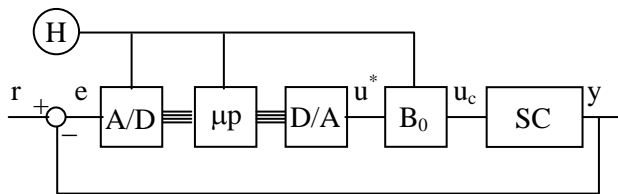


Fig. 4-10 Structure de base d'un système de commande numérique

Durant la période $[kT, (k+1)T]$ ce système effectue les opérations suivantes :

- Le convertisseur A/D échantillonne le signal d'écart analogique $e(t)$ en transformant la tension $v = e(kT)$ en un nombre binaire $e(k) = e^*(kT)/g \approx e(kT)/g$.
- Le programme stocké dans la mémoire du μp reçoit à l'instant kT le nombre binaire $e(k-1)$ et le transforme en un nombre binaire $u_c(k-1)$.
- Le convertisseur D/A reçoit à l'instant kT le nombre binaire $u_c(k-2)$ pour le transformer en une impulsion de tension $u^*[(k-2)T] = gu_c(k-2)$ qui sera maintenue par le bloqueur B_0 jusqu'à l'instant $(k+1)T$.
- Le système commandé SC sera donc soumis à cette dernière tension durant la période considérée.

On remarque que l'action appliquée au système commandé entre kT et $(k+1)T$ est relative à l'écart $e[(k-2)T]$ et non pas à $e(kT)$. Ce retard de $2T$ est la source principale de la discordance entre la commande numérique et la commande analogique. Elle est d'autant plus importante que T est grand.

D'autre part, comme $e(k) = e^*(kT)/g \approx e(kT)/g$, et $u_c(k) = u^*(kT)/g$, on peut dire que le rôle du programme stocké dans le μp est d'associer à l'échantillonnage $e^*(kT)$ de la tension $e(t)$ un signal échantillonné $u^*(kT)$ qui sera bloqué et appliqué au système commandé après un retard $2T$. Ceci est schématisé par la figure 4-11 où les interrupteurs sont supposés tournants à raison d'un tour chaque T seconde, $G_p(s)$ et $B_0(s)$ sont les fonctions de transfert du système commandé et du bloqueur, $G_c(z)$ est aussi une fonction de transfert mais entre signaux échantillonnés. La transformée de ces signaux fera l'objet du paragraphe suivant ; la définition de $G_c(z)$ et l'expression de $B_0(s)$ seront données plus loin.

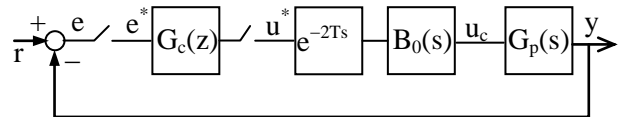


Fig. 4-11 Représentation schématique d'un système de commande numérique

4-2 TRANSFORMÉE Z

Soit $f_k = f(kT)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, l'échantillonnage de période T d'une fonction $f(t)$ (fig. 4-12).

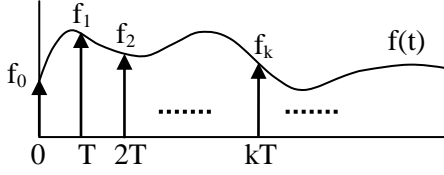


Fig. 4-12 Fonction échantillonnée

Définition. On appelle transformée Z de la suite f_k la fonction $Zf : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$Zf(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (4-1)$$

dans le domaine D des z où la série au second membre de (4-1) est convergente. Sachant que la transformée de Laplace de la distribution de Dirac $\delta(t - kT)$ est e^{-kTs} , $s \in \mathbb{C}$, on déduit de (4-1) que la transformée Z de la suite f_k est la transformée de Laplace de la fonction

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \delta(t - kT) \quad (3-2)$$

quand e^{Ts} est remplacé par z . En d'autres termes,

$$Zf(z) = \mathcal{L}[f^*(t)] \Big|_{e^{Ts} \rightarrow z}. \quad (3-3)$$

La fonction Zf peut être vue comme l'image de la suite f_k par un opérateur Z , $Zf = Z(f_k)$, et on démontre que cet opérateur est injectif dans le domaine D , c.à.d.

$$Z(f_k) = Z(g_k) \Rightarrow f_k = g_k \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dans ce qui suit, l'écriture $Z[f(t)]$ ou $Z(f)$ signifiera la transformée Z de l'échantillonnage de la fonction $f(t)$ et, par abus de langage, nous l'appellerons transformée Z de $f(t)$.

Fonctions élémentaires. Nous verrons qu'à partir des transformées Z de $e^{-\sigma t}$ et de t^n nous

pouvons déduire les transformées des fonctions qui apparaissent le plus dans les applications.

a) Cherchons d'abord la transformée Z de la fonction $f(t) = e^{-at}$, $a \in \mathbb{C}$. Par application de la définition (4-1), on a :

$$Z(e^{-at}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-aT} z^{-1})^k.$$

Le dernier membre est une progression géométrique qui converge vers $1/(1 - e^{-aT} z^{-1})$ dans le domaine D où $|z| > |e^{-aT}|$. D'où

$$Z(e^{-at}) = \frac{z}{z - e^{-aT}}, \quad |z| > |e^{-aT}|. \quad (4-4)$$

En particulier, comme $e^{0t} = 1$, la transformée Z d'un échelon unité échantillonné est

$$Z[1(t)] = \frac{z}{z - 1}, \quad |z| > 1. \quad (4-5)$$

b) Soit la fonction polynomiale t^n avec $t \geq 0$ et n un entier > 0 . Sa transformée Z est

$$Z(t^n) = \sum_{k=0}^{\infty} (kT)^n z^{-k} = Tz \sum_{k=0}^{\infty} k(kT)^{n-1} z^{-k-1}.$$

Comme $dz^{-k}/dz = -kz^{-k-1}$, on déduit que

$$Z(t^n) = -Tz \frac{d[Z(t^{n-1})]}{dz}. \quad (4-6)$$

En particulier, sachant que $t^0 = 1$ et tenant compte de (4-5), on a :

$$Z(t) = -Tz \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z - 1} \right) = \frac{Tz}{(z - 1)^2} \quad (4-7)$$

et

$$Z(t^2) = -Tz \frac{d}{dz} \left(\frac{Tz}{(z - 1)^2} \right) = \frac{T^2 z(z + 1)}{(z - 1)^3}. \quad (4-8)$$

Les propriétés suivantes permettent de déduire des transformées (4-4), (4-5) et (4-6) celles d'autres fonctions.

Linéarité. L'opérateur Z est linéaire c.à.d. pour deux constantes c_1 et c_2 et deux suites f_k et g_k quelconques, on a :

$$Z(c_1 f_k + c_2 g_k) = c_1 Z(f_k) + c_2 Z(g_k). \quad (4-9)$$

Ceci est évident puisque la sommation est linéaire :

$$\sum (c_1 f_k + c_2 g_k) = c_1 \sum f_k + c_2 \sum g_k.$$

Par exemple, comme $\cos \omega t = (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) / 2$,

$$Z(\cos \omega t) = \frac{1}{2} [Z(e^{j\omega t}) + Z(e^{-j\omega t})]$$

d'où, d'après (4-4),

$$Z(\cos \omega t) = \frac{1}{2} \left[\frac{z}{z - e^{j\omega T}} + \frac{z}{z - e^{-j\omega T}} \right]$$

ou

$$Z(\cos \omega t) = \frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - (2 \cos \omega T)z + 1}. \quad (4-10)$$

De la même manière, on trouve que la transformée de $\sin \omega t = (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) / 2j$ est

$$Z(\sin \omega t) = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - (2 \cos \omega T)z + 1}. \quad (4-11)$$

Fonction amortie. La transformée Z de la fonction $e^{-at} f(t)$, $a \in \mathbb{C}$, est

$$Z[e^{-at} f(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} f_k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k (e^{aT} z)^{-k}.$$

On déduit, d'après la définition (4-1), que la transformée de $e^{-at} f(t)$ s'obtient à partir de celle de $f(t)$ en remplaçant z par $e^{aT} z$. En d'autres termes

$$Z[e^{-at} f(t)] = Z[f(t)] \Big|_{z \rightarrow e^{aT} z}. \quad (4-12)$$

Par exemple, pour un scalaire σ et d'après (4-7) et (4-8),

$$\begin{aligned} Z[e^{-\sigma t} t] &= \frac{T e^{-\sigma T} z}{(z - e^{-\sigma T})^2}, \\ Z[e^{-\sigma t} t^2] &= \frac{T^2 e^{-\sigma T} z(z + e^{-\sigma T})}{(z - e^{-\sigma T})^3} \end{aligned} \quad (4-13)$$

et d'après (4-10) et (4-11),

$$\begin{aligned} Z(e^{-\sigma t} \cos \omega t) &= \frac{z(z - e^{-\sigma T} \cos \omega T)}{z^2 - (2e^{-\sigma T} \cos \omega T)z + e^{-2\sigma T}}, \\ Z(e^{-\sigma t} \sin \omega t) &= \frac{ze^{-\sigma T} \sin \omega T}{z^2 - (2e^{-\sigma T} \cos \omega T)z + e^{-2\sigma T}}. \end{aligned} \quad (4-14)$$

Fonction retardée. Une fonction f retardée de n périodes est définie par (fig. 4-13)

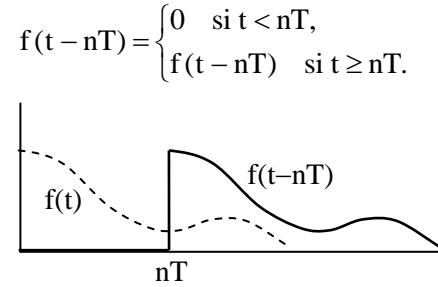


Fig. 4-13 Fonction retardée

Sa transformée Z est

$$Z[f(t - nT)] = \sum_{k=n}^{\infty} f_{k-n} z^{-k} = \sum_{i=0}^{\infty} f_i z^{-(n+i)}$$

ou

$$Z[f(t - nT)] = z^{-n} Z[f(t)]. \quad (4-15)$$

Par exemple, d'après (4-5), la transformée Z d'un échelon retardé de n périodes, noté $1(t - nT)$, est $z^{-(n-1)} / (z - 1)$.

