

Chapitre 5

ANALYSE ET COMMANDE DES SYSTÈMES DISCRETS

Nous savons qu'il est nécessaire de s'assurer de la stabilité, de la bonne performance et de la robustesse d'une politique de commande d'un système donné avant de l'adopter définitivement pour ce système. La première partie de ce chapitre aura pour objet l'analyse de ces critères pour les systèmes discrets et la seconde partie regroupe des suggestions et une manière de réfléchir pour concevoir leur commande. Nous verrons qu'il existe des transformations qui ramènent un système discret à un système analogique équivalent ce qui permet d'employer pour l'analyse ou la conception de la commande les techniques analogiques du chapitre 3. Mais il est aussi possible d'appliquer des méthodes purement discrètes qui peuvent se révéler plus efficaces que les méthodes analogiques.

5-1 STABILITÉ

Soit $g(t)$ la réponse à une impulsion de Dirac $\delta(t)$ d'un système linéaire invariant initialement inerte de transmittance $G(z) = Z[g(t)]$. On dit que $G(z)$ est stable si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g(kT) = 0,$$

T étant la période d'échantillonnage. En désignant par p_i les pôles de $G(z)$ et en appliquant la formule d'inversion

$$g(kT) = \sum \text{Res}[G(z)z^{k-1}],$$

on obtient (voir exemple 4-5)

$$g(kT) = \sum_{p_i} A_i(k) p_i^k, \quad (5-1)$$

où $A_i(k)$ est un polynôme en k de degré inférieur à la multiplicité m_i du pôle p_i . Sachant que la puissance varie plus rapidement que le polynôme, on déduit de (5-1) que

$$g(kT) \rightarrow 0 \Leftrightarrow |p_i| < 1 \forall i.$$

Ainsi, pour qu'un système $G(z)$ soit stable, il est nécessaire et suffisant que tous ses pôles soient à l'intérieur du cercle unité (fig.5-1)

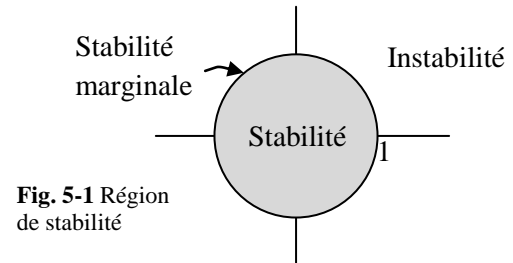


Fig. 5-1 Région de stabilité

Remarque. Nous savons que $G(z)$ est lié à $G(s)$ par la relation

$$G(z) = \sum \text{Res} \left(G(s) \frac{z}{z - e^{sT}} \right) \quad (5-2)$$

qui montre que les pôles p de $G(z)$ sont liés aux pôles $p_s = -\sigma + j\omega$ de $G(s)$ par la transformation :

$$p = e^{p_s T} = e^{-\sigma T} \cdot e^{j\omega T} = \rho \cdot e^{j\varphi}. \quad (5-3)$$

On peut aussi déduire de (5-2) que si p_s est un pôle de $G(s)$ de multiplicité m , alors $p = e^{p_s T}$ est un pôle de $G(z)$ de multiplicité m . La stabilité de $G(z)$ ($\rho < 1$) est donc équivalente à celle de $G(s)$ ($-\sigma < 0$). La

2 Analyse et commande des systèmes discrets

figure 5-2 montre la correspondance entre les pôles p_s et les pôles p .