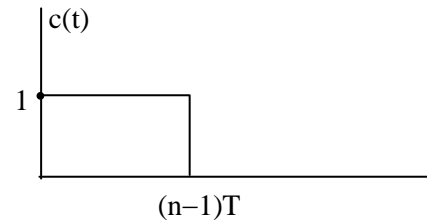


Fig. 4-14 Signal carré

D'où, pour le signal carré $c(t) = 1(t) - 1(t - nT)$ représenté par la figure 4-14 et dont l'échantillonnage est $c^*(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \delta(t - kT)$ on a :

$$Z[c(t)] = \frac{z}{z-1} - \frac{z^{-n+1}}{z-1} = \frac{1-z^{-n}}{1-z^{-1}}. \quad (4-16)$$

En particulier, pour $n = 1$, $c^*(t)$ se réduit à la distribution de Dirac $\delta(t)$ d'où, en remplaçant n par 1 dans (4-16), on déduit que

$$Z[\delta(t)] = 1. \quad (4-17)$$

Ceci est évident puisque

$$Z[\delta(t)] = \mathcal{L}[\delta(t)] \Big|_{e^{sT} \rightarrow z} = 1 \Big|_{e^{sT} \rightarrow z} = 1.$$

Fonction avancée. Une fonction f avancée de n périodes est définie par (fig. 4-15)

$$f(t + nT) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ f(t + nT) & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

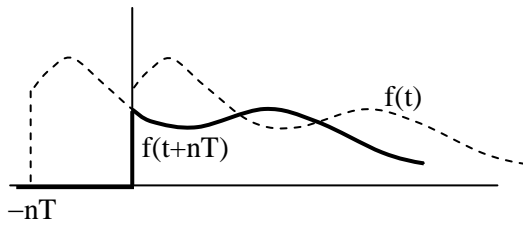


Fig. 4-15 Fonction avancée

D'où

$$\begin{aligned} Z[f(t + nT)] &= \sum_{k=0}^{\infty} f_{k+n} z^{-k} = z^n \sum_{k=0}^{\infty} f_{k+n} z^{-(k+n)} \\ &= z^n \left[\sum_{i=0}^{\infty} f_i z^{-i} - \sum_{i=0}^{n-1} f_i z^{-i} \right]. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$Z[f(t + nT)] = z^n Z[f(t)] - \sum_{i=0}^{n-1} f_i z^{-i}. \quad (4-18)$$

Par exemple,

$$\begin{aligned} Z[1(t + nT)] &= z^n Z[1(t)] - \sum_{i=0}^{n-1} z^{-i} = z^n \frac{z}{z-1} - \sum_{k=1}^n z^k \\ &= \frac{z^{n+1}}{z-1} - \frac{1-z^{n+1}}{1-z} + 1 \\ &= \frac{z}{z-1} = Z[1(t)]. \end{aligned}$$

Ce résultat est évident puisqu'un échelon $1(t)$ avancé est aussi un échelon $1(t)$.

Fonction tronquée. Pour annuler une fonction $f(t)$ avant nT et conserver ses valeurs après nT , il suffit de la multiplier par $1(t - nT)$. En d'autres termes

$$f(t) \cdot 1(t - nT) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < nT, \\ f(t) & \text{si } t \geq nT. \end{cases}$$

Sa transformée Z est

$$Z[f(t) \cdot 1(t - nT)] = \sum_{k=n}^{\infty} f_k z^{-k} = \sum_{i=0}^{\infty} f_{i+n} z^{-i-n}$$

ou

$$Z[f(t) \cdot 1(t - nT)] = z^{-n} Z[f(t + nT)]. \quad (4-19)$$

Exemple 4-1

La fonction triangulaire $f(t)$ représentée sur la figure 4-16 a pour expression :

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < nT \\ -t + 2nT & \text{si } nT \leq t < 2nT \\ 0 & \text{si } 2nT \leq t \end{cases}$$

qu'on peut l'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} f(t) &= t[1(t) - 1(t - nT)] \\ &\quad + (-t + 2nT)[1(t - nT) - 1(t - 2nT)] \\ &= t - 2(t - nT) \cdot 1(t - nT) + (t - 2nT) \cdot 1(t - 2nT). \end{aligned}$$

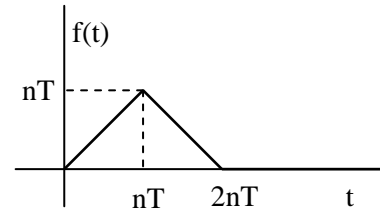


Fig. 3-16 Signal triangulaire

En appliquant la linéarité et les formules (4-7) et (4-19), on obtient :

$$\begin{aligned} Z[f(t)] &= Z(t) - 2z^{-n} Z(t) + z^{-2n} Z(t) \\ &= (1 - z^{-n})^2 \frac{Tz}{(z-1)^2}. \end{aligned} \quad (4-20)$$

Pour vérifier ce résultat, prenons $n = 2$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} Z[f(t)] &= Tz \left(\frac{1 - z^{-2}}{z-1} \right)^2 = Tz^{-3} (z+1)^2 \\ &= T(z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3}) \end{aligned}$$

d'où $f_0 = 0$, $f_1 = T$, $f_2 = 2T$, $f_3 = T$ et $f_k = 0 \forall k \geq 4$, qui sont bien les valeurs de $f(t)$ aux instants d'échantillonnage.

EXERCICE 4-3

Soit $f(t)$ la fonction qui vaut $\sin(t)$ entre 0 et π et 0 ailleurs. Déterminer sa transformée Z et déduire ses valeurs aux instants $k\pi/6$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Fonction périodique. Soit une fonction $g(t)$ définie entre 0 et $T_0 = mT$ et nulle ailleurs. En posant $g_{nT_0}(t)$ étant la fonction $g(t)$ retardée de nT_0 , la fonction

$$f(t) = g(t) + g_{T_0}(t) + \dots + g_{nT_0}(t) + \dots, \quad t \in [0, \infty),$$

est périodique de période T_0 . Sa transformée Z est

$$Z[f(t)] = Z[g(t)](1 + z^{-m} + z^{-2m} + \dots).$$

La somme entre parenthèses étant une progression géométrique de raison z^{-m} , on déduit que dans le domaine $|z| > 1$ (où la série converge)

$$Z[f(t)] = \frac{Z[g(t)]}{1 - z^{-m}}. \quad (4-21)$$

EXERCICE 4-4

Tenant compte du résultat de l'exercice 4-1, déterminer, pour $T = \pi/6$, la transformée Z de la fonction sinusoïdale redressée $|\sin(t)|$, $t \in [0, \infty)$.

Accroissement. La dérivée $f'(t)$ d'une fonction $f(t)$ peut être approximée à l'instant $t = kT$ par $(\Delta f)_k/T$ où $(\Delta f)_k = f_k - f_{k-1}$ avec $f_{-1} = 0$. La transformée Z des accroissements $(\Delta f)_k$ est

$$Z(\Delta f) = \sum_{k=0}^{\infty} (f_k - f_{k-1})z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k} - z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} f_{k-1} z^{-(k-1)}$$

Sachant que $f_{-1} = 0$, on déduit que

$$Z(\Delta f) = (1 - z^{-1})Z(f) = \frac{z-1}{z} Z(f). \quad (4-22)$$

La transformée $Z(f')$ de la dérivée de f est approximativement égale à $Z(\Delta f)/T$.

Exemple 4-2

Considérons de nouveau la fonction triangulaire de la figure 4-16. Sa transformée Z est donnée par (4-20) d'où, d'après (4-22), la transformée Z de ses accroissements entre les instants d'échantillonnage est

$$\begin{aligned} Z(\Delta f) &= Tz^{-1} (1 - z^{-n})^2 \frac{z}{z-1} \\ &= T(z^{-1} - 2z^{-(n+1)} + z^{-(2n+1)})Z[1(t)]. \end{aligned}$$

Ceci signifie que Δf est l'échantillonnage de la fonction $T[1_1(t) - 2 \times 1_{n+1}(t) + 1_{2n+1}(t)]$ où $1_k(t)$ est l'échelon unité retardé de k périodes. Ceci est représenté par la figure 4-17.

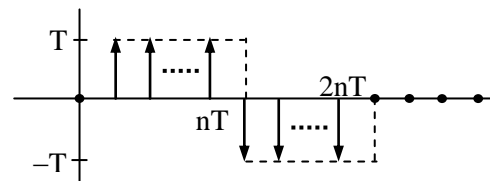


Fig. 4-17 Accroissements du signal triangulaire

Il est évident que ce résultat peut être déduit par simple inspection de la figure 4-16.

EXERCICE 4-5

Sachant que pour $T \ll 1$, $\sin \omega T \approx \omega T$ et $\cos \omega T \approx 1$, montrer qu'en appliquant (4-22) pour calculer la transformée Z de la dérivée de $\sin \omega t$, on obtient la transformée Z de $\omega \cos \omega t$ retardé de T .

Sommation. L'intégrale $F(t)$ d'une fonction f entre 0 et $t = nT$ peut être approximée par TS_n où $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$. Comme $\Delta S = S_n - S_{n-1} = f_n$, on déduit de (4-22) que $Z(\Delta S) = Z(f) = [(z-1)/z]Z(S)$ ou

$$Z(S) = \frac{z}{z-1} Z(f). \quad (4-23)$$

La transformée $Z(F)$ de l'intégrale de f est approximativement égale à $TZ(S)$. On remarque, d'après (4-22) et (4-23), que l'opérateur $(z-1)/Tz$ en transformée Z joue un rôle analogue à celui de l'opérateur s en transformée de Laplace.

Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale. Comme, $\forall k \geq 1$, z^{-k} tend vers 0 quand z tend vers l'infini, on a :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} Z(f) = \lim_{z \rightarrow \infty} [f_0 + \sum_{k \geq 1} f_k z^{-k}] = f_0$$

dans le domaine où l'on peut introduire $\lim_{z \rightarrow \infty}$ sous le signe $\sum_{k \geq 1}$.

D'autre part, d'après (4-22), on a :

$$\lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})Z(f) = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (f_k - f_{k-1}) z^{-k} \right]$$

où $f_{-1} = 0$. Dans le domaine où l'on peut permuter $\lim_{z \rightarrow 1}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty}$, l'égalité précédente s'écrit :

$$\lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})Z(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (f_k - f_{k-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f_{\infty}$$

On a ainsi les deux égalités suivantes :

$$\boxed{\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} Z(f) &= f_0, \\ \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})Z(f) &= f_{\infty}. \end{aligned}} \quad (4-24)$$

On démontre que la validité de chacune de ces égalités est assurée si et seulement si les deux membres de cette égalité sont finis.

Exemples -3

1) $\forall a \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} Z(e^{at}) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{z - e^{aT}} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0} e^{at} = 1.$$

D'où, pour la fonction exponentielle, le théorème de la valeur initiale ($t \rightarrow 0$) s'applique $\forall a$. Par contre,

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} Z(e^{at}) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z - e^{aT}} = \begin{cases} 0 & \text{si } a \neq 0, \\ 1 & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

$$\text{mais } \lim_{t \rightarrow \infty} e^{at} = \begin{cases} 0 & \text{si } \operatorname{Re}(a) < 0, \\ 1 & \text{si } a = 0, \\ \text{sans limite si } \operatorname{Re}(a) = 0 \text{ et } a \neq 0, \\ \infty & \text{si } \operatorname{Re}(a) > 0. \end{cases}$$

D'où le théorème de la valeur finale ne s'applique à l'exponentielle que si $\operatorname{Re}(a) < 0$ ou $a = 0$.

2) Comme chacune des fonctions $e^{\sigma t} \cos \omega t$ et $e^{\sigma t} \sin \omega t$ est une combinaison linéaire de $e^{(\sigma+j\omega)t}$ et $e^{(\sigma-j\omega)t}$ le théorème de la valeur finale ne s'applique à ces fonction que si $\sigma < 0$ ou $\sigma = \omega = 0$.

4-3 TRANSFORMÉE INVERSE.

Sauf ambiguïté, nous désignerons par la suite la transformée Z d'une fonction $f(t)$ par la même lettre que cette fonction mais avec un argument z au lieu de t , c.à.d. on pose $f(z) = Z[f(t)]$. L'application qui associe à $f(z)$ la suite $f_k = f(kT)$ est appelée l'inverse de la transformée Z et on écrit $f_k = Z^{-1}[f(z)]$. Il existe deux méthodes pour déduire f_k de $f(z)$: 1) par décomposition en fractions simples et 2) par application de la formule d'inversion.

Décomposition en fractions simples. En pratique, les transformées Z de la plupart des fonctions usuelles sont des sommes de fonctions rationnelles de la forme $f(z) = n(z)/d(z)$ où n et d sont des polynômes à coefficients réels tels que $d^0(n) \leq d^0(d)$. Dans ce cas, il est possible de décomposer chaque fonction rationnelle en des fractions simples et d'additionner l'inverse de ces fractions déduites des formules (4-4), (4-13), (4-14) et (4-17) établies ci-dessus. En posant $\rho = e^{-\sigma T}$,

$\varphi = \omega T$, $\alpha = \rho \cos \varphi$ et $\beta = \rho \sin \varphi$, ces formules se ramènent aux suivantes :

$$\begin{aligned} Z^{-1}(1) &= \delta(t), \quad Z^{-1}\left(\frac{z}{z-\rho}\right) = \rho^k, \\ Z^{-1}\left[\frac{\rho z}{(z-\rho)^2}\right] &= k\rho^k, \\ Z^{-1}\left[\frac{\rho z(z+\rho)}{(z-\rho)^3}\right] &= k^2\rho^k, \\ Z^{-1}\left[\frac{z(z-\alpha)}{z^2-2\alpha z+\rho^2}\right] &= \rho^k \cos k\varphi, \\ Z^{-1}\left[\frac{z\beta}{z^2-2\alpha z+\rho^2}\right] &= \rho^k \sin k\varphi. \end{aligned} \quad (4-25)$$

On remarque que les numérateurs de toutes les fractions en z dans ces formules ont la variable z en facteur. Il est alors judicieux de décomposer $f(z)/z$ en fractions simples puis multiplier par z afin d'obtenir la décomposition de $f(z)$ en des fractions de la forme (4-25).

Exemple 3-4

Supposons que la transformée Z d'une fonction $f(t)$ est

$$f(z) = \frac{z^2 + az + b}{(z-\rho)^2(z^2 - 2\alpha z + \rho^2)}. \quad (1)$$

La décomposition de $f(z)/z$ est

$$\frac{f(z)}{z} = \frac{A}{z} + \frac{B_2}{(z-\rho)^2} + \frac{B_1}{z-\rho} + \frac{Cz+D}{z^2-2\alpha z+\rho^2}. \quad (2)$$

Par identification des numérateurs, on tire de (1) et (2) les valeurs de A , B_1 , B_2 , C et D . Ainsi,

$$\begin{aligned} f(z) &= A + \frac{B_2}{\rho} \frac{\rho z}{(z-\rho)^2} + B_1 \frac{z}{z-\rho} \\ &\quad + \frac{Cz(z-\alpha) + (D+C\alpha)z}{z^2-2\alpha z+\rho^2}. \end{aligned}$$

D'où, de (4-25) et en posant $\varphi = \text{Arccos}(\alpha/\rho)$ et $\beta = \rho \sin \varphi$, on obtient :

$$\begin{aligned} f_k &= A\delta(t) + B_2 k \rho^{k-1} \\ &\quad + \rho^k \left[B_1 + C \cos k\varphi + \frac{D+C\alpha}{\beta} \sin k\varphi \right]. \end{aligned}$$

Formule d'inversion. Bien que la méthode précédente soit simple, elle n'est pas générale car les formules (4-25) ne couvrent pas tous les cas qui peuvent apparaître. La formule d'inversion est plus générale et nous allons l'établir en se basant sur le lemme suivant.

Lemme 1

Soit $f^*(s)$ la transformée de Laplace de la fonction

$$f^*(t) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \delta(t - iT). \text{ Alors}$$

$$f_k = \frac{T}{2j\pi} \int_{c-j\frac{\pi}{T}}^{c+j\frac{\pi}{T}} f^*(s) e^{kTs} ds \quad (4-26)$$

où c est un réel supérieur à toutes les parties réelles des pôles de $f^*(s) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i e^{-iT s}$, ce qui assure la convergence de cette série pour $s = c + j\omega$.

Preuve

$$\begin{aligned} \int_{c-j\frac{\pi}{T}}^{c+j\frac{\pi}{T}} f^*(s) e^{kTs} ds &= \int_{c-j\frac{\pi}{T}}^{c+j\frac{\pi}{T}} \left(\sum_{i=0}^{\infty} f_i e^{-iT s} \right) e^{kTs} ds \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} f_i \int_{c-j\frac{\pi}{T}}^{c+j\frac{\pi}{T}} e^{(k-i)Ts} ds. \\ \text{Or, } \int_{c-j\frac{\pi}{T}}^{c+j\frac{\pi}{T}} e^{(k-i)Ts} ds &= \begin{cases} \frac{e^{(k-i)Ts}}{k-i} \Big|_{c-j\frac{\pi}{T}}^{c+j\frac{\pi}{T}} = 0 & \text{si } i \neq k, \\ \frac{2j\pi}{T} & \text{si } i = k. \end{cases} \end{aligned}$$

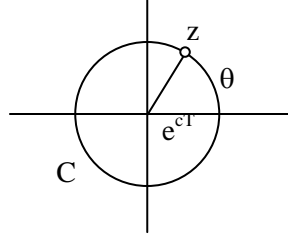
D'où l'égalité (4-26) ■

Sachant que $z = e^{sT}$ et que $f(z) = f^*(s) \Big|_{e^{sT} \rightarrow z}$, on a $e^{kTs} = z^k$, $dz = Tz ds$ et la relation (4-26) s'écrit :

$$f_k = \frac{1}{2j\pi} \oint_C f(z) z^{k-1} dz \quad (4-27)$$

où C est le lieu des points z quand s décrit le segment $[c - j\pi/T, c + j\pi/T]$ c'est-à-dire C est le cercle décrit par le point $z = e^{cT} \cdot e^{j\theta}$ quand θ varie de $-\pi$ à $+\pi$ (fig. 4-18).

Fig. 4-18 Cercle C d'intégration dans la relation (4-27)



Comme c est supérieur à toutes les parties réelles des pôles de $f^*(s)$, les pôles de $f(z) = f^*(s)|_{e^{sT} \rightarrow z}$ sont à l'intérieur du cercle C et d'après le théorème des résidus, on déduit de (4-27) que

$$f_k = \sum \text{Res}[z^{k-1} f(z)] \quad (4-28)$$

où le second membre signifie la somme des résidus de la fonction $z^{k-1} f(z)$.

Nous rappelons que le résidu d'une fonction $h(z)$ en un pôle p de multiplicité m est donné par :

$$\text{Res}(h, p) = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{d^{m-1} [(z-p)^m h(z)]}{dz^{m-1}} \right|_{z=p} \quad (4-29)$$

À noter que d'après le théorème de la valeur initiale, on a $f_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$. En particulier, si $f(z)$ est rationnelle dont le degré du numérateur est inférieur au degré du dénominateur, $f_0 = 0$.

Exemples 4-5

a) Soit $Z(f_k) = f(z) = a/(z - \rho)$, $\rho \in \mathbb{R}$. On a :

$$f_0 = 0,$$

$$f_k = \sum \text{Res} \left[\frac{az^{k-1}}{z - \rho} \right] = az^{k-1} \Big|_{z=\rho} = a\rho^{k-1}, \quad k \geq 1.$$

b) Soit $Z(f_k) = f(z) = (z + a)/(z - \rho)^2$, $\rho \in \mathbb{R}$. On a :

$$f_0 = 0,$$

$$\begin{aligned} f_k &= \sum \text{Res} \left[\frac{z^{k-1}(z + a)}{(z - \rho)^2} \right] f_k = \frac{d}{dz} [z^{k-1}(z + a)] \Big|_{z=\rho} \\ &= kz^{k-1} + (k-1)az^{k-2} \Big|_{z=\rho} \\ &= k\rho^{k-1} + (k-1)a\rho^{k-2}, \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

c) Soit $Z(f_k) = f(z) = (z^2 + az + b)/(z - \rho)^3$, $\rho \in \mathbb{R}$.

On a :

$$f_0 = 0,$$

$$\begin{aligned} f_k &= \sum \text{Res} \left[\frac{z^{k-1}(z^2 + az + b)}{(z - \rho)^3} \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} (z^{k+1} + az^k + bz^{k-1}) \Big|_{z=\rho} \\ &= \frac{1}{2} [(k+1)k\rho^{k-1} + k(k-1)a\rho^{k-2} \\ &\quad + b(k-1)(k-2)\rho^{k-3}], \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

d) Soit $Z(f_k) = f(z) = (z + a)/(z^2 - 2\alpha z + \rho^2)$, $\rho > \alpha$.