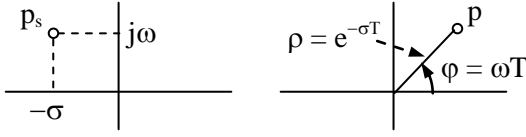


Fig. 5-2 Correspondance entre p_s et p

Stabilité asymptotique. À la transmittance

$$G(z) = \frac{Zy}{Zu} = \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}$$

correspond l'équation récurrente

$$\sum_{i=0}^2 a_i y(t + iT) = \sum_{i=0}^2 b_i u(t + iT).$$

Si l'entrée u est nulle on dit que la réponse y est *libre*, dépendant seulement des conditions initiales $y(0) = y_0$ et $y(T) = y_1$. Dans ce cas, la transformée Z de l'équation précédente s'écrit

$$a_2(z^2 Zy - z^2 y_0 - z y_1) + a_1(z Zy - z y_0) + a_0 Zy = 0.$$

La transformée Z de la réponse libre est donc

$$Zy = \frac{a_2 y_0 z^2 + (a_2 y_1 + a_1 y_0)z}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}$$

dont le dénominateur est le même que celui de la transmittance $G(z)$ du système considéré. Par conséquent, en supposant que des pôles de $G(z)$ ne soient pas simplifiés par des zéros de $G(z)$, Zy a les mêmes pôles p_i que $G(z)$. D'où, quand $k \rightarrow \infty$, $g(kT) \rightarrow 0 \Leftrightarrow y(kT) \rightarrow 0$. Ceci se généralise directement à un système d'ordre quelconque : un système linéaire invariant dont les pôles instables ne sont pas simplifiés par des zéros est stable si et seulement s'il est *asymptotiquement stable* c.à.d. si sa réponse libre tend vers 0 quelles que soient les conditions initiales.

Stabilité BIBO. Un système est BIBO stable si sa réponse à toute entrée bornée est bornée (Bounded Input, Bounded Output).

On a d'abord la propriété suivante.

P1. Un système linéaire est BIBO stable si et seulement si sa réponse impulsionnelle $g(kT)$ est absolument sommable, c.à.d. si

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g(kT)| < \infty. \quad (5-4)$$

Preuve

a) Nous savons que la réponse y_k d'un système linéaire à une entrée u_k , nulle pour $k < 0$, est donnée à l'instant iT par le produit de convolution

$$y_i = \sum_{k=0}^i g_k u_{i-k} = \sum_{k=0}^{\infty} g_k u_{i-k}.$$

Si $|u_k|$ est borné par un nombre positif u_M , l'équation précédente et l'inégalité (5-4) impliquent

$$|y_i| \leq u_M \sum_{k=0}^{\infty} |g_k| < \infty \quad \forall i,$$

d'où le système est BIBO stable.

b) Inversement, montrons par l'absurde que si le système est BIBO stable, l'inégalité (5-4) est vraie. Dans ce but, choisissons, pour i fixé, l'entrée définie par $u_{i-k} = \text{sgn}(g_k)$ pour $0 \leq k \leq i$ et nulle ailleurs. Il est évident qu'une telle entrée est bornée $\forall i$ et sa réponse à l'instant iT est

$$y_i = \sum_{k=0}^i g_k \text{sgn}(g_k) = \sum_{k=0}^i |g_k|.$$

Si (5-4) n'était pas vraie, on aurait

$$\lim_{i \rightarrow \infty} y_i = \sum_{k=0}^{\infty} |g_k| = \infty$$

ce qui est en contradiction avec la stabilité BIBO ■

De l'équivalence entre (5-4) et la BIBO stabilité, nous allons déduire la propriété suivante.

P2. Un système linéaire invariant est stable si et seulement s'il est BIBO stable.

Preuve

La condition suffisante est immédiate puisque

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g(kT)| < \infty \Rightarrow g(kT) \rightarrow 0.$$

3 Analyse et commande des systèmes discrets

Pour montrer la condition nécessaire remarquons, d'après (5-1), que $g(kT)$ est une somme finie de termes de la forme $A_{ir} k^r p_i^k$ où A_{ir} est une constante. Par conséquent $\sum_0^\infty |g(kT)|$ est inférieur à une somme finie de séries chacune de la forme $\sum_0^\infty |A_{ir}| k^r |p_i|^k$. Comme une telle série converge quand $|p_i| < 1$, il en est de même de $\sum_0^\infty |g(kT)|$ et de la propriété P1 on déduit que tout système stable est BIBO stable ■