En posant $\alpha = \rho \cos \varphi$, les pôles de $f(z)$ s'écrivent sous la forme $p = \rho e^{j\varphi}$ et $\bar{p} = \rho e^{-j\varphi}$ d'où

$$f_0 = 0,$$

$$\begin{aligned} f_k &= \sum \text{Res} \left[\frac{z^{k-1}(z + a)}{(z - p)(z - \bar{p})} \right] \\ &= \frac{z^{k-1}(z + a)}{(z - \bar{p})} \Big|_{z=p} + \frac{z^{k-1}(z + a)}{(z - p)} \Big|_{z=\bar{p}} \\ &= \frac{p^k - \bar{p}^k + a(p^{k-1} - \bar{p}^{k-1})}{p - \bar{p}} \\ &= \frac{\rho^{k-1} \sin k\varphi + a\rho^{k-2} \sin(k-1)\varphi}{\sin \varphi}, \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

Pour vérifier une inversion, on peut calculer les premières valeurs de la suite f_k en effectuant la division du numérateur par le dénominateur comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 4-6

Vérifions le résultat de l'exemple 4-5c en considérant la fonction $f(z) = (z^2 + 1)/(z - 1)^3$. Dans ce but, effectuons la division du numérateur par le dénominateur.

$\begin{array}{r} z^2 + 1 \\ \hline +3z - 2 + z^{-1} \\ \hline +7 - 8z^{-1} + 3z^{-2} \\ \hline +13z^{-1} - 18z^{-2} + 7z^{-3} \\ \hline \dots \end{array}$	$\begin{array}{r} z^3 - 3z^2 + 3z - 1 \\ \hline z^{-1} + 3z^{-2} + 7z^{-3} \dots \end{array}$
---	---

D'où $f_0 = 0, f_1 = 1, f_2 = 3, f_3 = 7, \dots$

On trouve les mêmes valeurs en remplaçant dans le résultat de l'exemple 4-5c les paramètres a, b et p par 0, 1 et 1 pour $k = 0, 1, 2$ et 3.

EXERCICE 4-6

Déterminer l'inverse de la fonction

$$f(z) = \frac{z+2}{(z-0.5)(z^2-z+0.5)}$$

- par décomposition en fractions simples et
- par la formule d'inversion.
- Vérifier le résultat en déterminant les premières valeurs de f_k par division directe.

Équations linéaires récurrentes. Ces équations sont de la forme :

$$\sum_{k=0}^n a_k y_{n-k} = h(n)$$

où les a_k sont des constantes données, $h(n)$ la valeur à l'instant nT d'un signal connu et y_n la valeur à déterminer d'un signal à l'instant nT . La technique de résolution d'une telle équation est expliquée à l'aide de l'exemple suivant.

Exemple 4-7

Pour déterminer la suite $y_n, n = 0, 1, 2, \dots$, qui vérifie l'équation récurrente

$$2y_n - y_{n-2} = \sin \frac{n\pi}{2}$$

on commence par multiplier les deux membres par z^{-n} et additionner de $n = 0$ à $n = \infty$, ce qui donne :

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} y_{n-2} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sin \frac{n\pi}{2} \right) z^{-n}.$$

En admettant que $y_{-k} = 0 \quad \forall k > 0$, l'équation précédente s'écrit par définition de la transformée Z,

$$2y(z) - z^{-2}y(z) = Z\left(\sin \omega t\right), \quad \omega = \pi / 2T.$$

En multipliant les deux membres par z^2 et en remplaçant $Z(\sin \omega t)$ par son expression (4-11), on obtient :

$$\begin{aligned} y(z) &= \frac{z^3 \sin(\pi / 2)}{(2z^2 - 1)[z^2 - 2z \cos(\pi / 2) + 1]} \\ &= \frac{z^3}{2(z^2 - 1/2)(z^2 + 1)}. \end{aligned}$$

Pour déterminer l'inverse y_n de $y(z)$ procédons par décomposition en fractions simples. On a :

$$\frac{y(z)}{z} = \frac{A}{z + \sqrt{2}/2} + \frac{B}{z - \sqrt{2}/2} + \frac{Cz + D}{z^2 + 1}. \quad (4-30)$$

avec

$$\begin{aligned} A + B + C &= 0, \\ -A\sqrt{2}/2 + B\sqrt{2}/2 + D &= 1/2, \\ A + B - C/2 &= 0, \\ -A\sqrt{2}/2 + B\sqrt{2}/2 - D/2 &= 0. \end{aligned}$$

En résolvant ces équations on tire

$$A = -B = -\sqrt{2}/12, \quad C = 0, \quad D = 1/3.$$

Ainsi

$$y(z) = \frac{1}{12} \left[\frac{-z\sqrt{2}}{z + \sqrt{2}/2} + \frac{z\sqrt{2}}{z - \sqrt{2}/2} + \frac{4z}{z^2 + 1} \right].$$

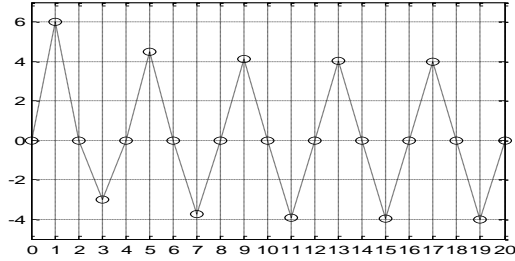
Le terme $z/(z^2 + 1) = z\beta/(z^2 - 2\alpha z + 1)$ avec $\beta = \sin \varphi$ et $\alpha = \cos \varphi = 0$ d'où $\varphi = \pi/2$ et $\beta = 1$. Par conséquent, tenant compte des équations (4-25), on déduit que

$$y_n = \frac{1}{12} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{n-1} (1 + (-1)^{n+1}) + 4 \sin n \frac{\pi}{2} \right].$$

Il est clair que pour les grandes valeurs de n la suite

y_n tend vers $(1/3).\sin(n\pi/2)$.

La figure suivante montre les 20 premières valeurs de $12y_n$.



4-4 TRANSMITTANCE Z

Soit $g(t)$ la réponse impulsionnelle d'un système S , c.à.d. sa réponse à une impulsion de Dirac, et $g^*(t)$ l'échantillonnage de période T de $g(t)$ (fig. 4-19).

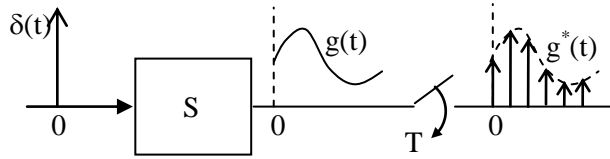


Fig. 4-19 Réponse impulsionnelle échantillonnée de S

Nous savons que la fonction de transfert $G(s)$ de S est la transformée de Laplace de $g(t)$:

$$G(s) = \mathcal{L}[g(t)].$$

Sa fonction de transfert discrète ou échantillonnée, appelée aussi transmittance Z , est la transformée Z de $g(t)$ c.à.d. la transformée de Laplace de $g^*(t)$ quand e^{sT} est remplacé par z :

$$G(z) = Z[g(t)] = \mathcal{L}[g^*(t)] \Big|_{e^{sT} \rightarrow z}. \quad (4-31)$$

Appliquons au système S le signal échantillonné

$$u^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \delta(t - kT).$$

Par linéarité, l'effet sur la sortie à l'instant nT de l'impulsion $u_k \delta(t - kT)$, $n \geq k$, est $u_k g(nT - kT) = u_k g_{n-k}$ et l'effet de $u^*(t)$ est donc

$$y(nT) = \sum_{k=0}^n u_k g_{n-k}. \quad (4-32)$$

Le second membre est appelé le *produit de convolution* en n des suites u_k et g_k . Comme $g(t) = 0$ pour $t < 0$, $g_{n-k} = g(nT - kT) = 0 \quad \forall k > n$ d'où l'équation (4-32) peut aussi s'écrire sous la forme :

$$y(nT) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k g_{n-k}. \quad (4-33)$$

La transformée Z de la réponse $y(t)$ est alors

$$\begin{aligned} Z[y(t)] &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k g_{n-k} \right) z^{-n}, \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} g_{n-k} z^{-(n-k)}. \end{aligned}$$

En posant $i = n - k$, l'équation précédente s'écrit :

$$Z[y(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^{-k} \sum_{i=0}^{\infty} g_i z^{-i}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{y(z) = G(z)u(z)}. \quad (4-34)$$

Ainsi, grâce à la transformation Z , le produit de convolution (4-32) est remplacé par le simple produit algébrique (4-34).

Calcul de $G(z)$ à partir de $G(s)$. Ceci peut se faire soit par inversion de $G(s)$ soit en appliquant une formule de conversion.

Par inversion de $G(s)$

On calcule $g(t)$ par inversion de $G(s)$ puis $G(z)$ par transformation Z de $g(t)$:

$$G(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} g(t) \xrightarrow{Z} G(z) = Z[G(s)].$$

Exemple 4-8

Soit
$$G(s) = \frac{5(s+1)}{(s+2)(s^2+2s+5)}.$$

Sa décomposition en facteurs simples est

$$G(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{B(s+1) + (C-B)}{[(s+1)^2 + 4]}$$

avec $A = -1$, $B = 1$, $C = 5$.

D'où

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathcal{L}^{-1}[G(s)], \\ &= -e^{-2t} + e^{-t}(\cos 2t + 2\sin 2t). \end{aligned}$$

Par conséquent, d'après (4-14),

$$\begin{aligned} G(z) &= Z[g(t)], \\ &= -\frac{z}{z-e^{-2T}} + \frac{z[z-e^{-T}(\cos 2T-2\sin 2T)]}{z^2-(2e^{-T}\cos 2T)z+e^{-2T}}. \end{aligned}$$

Formule de conversion de $G(s)$ à $G(z)$

Cette formule se déduit de celle de l'inversion de la transformée de Laplace donnée par le lemme suivant.

Lemme 2

$$f(t) = \frac{1}{2j\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} f(s)e^{st} ds \quad (4-35)$$

où c est un réel constant supérieur à toutes les parties réelles des pôles de $f(s)$.

Preuve

D'après le lemme 1 (éq. (4-26)), on a :

$$f(kT) = \frac{T}{2j\pi} \int_{c-j\frac{\pi}{T}}^{c+j\frac{\pi}{T}} f^*(s)e^{skT} ds. \quad (4-36)$$

Or, par définition de l'intégrale de Riemann,

$$Tf^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-skT}T \xrightarrow{T \rightarrow 0} \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt = f(s).$$

D'autre part, $\forall t, \forall T, \exists k$ tel que $kT \leq t < (k+1)T$. D'où, quand $T \rightarrow 0$, $\forall t, \exists k$ tel que $kT \approx t$ et en plus $\pi/T \rightarrow \infty$. Ainsi, (4-36) devient (4-35) quand T tend vers 0. ■

Sachant que $G(s)$ est la transformée de Laplace de la

réponse impulsionnelle $g(t)$, on déduit de (4-35) que

$$g_k = g(kT) = \frac{1}{2j\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} G(s)e^{skT} ds.$$

D'où

$$\begin{aligned} G(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^{-k} = \frac{1}{2j\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} G(s) \sum_{k=0}^{\infty} (e^{skT} z^{-k}) ds \\ &= \frac{1}{2j\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} G(s) \frac{z}{z-e^{sT}} ds. \end{aligned}$$

Considérons la courbe fermée C constituée par la droite $[c-j\infty, c+j\infty]$ et un demi-cercle de rayon infini à gauche de la droite (fig. 4-20).

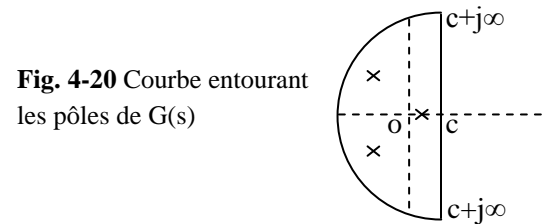


Fig. 4-20 Courbe entourant les pôles de $G(s)$

Si l'intégrale est nulle le long du demi-cercle (ce qui est le cas quand $G(s)$ est strictement propre), le dernier membre de l'équation précédente sera égal à l'intégrale le long de C . Comme C entoure tous les pôles de $G(s)$, on déduit que

$$G(z) = \sum \text{Res} \left(G(s) \frac{z}{z-e^{sT}} \right), \quad (4-37)$$

la somme étant portée sur les pôles de $G(s)$.

Exemple 4-9

Considérons de nouveau la fonction de transfert de l'exemple 4-8,

$$G(s) = \frac{5(s+1)}{(s+2)(s^2+2s+5)}.$$

En désignant les racines $-1 \pm 2j$ de $s^2 + 2s + 5$ par p et \bar{p} , on a :

$$G(z) = \sum \text{Res} \left(\frac{5z(s+1)}{(s+2)(s-p)(s-\bar{p})(z-e^{sT})} \right)$$

$$= \frac{-5z}{(p+2)(\bar{p}+2)(z-e^{-2T})} + \frac{5z}{(p-\bar{p})} \left[\frac{(p+1)}{(p+2)(z-e^{pT})} - \frac{(\bar{p}+1)}{(\bar{p}+2)(z-e^{\bar{p}T})} \right].$$

Sachant que

$$(p+2)(\bar{p}+2)=5, \quad p-\bar{p}=4j \quad \text{et} \quad p+1=2j$$

et que

$$e^{pT} + e^{\bar{p}T} = 2e^{-T} \cos 2T \quad \text{et} \quad e^{pT} - e^{\bar{p}T} = 2je^{-T} \sin 2T,$$

un calcul simple nous redonne le même résultat que l'exemple 4-8.

EXERCICE 4-7

Déterminer la transmittance $G(z)$ relative à

$$G(s) = \frac{s-1}{s^2(s^2+1)}$$

a) à partir de la définition,

b) en appliquant la formule de conversion.

Transmittance de deux organes en cascade.

Ces deux organes peuvent être séparé par un échantillonneur ou connectés directement en série.

a) Deux organes séparés par un échantillonneur.

Considérons le système représenté par la figure 4-21 et cherchons la transmittance entre son entrée $u^*(t)$ et sa sortie $y^*(t)$.

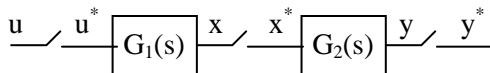


Fig. 4-21 Organes en série séparés par un échantillonneur

Comme

$$y(z) = G_2(z)x(z) \quad \text{et} \quad x(z) = G_1(z)u(z),$$

on tire que $y(z) = G_2(z).G_1(z).u(z)$ c'est-à-dire que la transmittance $G(z)$ de deux organes séparés par un échantillonneur est le produit de leurs transmittances :

$$G(z) = G_2(z).G_1(z). \quad (4-38)$$

a) Deux organes à connexion directe

Considérons le système de la figure 4-22.

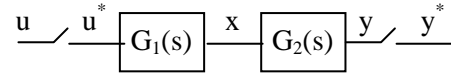


Fig. 4-22 Organes en série à connexion directe

La fonction de transfert entre u^* et y^* étant le produit $G(s) = G_2(s)G_1(s)$, la transmittance entre ces deux signaux échantillonnés est

$$G(z) = Z[G_2(s).G_1(s)] = Z[G_2 G_1(s)]. \quad (4-39)$$

En général, $G_2(z).G_1(z) \neq Z[G_2(s).G_1(s)]$ comme le montre l'exemple suivant. Ceci est normal car la réponse de $G_2(s)$ au signal x (réponse de $G_1(s)$ à u^*) n'est pas la même que la réponse de $G_2(s)$ à l'échantillonnage de x .

Exemple 4-10

$$\text{Pour} \quad G_1(s) = \frac{1}{s} \quad \text{et} \quad G_2(s) = \frac{1}{s+2},$$

$$G_1(z) = \frac{z}{z-1} \quad \text{et} \quad G_2(z) = \frac{z}{z-e^{-2T}}$$

$$\Rightarrow G_2(z).G_1(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-e^{-2T})}.$$

Tandis que

$$\begin{aligned} Z[G_2(s).G_1(s)] &= Z\left(\frac{1}{s(s+2)}\right) = Z\left(\frac{1}{2s} - \frac{1}{2(s+2)}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-2T}} \right) \\ &= \frac{z(1-e^{-2T})}{2(z-1)(z-e^{-2T})}. \end{aligned}$$

Système précédé par un bloqueur.

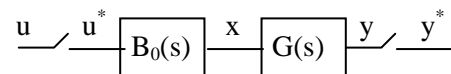


Fig. 4-23 Organe précédé d'un bloqueur

La transmittance du système constitué d'un bloqueur B_0 directement connecté à un organe de fonction de transfert $G(s)$ (fig. 4-23) est

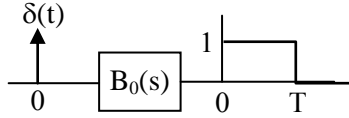
$$(B_0 G)(z) = Z[B_0(s)G(s)]. \quad (4-40)$$

Comme la fonction de transfert $B_0(s)$ du bloqueur

est la transformée de Laplace de sa réponse à une impulsion de Dirac $1.\delta(t)$ et que cette réponse vaut 1 durant une période T puis 0 après cet instant (fig. 4-24), on a :

$$B_0(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-Ts}. \quad (4-41)$$

Fig. 4-24 Réponse à $\delta(t)$ d'un bloqueur d'ordre 0.



En remplaçant (4-41) dans (4-40), on obtient :

$$(B_0 G)(z) = Z \left[\frac{G(s)}{s} - e^{-Ts} \frac{G(s)}{s} \right]$$

c.à.d.

$$(B_0 G)(z) = (1 - z^{-1}) Z \left[\frac{G(s)}{s} \right]. \quad (4-42)$$

L'instruction «c2d(G, T)» produit $(B_0 G)(z)$ pour une période d'échantillonnage T donnée.

Exemple 4-11

La transformée de Laplace de la réponse d'un système de fonction de transfert

$$G(s) = \frac{2}{s+2}$$

à une entrée analogique $u(t) = 1 - e^{-t}$ est

$$y(s) = \frac{2}{(s+2)} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right) = \frac{2}{s(s+1)(s+2)}.$$

D'où

$$y(t) = 1(t) - 2e^{-t} + e^{-2t} \quad (4-43)$$

et sa discrétisation est

$$y_k = 1 - 2e^{-kT} + e^{-2kT}. \quad (4-44)$$

Supposons d'un autre côté que l'entrée $u(t)$ est d'abord échantillonnée puis bloquée avant d'être appliquée au système $G(s)$. D'après (4-42), la transformée Z de la réponse sera

$$\begin{aligned} y(z) &= (1 - z^{-1}) Z \left[\frac{G(s)}{s} \right] \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}} \right) \\ &= Z \left[\frac{G(s)}{s} \right] \left(\frac{1 - e^{-T}}{z - e^{-T}} \right). \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} Z \left[\frac{G(s)}{s} \right] &= \sum \text{Res} \frac{2z}{s(s+2)(z-e^{sT})} \\ &= \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-2T}} = \frac{z(1-e^{-2T})}{(z-1)(z-e^{-2T})}, \end{aligned}$$

on tire que

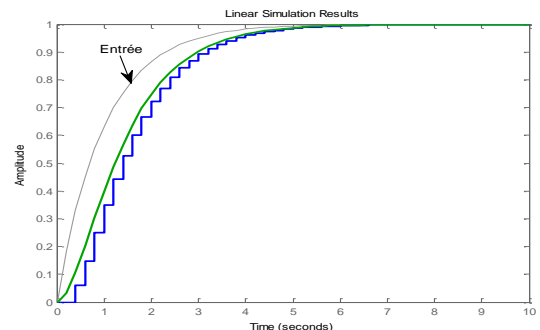
$$y(z) = \frac{z(1-e^{-T})(1-e^{-2T})}{(z-1)(z-e^{-2T})(z-e^{-T})}.$$

La transformée inverse de cette fonction est

$$\begin{aligned} y_k &= \sum \text{Res}[z^{k-1} y(z)] \\ &= 1 - \frac{(1-e^{-2T})}{e^{-T} - e^{-2T}} e^{-kT} + \frac{1-e^{-T}}{e^{-T} - e^{-2T}} e^{-2kT}. \end{aligned} \quad (4-45)$$

Or, T étant faible, $e^{-T} \approx 1 - T$ et $e^{-2T} \approx 1 - 2T$. En remplaçant ces approximations dans l'équation précédente, on retrouve la réponse (4-44). Pour comparer graphiquement la réponse (4-43) du système analogique à la réponse (4-45) du système digital correspondant avec $T = 0.2$ sec, on écrit les instructions suivantes :

```
>> G = tf(2, [1 2]);
>> B0G = c2d(G, 0.2); % T = 0.2 sec
>> t = 0 : 0.2 : 10;
>> u = 1 - exp(-t);
>> lsim(G, u, t, 0)
>> hold
>> lsim(B0G, u, t, 0)
```



Dans l'exemple précédent le bloqueur a presque reconstitué le signal analogique $u(t)$ à partir de son échantillonnage $u^*(t)$ ce qui a donné presque la même réponse que celle de $G(s)$ à l'entrée analogique $u(t)$. Ceci est vrai pour tout système $G(s)$ et toute entrée $u(t)$ et les réponses seront d'autant plus voisines que la période d'échantillonnage T est faible. En effet, la transformée de Laplace de la réponse de $G(s)$ précédé d'un bloqueur à toute entrée échantillonnée $u^*(t)$ est

$$y(s) = u^*(s) \frac{1 - e^{-Ts}}{s} G(s),$$

$$\approx u^*(s) TG(s) \quad \text{car } e^{-Ts} \approx 1 - Ts.$$

Or,

$$u^*(s)T = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)e^{-kTs}T \xrightarrow{T \rightarrow 0} \int_0^{\infty} u(t)e^{-st}dt = u(s).$$

On en déduit que quand T est suffisamment faible, la réponse à l'entrée $u^*(t)$ de $G(s)$ précédé d'un bloqueur est presque égale à la réponse de $G(s)$ à l'entrée $u(t)$.