Ce qui précède montre que, pour les systèmes linéaires invariants dont les pôles instables ne sont pas simplifiés, la stabilité asymptotique et la stabilité BIBO sont équivalentes à la stabilité telle qu'elle est définie au début du paragraphe. Pour tester la stabilité de $G(z)$, il existe 2 méthodes directes, celles de Jury et de Nyquist et deux autres méthodes qui consistent à appliquer les critères analogiques de Routh ou de Nyquist à une transformée de $G(z)$.

Critère de Jury. Nous donnons cette méthode sans démonstration. Supposons que le dénominateur de la fonction $G(z)$ est le polynôme

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, \text{ avec } a_n > 0.$$

1) On dresse le tableau suivant :

$$\begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\ \\ b_0 & b_1 & \dots & b_{n-2} & b_{n-1} & \\ b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_1 & b_0 & \\ \\ c_0 & c_1 & \dots & c_{n-2} & & \\ c_{n-2} & c_{n-3} & \dots & c_0 & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ g_0 & g_1 & g_2 & & & \end{array}$$

où les nombres b_k , c_k , ... sont donnés par les déterminants

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix}, \quad c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-k} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix}, \dots$$

et le tableau se termine quand on arrive à une ligne à 3 éléments.

2) Toutes les racines de $P(z) = 0$ sont à l'intérieur du cercle unité si et seulement si toutes les inégalités suivantes sont satisfaites :

$$P(1) > 0, \quad (-1)^n P(-1) > 0,$$

$$|a_0| < |a_n|,$$

$$|b_0| > |b_{n-1}|, \quad |c_0| > |c_{n-2}|, \quad \dots, \quad |g_0| > |g_2|.$$

Si $P(z)$ est de second degré ($n = 2$), il suffit que les 3 premières inégalités soient satisfaites.

EXERCICES 5-1

Montrer que les 3 premières conditions de Jury sont nécessaires et suffisantes pour que les racines d'un polynôme de second degré $P(z)$ soient à l'intérieur du cercle unité.

Indication. Écrire $P(z)$ sous la forme :

$$a_2(z - p_1)(z - p_2), \quad a_2 > 0.$$

Exemple 5-1

Le tableau de Jury du polynôme

$$P(z) = 4z^4 + 5z^3 + 6z^2 - 2z - 1$$

est le suivant :

$$\begin{array}{cc|cc|c} -1 & -2 & 6 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & -2 & -1 \\ \hline -15 & -18 & -30 & 3 & \\ 3 & -30 & -18 & -15 & \\ \hline 216 & 360 & 504 & & \end{array}$$

$$P(1) = 4 + 5 + 6 - 2 - 1 = 12 > 0 \quad \checkmark$$

$$(-1)^4 P(-1) = 4 - 5 + 6 + 2 - 1 = 6 > 0 \quad \checkmark$$

$$|a_0| = 1 < 4 = |a_4| \quad \checkmark$$

$$|b_0| = 15 > 3 = |b_3| \quad \checkmark$$

$$|c_0| = 216 < 504 = |c_2| \quad \text{X}$$

Comme une des conditions de Jury n'est pas vérifiée (la dernière), il existe au moins une racine de $P(z)$ à l'extérieur du cercle unité. Contrairement aux critères de Routh et de Nyquist, celui de Jury ne détermine pas le nombre des racines instables mais

ceci ne présente généralement pas un inconvénient majeur.

EXERCICE 5-2

Montrer que toutes les racines de

$$P(z) = 8z^4 - 2z^2 - 2z + 1$$

sont à l'intérieur du cercle unité.

Critère discret de Nyquist. Souvent le diagramme d'un système discret de commande peut se ramener à celui de la figure 5-3 où $G(z)$ englobe l'organe de commande, le bloqueur, l'actionneur, l'objet commandé, le capteur et éventuellement d'autres organes.