4-5 TRANSFORMÉE Z MODIFIÉE

Définition et calcul. Cette transformation intervient quand le système comporte un retard fractionnaire non multiple de la période d'échantillonnage T . La figure 4-25 représente l'échantillonnage $f_{t_0}^*(t)$ aux instants kT , $k \in \mathbb{N}$, d'un signal $f(t)$ retardé de $t_0 = nT - mT$ avec $0 \leq m < 1$ et $n \in \mathbb{N}$.

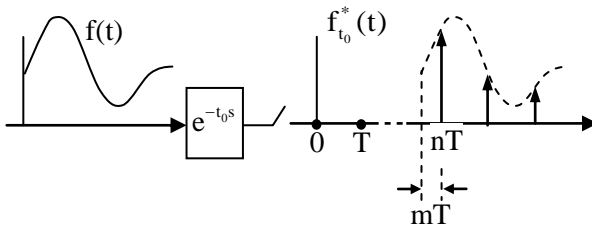


Fig. 4-25 Échantillonnage d'un signal ayant un retard fractionnaire.

Pour $n = 1$, le retard est $t_0 = (1 - m)T$ et on a :

$$f_{t_0}^*(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f[t - (1 - m)T] \delta(t - kT)$$

dont la transformée Z est appelée transformée Z modifiée de $f(t)$ de paramètre m . On la désigne par $Zf(z, m)$ et elle est donc définie par

$$\boxed{Zf(z, m) = Z[f(t - (1 - m)T)]} \\ = z^{-1} Z[f(t + mT)] \\ = Z[f(s)e^{-(1-m)Ts}]. \quad (4-46)$$

Cette fonction est parfois désignée par $Z_m[f(t)]$ ou $Z_m[f(s)]$.

Si la fonction $f(t)$ est retardée de $t_0 = nT - mT$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq m < 1$, sa transformée Z est alors

$$\boxed{Z[f_{t_0}^*(t)] = z^{-(n-1)} \cdot Zf(z, m).} \quad (4-47)$$

Calcul de $Zf(z, m)$. De la transformée inverse de Laplace

$$f(t) = \frac{1}{2j\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} f(s)e^{st}ds,$$

où c est à droite de tous les pôles de $f(s)$, on tire

$$f(iT + mT) = \frac{1}{2j\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} f(s)e^{s(iT+mT)}ds.$$

D'où, de la définition (4-46), on déduit que

$$Zf(z, m) = z^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2j\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} f(s)e^{s(iT+mT)}ds \right) z^{-i},$$

$$= z^{-1} \frac{1}{2j\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} f(s)e^{smT} \sum_{i=0}^{\infty} (e^{sT}z^{-1})^i ds,$$

$$= \frac{1}{2j\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} f(s) \frac{e^{smT}}{z - e^{sT}} ds.$$

Ainsi,

$$\boxed{Zf(z, m) = \sum \text{Res} \left(f(s) \frac{e^{smT}}{z - e^{sT}} \right)} \quad (4-48)$$

la sommation étant portée sur les pôles de $f(s)$.

Exemples 4-12

a) Calculons à partir de sa définition (4-46) la transformée Z modifiée de te^{-at} , $a \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} Z_m(te^{-at}) &= z^{-1}Z[(t+mT)e^{-a(t+mT)}], \\ &= e^{-amT} z^{-1}[Z(te^{-at}) + mTZ(e^{-at})]. \end{aligned}$$

Tenant compte de (4-4) et (4-13), on obtient :

$$\begin{aligned} Z_m(te^{-at}) &= Te^{-amT} \left[\frac{e^{-aT}}{(z - e^{-aT})^2} + m \frac{1}{z - e^{-aT}} \right], \\ &= \frac{Te^{-amT} [mz + (1-m)e^{-aT}]}{(z - e^{-aT})^2}. \end{aligned}$$

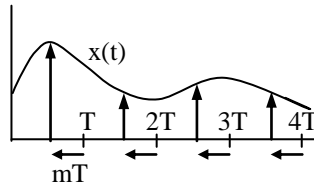
b) Appliquons (4-48) à la même fonction :

$$\begin{aligned} Z_m(te^{-at}) &= \sum \text{Res} \frac{1}{(s+a)^2} \frac{e^{smT}}{z - e^{sT}} = \frac{d}{ds} \left(\frac{e^{smT}}{z - e^{sT}} \right) \Big|_{s=-a} \\ &= \frac{mTe^{smT}(z - e^{sT}) + Te^{sT}e^{smT}}{(z - e^{sT})^2} \Big|_{s=-a} \\ &= \frac{Te^{-amT} [mz + (1-m)e^{-aT}]}{(z - e^{-aT})^2}. \end{aligned}$$

On arrive donc au même résultat que celui de a).

Échantillonnage asynchrone. Supposons qu'un système comporte un échantillonneur qui a la même fréquence que les autres échantillonneurs mais il est en avance de mT , $0 < m < 1$, c'est-à-dire qu'il échantillonne aux instants $kT - mT$ au lieu de kT et produit d'un signal $x(t)$ la suite $x(kT - mT)$ comme le montre la figure 4-26.

Fig. 4-26 Échantillonnage asynchrone



Cette suite peut être aussi obtenue en retardant d'abord $x(t)$ de mT , en l'échantillonnant aux instants kT (par un échantillonneur synchrone) puis en avançant de mT les impulsions produites. Ceci revient à dire qu'un échantillonneur asynchrone est

équivalent à un échantillonneur synchrone précédé par un retard de mT et suivi d'une avance de mT (fig. 4-27).

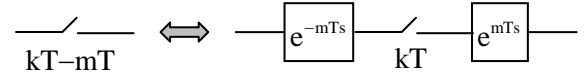
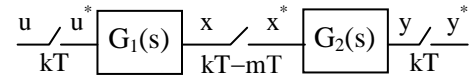


Fig. 4-27 L'équivalent d'un échantillonneur asynchrone.

Exemple 4-13

Considérons le système suivant.



Tenant compte de l'équivalence de la figure 4-17, la transmittance Z de ce système est

$$G(z) = Z[e^{-mTs} G_1(s)] \cdot Z[e^{mTs} G_2(s)].$$

Or, par définition de la transformée modifiée,

$$Z[e^{-mTs} G_1(s)] = Z_{(1-m)}[G_1(s)]$$

et

$$\begin{aligned} Z[e^{mTs} G_2(s)] &= Z[e^{Ts} e^{-(1-m)Ts} G_2(s)], \\ &= z \cdot Z_m[G_2(s)]. \end{aligned}$$

Donc

$$G(z) = z \cdot Z_{(1-m)}[G_1(s)] \cdot Z_m[G_2(s)].$$

Pour $T = 1$, $m = 0.6$, $G_1(s) = 1/s$ et $G_2(s) = 1/(s+1)$,

$$\begin{aligned} G(z) &= z \text{Res} \left(\frac{1}{s} \frac{e^{0.4sT}}{z - e^{sT}} \right) \text{Res} \left(\frac{1}{s+1} \frac{e^{0.6sT}}{z - e^{sT}} \right), \\ &= \frac{e^{-0.6} z}{(z-1)(z-e^{-1})}. \end{aligned}$$

EXERCICE 4-8

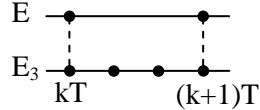
Pour les données du système de l'exemple 4-13, montrer que si l'entrée est $u = \delta(t)$, la sortie analogique est

$$y(t) = \sum_{k \leq t-0.4} \exp[-t + (k+0.4)].$$

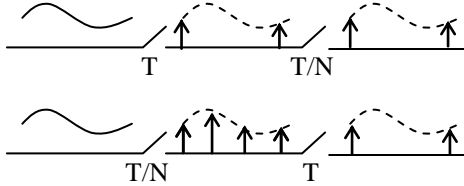
Représenter $y(t)$ et retrouver le résultat de cet exemple.

Échantillonnage à fréquences multiples.

Supposons qu'un système comporte un ou plusieurs échantillonneurs rapides E_N dont la période T/N est N fois plus petite que la période T des échantillonneurs lents E et admettons que les échantillonneurs rapides et lents sont synchrones aux instants kT . La figure suivante montre les instants d'échantillonnage de E_3 durant une période de E quand le synchronisme en kT est effectif.



Remarquons d'abord que deux échantillonneurs, l'un lent et l'autre rapide, placés en série et vérifiant l'hypothèse de synchronisme sont équivalents au seul échantillonneur lent comme l'explique la figure suivante.



D'autre part, un échantillonneur rapide E_N est équivalent à N échantillonneurs lents parallèles, chacun étant précédé par une avance et suivi par un retard comme le montre la figure 4-28. En effet, l'échantillon $x(kT + iT/N)$ d'un signal $x(t)$ à l'instant $kT + iT/N$, $i = 0, \dots, N-1$, peut être obtenu en retardant de iT/N l'échantillon à l'instant kT du signal avancé $x(t + iT/N)$.

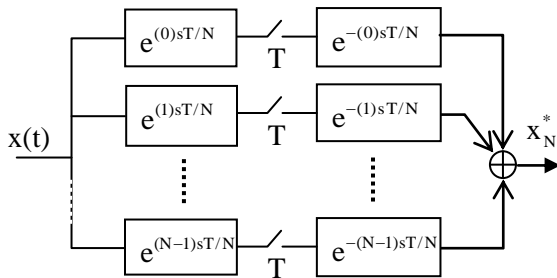


Fig. 4-28 L'équivalent d'un échantillonneur rapide de période T/N .