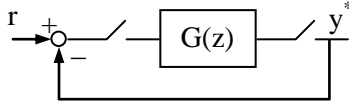


Fig. 5-3 Diagramme simplifié d'un système de commande

Posons

$$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{K \prod_{i=1}^m (z - \zeta_i)}{\prod_{k=1}^n (z - q_k)}, \quad m \leq n. \quad (5-5)$$

La transmittance entre r^* et y^* est

$$T(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)}$$

dont les pôles sont les zéros p_k de

$$1 + G(z) = \frac{\prod_{k=1}^n (z - p_k)}{\prod_{k=1}^n (z - q_k)} \quad (5-6)$$

avec $\prod_{k=1}^n (z - p_k) = \prod_{k=1}^n (z - q_k) + K \prod_{i=1}^m (z - \zeta_i).$

Il s'agit de déterminer le nombre des pôles p_k de $T(z)$ qui sont à l'extérieur du cercle unité. Dans ce but, cherchons l'argument de $1 + G(z)$ quand z décrit le cercle γ de rayon 1. Si $G(z)$ a des pôles q_k sur le cercle unité ils sont contournés par des petits demi-cercles de rayon infinitésimal (fig. 5-4) afin que $G(z)$ soit analytique sur γ . Tenant compte de (5-6), on a :

$$\arg[1 + G(z)] = \sum_{k=1}^n \arg(z - p_k) - \sum_{k=1}^n \arg(z - q_k) \quad (5-7)$$

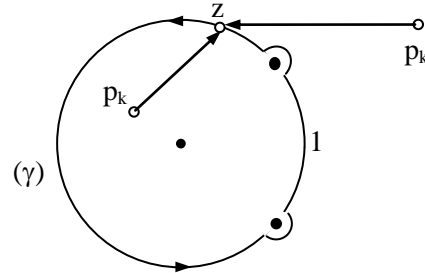


Fig. 5-4 Contour de Nyquist pour les systèmes discrets

On peut voir sur la figure 5-4 que si p_k (ou q_k) est strictement à l'intérieur du contour γ , $\arg(z - p_k)$ (ou $\arg(z - q_k)$) varie de 2π quand z décrit tout γ dans le sens indiqué sur la figure. Par contre, cette variation est nulle si p_k (ou q_k) est à l'extérieur de γ . En posant Z et P les nombres des p_k et des q_k qui sont strictement à l'extérieur du cercle unité et en supposant pour le moment qu'aucun p_k est sur ce cercle, on déduit de (5-7) que $\arg[1 + G(z)]$ varie de $2\pi N$ avec $N = (n - Z) - (n - P) = P - Z$. Le nombre P est généralement connu et pour déterminer

$$Z = P - N, \quad (5-8)$$

il suffit de compter le nombre de tours N que fait le vecteur $\vec{t} = 1 + G(z) = G(z) - (-1)$ quand z décrit tout γ c.à.d. quand $G(z)$ décrit l'image Γ de γ par G , le sens positif d'une rotation étant le trigonométrique.

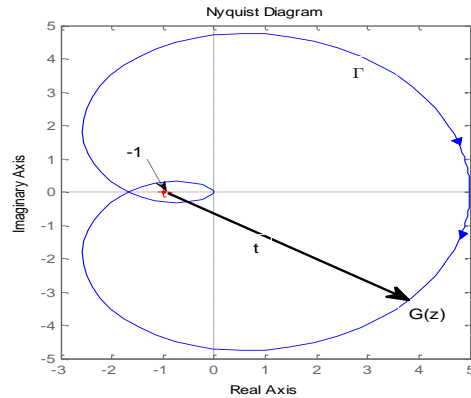


Fig. 5-5 Rotation de \vec{t} quand $G(z)$ décrit Γ

Par exemple, quand $G(z)$ décrit la courbe Γ de la figure 5-5, \vec{t} effectue $N = -2$ tours autour de -1 .