Considérons un système de fonction de transfert $G(s)$ placé entre deux échantillonneurs l'un rapide et l'autre lent. Deux cas se présentent selon que

l'échantillonneur lent soit avant ou après la fonction de transfert $G(s)$.

a) Échantillonnage lent - rapide

Quand l'échantillonneur lent E est à l'entrée du système $G(s)$ et l'échantillonneur rapide E_N est à sa sortie, on peut intercaler entre E et $G(s)$ un échantillonneur rapide E_N sans modifier le signal à l'entrée de $G(s)$ ni, par conséquent, à sa réponse.

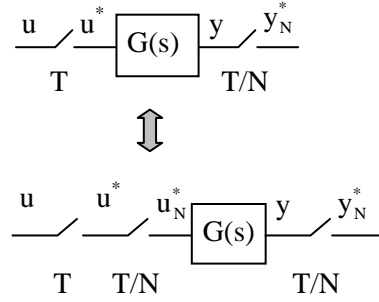


Fig. 4-29 Échantillonnage lent - rapide

D'après l'équivalence de la figure 4-29 et sachant que $u_N^*(s) = u^*(s)$, on a :

$$y_N^*(s) = G_N^*(s) u_N^*(s) = G_N^*(s) u^*(s) \quad (4-49)$$

où l'indice N signifie que la période d'échantillonnage est T/N au lieu de T . Par conséquent, la transmittance $G_N(z)$ s'obtient à partir de $G(z)$ en remplaçant T par T/N et z par $\zeta = e^{sT/N} = z^{1/N}$. On peut donc écrire la relation (4-49) en transformée Z sous la forme :

$$y(\zeta) = G(\zeta) u(z), \quad z = \zeta^N \quad (4-50)$$

où les arguments ζ et z distinguent entre l'échantillonnage rapide et l'échantillonnage lent.

Exemple 4-14

La transformée Z de la réponse échantillonnée chaque seconde d'un système $G(s) = 1/(s + 1)$ soumis à un échelon unité échantillonné chaque 3 secondes est

$$\begin{aligned} y(\zeta) &= G(\zeta) u(z), \quad z = \zeta^3, \\ &= \text{Res} \left(\frac{1}{s+1} \frac{\zeta}{\zeta - e^{s(1)}} \right) \frac{z}{z-1} = \frac{\zeta}{\zeta - e^{-1}} \frac{\zeta^3}{\zeta^3 - 1}. \end{aligned}$$

Au lieu de calculer l'inverse de cette fonction par décomposition en facteurs simples ou par la méthode des résidus, il est plus instructif de remarquer que $\zeta/(\zeta - e^{-1}) = Z(e^{-1}) = Z(e^{-k})$ et que

$$y(\zeta) = Z(e^{-k})(1 + \zeta^{-3} + \zeta^{-6} + \dots)$$

d'où
$$y_k = \sum_{i \leq k/3} e^{-(k-3i)}$$

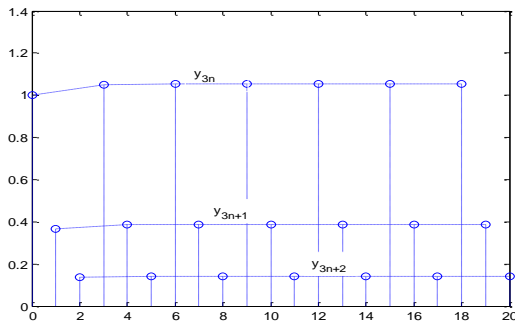
En posant $k = 3n + v$, $n \in \mathbb{N}$ et $v = 0, 1, 2$, on tire

$$y_{3n+v} = \sum_{i \leq n} e^{-(3n+v-3i)} = e^{-v} \frac{1 - e^{-3(n+1)}}{1 - e^{-3}}$$

qui tend rapidement vers $e^{-v} / (1 - e^{-3})$ quand $n \rightarrow \infty$.

On peut vérifier ce résultat en introduisant dans Matlab les instructions suivantes.

```
>> z = tf('z', 1);
>> y = z^4/((z-exp(-1))*(z^3-1));
>> n = 0:20;
>> yt = impulse(y, n);
>> stem(n, yt)
>> hold
Current plot held
>> y0=(1-exp(-3*(n+1)))/(1-exp(-3));
>> y1=exp(-1)*(1-exp(-3*(n+1)))/(1-exp(-3));
>> y2=exp(-2)*(1-exp(-3*(n+1)))/(1-exp(-3));
>> plot(0:3:18, y0(1:7), :);
>> plot(1:3:19, y1(1:7), :);
>> plot(2:3:20, y2(1:7), :);
```



EXERCICE 4-9

Écrire l'expression de la réponse analogique $y(t)$ de l'exemple 4-14. Représenter cette fonction et retrouver le résultat de cet exemple.

b) Échantillonnage rapide - lent

Quand à l'entrée d'un organe $G(s)$ l'échantillonneur est N fois plus rapide que l'échantillonneur à sa sortie, une solution pour déterminer cette sortie consiste à remplacer l'échantillonneur rapide par son diagramme équivalent de la figure 4-27 comme le montre la figure 4-30.

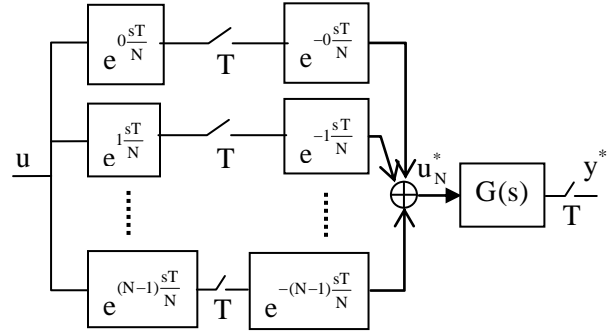


Fig. 4-30 Échantillonnage rapide - lent équivalent

D'après cette figure, on a :

$$y(z) = G(z)u(z) + \sum_{k=1}^{N-1} Z[e^{-\frac{k}{N}Ts} G(s)] Z[e^{\frac{k}{N}Ts} u(s)]. \quad (4-51)$$

Or, d'après (4-46) et pour $k \neq 0$,

$$Z[e^{-\frac{k}{N}Ts} G(s)] = ZG(z, m) \Big|_{m=1-k/N}$$

et

$$Z[e^{\frac{k}{N}Ts} u(s)] = Z[e^{Ts} e^{-(1-\frac{k}{N})Ts} u(s)] = z \cdot Zu(z, m) \Big|_{m=k/N}.$$

En remplaçant dans (4-51), on obtient :

$$y(z) = G(z)u(z) + z \sum_{k=1}^{N-1} ZG(z, 1-m) Zu(z, m) \Big|_{m=k/N}. \quad (4-52)$$

Exemple 4-15

La transformée Z de la réponse échantillonnée chaque 3 secondes d'un système $G(s) = 1/(s + 1)$ soumis à un échelon unité échantillonné chaque seconde est donnée par (4-52) avec $N = 3$ et $T = 3$. D'où

$$y(z) = \frac{z}{z - e^{-3}} \frac{z}{z - 1} + z \sum_{k=1}^2 \text{Res} \left(\frac{1}{s+1} \frac{e^{\frac{N-k}{N} T_s}}{z - e^{3s}} \right) \text{Res} \left(\frac{1}{s} \frac{e^{\frac{k}{N} T_s}}{z - e^{3s}} \right) = \frac{z + e^{-2} + e^{-1}}{z - e^{-3}} \frac{z}{z - 1}.$$

Sa transformée inverse est

$$y_k = \sum \text{Res} \left(\frac{z + e^{-2} + e^{-1}}{z - e^{-3}} \frac{z^k}{z - 1} \right) = \frac{1}{1 - e^{-1}} - \frac{e^{-(3k+1)}}{1 - e^{-1}}$$

ou

$$y_k = \frac{e}{e - 1} (1 - e^{-(3k+1)}).$$

EXERCICE 4-10

Écrire l'expression de la réponse analogique $y(t)$ de l'exemple 4-15, représenter cette fonction et retrouver le résultat de cet exemple.

Autre méthode

Une autre solution que la précédente consiste à intercaler un échantillonneur rapide entre la sortie du système et l'échantillonneur lent comme le montre la figure 4-31. Nous savons que cette modification n'affecte pas la sortie échantillonnée.

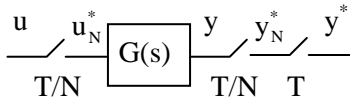


Fig. 4-31 Échantillonnage rapide - lent, autre équivalence.

Soit $y(\zeta) = G(\zeta)u(\zeta)$, $\zeta = e^{sT/N}$, la transformée Z de la réponse à échantillonnage rapide y_N^* . D'après la formule d'inversion (4-27), on a :

$$y(kT) = y \left(kN \frac{T}{N} \right) = \frac{1}{2j\pi} \oint_C y(\zeta) \zeta^{kN-1} d\zeta.$$

Par conséquent, la transformée Z de la réponse à échantillonnage lent est

$$y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT) z^{-k} = \frac{1}{2j\pi} \oint_C \frac{y(\zeta)}{\zeta} \sum_{k=0}^{\infty} (\zeta^N z^{-1})^k d\zeta, \quad z = e^{sT}.$$

Donc

$$y(z) = \sum \text{Res} \left(\frac{y(\zeta)}{\zeta} \frac{z}{z - \zeta^N} \right). \quad (4-53)$$

EXERCICE 4-11

En appliquant la formule (4-53), retrouver le résultat de l'exemple 4-15.

4-6 TRANSMITTANCE D'UN DIAGRAMME

Le diagramme de certains systèmes de commande peut comporter plusieurs chemins joignant la référence à la sortie ou plusieurs boucles internes. Nous montrons à l'aide d'exemples comment peut-on déterminer l'expression de la réponse d'un système échantillonné défini par un tel diagramme. Notons d'abord qu'un signal du diagramme peut être affecté par quatre types de sous-systèmes.

1) Analogique - analogique

$$v \rightarrow [H] \rightarrow x \quad x(s) = H(s) v(s)$$

2) Digital - analogique

$$v^* \rightarrow [H] \rightarrow x \quad x(s) = H(s) v^*(s)$$

3) Digital - digital

$$v^* \rightarrow [H] \rightarrow x^* \quad x^*(s) = H^*(s) v^*(s)$$

4) Analogique - digital

$$v \rightarrow [H] \rightarrow x^* \quad x^*(s) = (Hv)^*(s)$$

Considérons par exemple les deux systèmes de la figure 4-32.

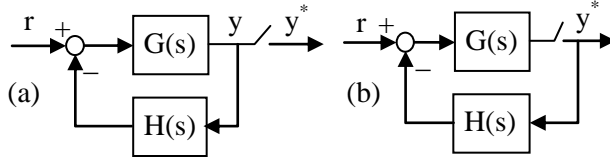


Fig. 4-32 Deux systèmes bouclés différemment

La sortie y^* du système (a) est affectée par l'entrée r à travers une boucle de fonction de transfert $G/(1+HG)$. Cet effet étant du type analogique - digital, on a :

$$y^*(s) = \left(\frac{G}{1+HG} r \right)^*(s)$$

dont l'écriture en transformée Z est

$$y(z) = Z \left(\frac{G(s)}{1+H(s)G(s)} r(s) \right).$$

La sortie y^* du système (b) est la superposition de l'effet analogique - digital de r et de l'effet digital - digital de y^* lui-même, c.à.d.

$$y^*(s) = (Gr)^*(s) - (GH)^*(s)y^*(s)$$

$$\Rightarrow y^*(s) = \frac{(Gr)^*(s)}{1+(GH)^*(s)}$$

ou

$$y(z) = \frac{Z[G(s)r(s)]}{1+Z[G(s)H(s)]}.$$

Supposons que $G(s) = 1/(s+1)$, $H(s) = 1$, $r(s) = 1/s$ et $T = 1$. Pour le système (a),

$$y(z) = Z \left(\frac{1}{s(s+2)} \right) = Z \left(\frac{1/2}{s} - \frac{1/2}{s+2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} Z(1 - e^{-2t}).$$

Donc

$$y_k = \frac{1}{2} (1 - e^{-2k}).$$

Tandis que pour le système (b),

$$y(z) = \frac{Z(1 - e^{-1})}{1 + Z(e^{-1})} = \frac{z/(z-1) - z/(z-e^{-1})}{1 + z/(z-e^{-1})}$$

$$= \frac{z(1 - e^{-1})}{2(z-1)(z-e^{-1}/2)}$$

dont l'inverse est

$$y_k = \frac{e-1}{2e-1} \left[1 - (1/2e)^k \right].$$

En général, pour déterminer l'expression de la réponse d'un diagramme, on suit la procédure suivante.

Soit E l'ensemble constitué de la réponse à déterminer et des sorties des échantillonneurs.

- 1) Partant de la réponse, on écrit l'équation montrant l'effet des signaux de E et des entrées du diagramme sur chaque nouveau signal de E apparaissant dans les équations déjà écrites.
- 2) On termine les équations quand tous les signaux de E sont ainsi exprimés.
- 3) On obtient l'expression de la réponse en fonction des entrées par substitution à rebours.

Exemple 4-16

Déterminons la transmittance $T(z)$ du diagramme de la figure 4-33.

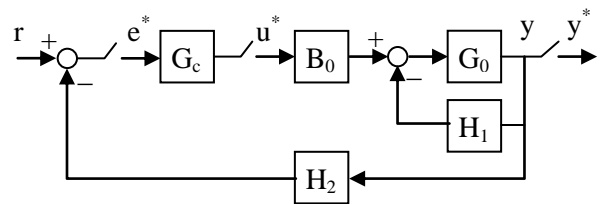


Fig. 4-33 Système bouclé 1

En appliquant la procédure ci-dessus, on a d'abord les équations suivantes :

$$y^*(s) = \left(\frac{B_0 G_0}{1 + G_0 H_1} \right)^*(s) u^*(s)$$

$$u^*(s) = G_c^*(s) e^*(s)$$

$$e^*(s) = (r)^*(s) - \left(\frac{B_0 G_0 H_2}{1 + G_0 H_1} \right)^*(s) u^*(s)$$

En substituant la troisième équation dans la deuxième on tire

$$u^*(s) = \frac{G_c^*(s)r^*(s)}{1 + G_c^*(s)\left(\frac{B_0 G_0 H_2}{1 + G_0 H_1}\right)^*(s)}$$

et en remplaçant dans la première équation, on obtient

$$y^*(s) = \frac{G_c^*(s)\left(\frac{B_0 G_0}{1 + G_0 H_1}\right)^*(s)}{1 + G_c^*(s)\left(\frac{B_0 G_0 H_2}{1 + G_0 H_1}\right)^*(s)} r^*(s)$$

ou

$$T(z) = \frac{y(z)}{r(z)} = \frac{Z(G_c)Z\left(\frac{B_0 G_0}{1 + G_0 H_1}\right)}{1 + Z(G_c)Z\left(\frac{B_0 G_0 H_2}{1 + G_0 H_1}\right)}.$$

Exemple 4-17

Les entrées du système de la figure 4-34 sont la référence r et la perturbation d ; ses sorties sont la réponse analogique y et son échantillonnage y^* . Il comporte deux chemins joignant r à y et deux boucles.

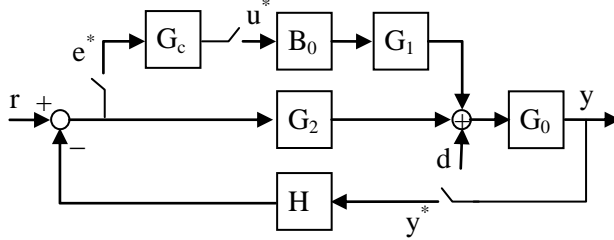


Fig. 4-34 Système bouclé 2

Ses équations sont les suivantes :

$$\begin{aligned} y &= G_0 d + G_0 G_2 r + G_0 G_1 B_0 u^* - G_0 G_2 H y^* \\ y^* &= (G_0 d)^* + (G_0 G_2 r)^* + (G_0 G_1 B_0)^* u^* \\ &\quad - (G_0 G_2 H)^* y^* \\ u^* &= G_c^* e^* \\ e^* &= r^* - H^* y^* \end{aligned}$$

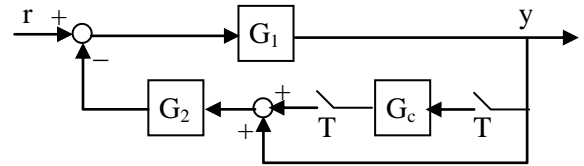
Par substitution à rebours, on obtient :

$$\begin{aligned} y^* &= \frac{(G_0 d)^* + (G_0 G_2 r)^* + (G_0 G_1 B_0)^* G_c^* r^*}{1 + (G_0 G_2 H)^* + (G_0 G_1 B_0)^* G_c^* H^*}, \\ y &= G_0 d + G_0 G_2 r + G_0 G_1 B_0 G_c^* r^* \\ &\quad - G_0 (G_1 B_0 G_c^* H^* + G_2 H) y^*. \end{aligned}$$

On remarque que ce système ne possède pas une transmittance explicite entre r^* et y^* ni entre d^* et y^* mais son polynôme caractéristique (le dénominateur de y^*), qui jouera un rôle essentiel pour la stabilité et la performance, est bien défini.

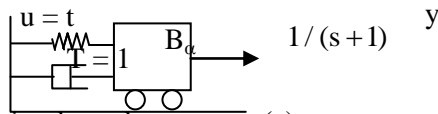
EXERCICE 4-12

Déterminer en fonction de la référence r la transformée Z de la réponse y du système suivant.



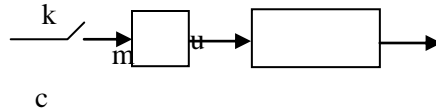
AUTRES EXERCICES ET COMPLÉMENTS

4-13. Représenter la réponse d'un bloqueur d'ordre partiel $\alpha \in [0, 1]$ (voir exercice 4-2) à une impulsion de Dirac $\delta(t)$ et déduire sa fonction de transfert $B_\alpha(s)$. Retrouver $B_0(s)$ et écrire l'expression de $B_1(s)$. Déterminer et représenter la réponse $y(t)$ du système suivant pour $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$.



Déduire dans chaque cas $y(z)$ et retrouver le résultat en appliquant la formule de conversion (4-37).

4-14. Une mitrailleuse peut être modélisée par le système suivant où u est un train d'impulsions d'intensité f et de période $T = 2\pi/\omega$.



En posant $c = 2m\xi$ et $k = m(\xi^2 + \omega^2)$ et sachant qu'à l'instant initial le système est inerte, déterminer la position $x(t)$ de m en un instant $t > 0$ et représenter $x(t)$.

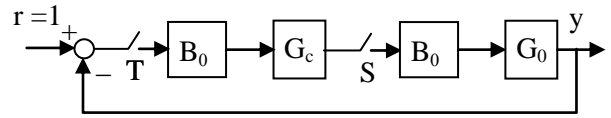
4-15. Pour calculer $S_n^p = \sum_{k=1}^n k^p$, $p \in \mathbb{N}$, on remarque que $S_n^p - S_{n-1}^p = n^p$. Écrire l'expression de $Z(S_n^p)$ en fonction de $Z(n^p)$ et donner une relation liant $Z(S_n^p)$ à $Z(S_n^{p-1})$ et sa dérivée. Que vaut $Z(S_n^0)$? Déduire S_n^p pour $p = 1$ et $p = 2$.

4-16. La réponse impulsionnelle d'un système est la suite périodique $(0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ \dots)$. Déterminer sa transmittance puis retrouver sa réponse impulsionnelle par décomposition et par la formule d'inversion.

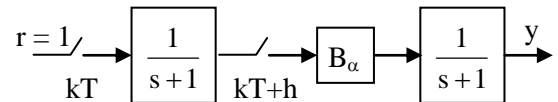
4-17. Soit u_k la somme retirée ($u_k < 0$) ou déposée ($u_k \geq 0$) à la banque au début d'un mois k . En posant $\beta = 1 + \alpha$ où $\alpha (< 1)$ est l'intérêt mensuel, écrire l'expression de la transmittance liant la suite u_k à la suite des valeurs y_k du capital au début des mois. Si l'on retire 2000\$ chaque 3 mois en déposant 1000\$ au début de chacun des autres mois, comment varie le capital ?

4-18. Pour le système ci-dessous où $T = 1$, $G_c(s) = 1/s$ et $G_0(s) = 1/(s+1)$, déterminer y_k pour chacun des cas suivants :

- 1) S est un échantillonneur de période T .
- 2) S est un échantillonneur de période $T/3$.
- 3) S échantillonne aux instants $0, T/3, T, T+T/3, 2T, 2T+T/3, 3T, 3T+T/3, \dots$



4-19. Déterminer et représenter la réponse y_k du système suivant pour $h = 0$ et $h = 0.2$ avec $T = 1$.



4-20. Déterminer la transmittance Zy/Zr du système suivant où $T = 1$, $G_0(s) = 1/(s+4)$, $G_c(s) = (s+2)/s$, $H_1 = 1/2$ et $H_2 = 4/s$.