Quand Γ passe par le point -1 , il existe un point z sur γ tel que $G(z) = -1$ c.à.d. z est un pôle p_k de $T(z)$ appartenant au cercle unité d'où $T(z)$ est instable.

Mis à part les demi-cercles infinitésimaux d_k qui contournent les pôles q_k de $G(z)$ situés sur le cercle unité, un point de γ peut s'écrire sous la forme $z = e^{j\omega T}$, $-\pi/T \leq \omega \leq \pi/T$, T étant la période d'échantillonnage. La courbe Γ est donc constituée des images $G(e^{j\omega T})$ de ces points et des images des demi-cercles d_k . Or quand z décrit d_k , le module de $z - q_k$ est infiniment petit et son argument varie de π tandis que les modules des autres termes de $G(z)$, c.à.d. $z - q_j$, $q_j \neq q_k$, et $z - \zeta_i$, sont finis et la variation de leurs arguments est presque nulle. On déduit de (5-5) que si m est la multiplicité de q_k , l'image de d_k est une courbe à l'infini décrite par un point dont l'argument varie de $-m\pi$ (m demi-tours dans le sens horaire).

La partie de Γ relative aux $\omega \geq 0$ est appelée courbe de Nyquist et celle relative aux $\omega \leq 0$ est appelée courbe de Nyquist conjuguée. Ces deux parties, symétriques par rapport à l'axe des réels, s'obtiennent sur Matlab par la même instruction "nyquist(sys)" que pour les systèmes analogiques.

Exemple 5-2

Supposons que

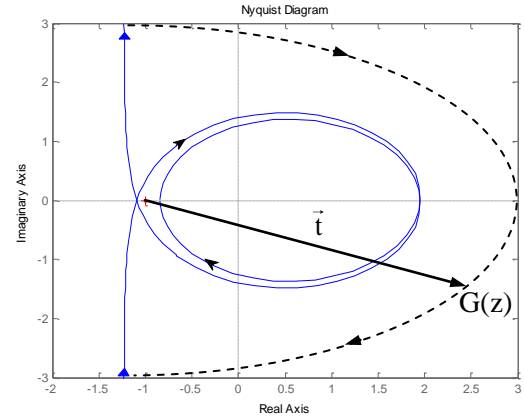
$$G(z) = \frac{3}{(z-1)(2z^2 + 2e^{-1/2}z + 1)}, T = 1.$$

$G(z)$ a un pôle $q_1 = 1$ sur le cercle unité C et deux pôles complexes conjugués $q_{2,3}$ intérieurs à C de module $\sqrt{2}/2 < 1$. Le nombre des pôles de $G(z)$ strictement extérieurs à C est donc $P = 0$.

La courbe Γ s'obtient en écrivant les instructions

```
>> n = 3;
>> d = [2, -2*(1-exp(-1/2)), (1-2*exp(-1/2)), -1];
>> sys = tf(n,d,1); % T = 1
>> nyquist(sys)
```

Nous avons complété la courbe fournie par Matlab par une courbe pointillée représentant l'image à l'infini du demi-cercle infinitésimal d contournant le pôle $q_1 = 1$ situé sur C .



On voit que quand $G(z)$ décrit tout Γ , le vecteur \vec{t} effectue 2 tours dans le sens horaire ($N = -2$). Le nombre de pôles p_k de $T(z)$ qui sont à l'extérieur du cercle unité est donc $Z = -N + P = -(-2) + 0 = 2$ et le système est instable.

EXERCICE 5-3

Soit $G(z) = -(z+1)/[2(z^2 + 2z + 2)]$ la transmittance de la boucle ouverte d'un système de commande. En posant $e^{j\omega T} = \alpha + j\beta$ avec $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, déterminer les points d'intersection de la courbe de Nyquist $G(e^{j\omega T})$ avec l'axe des réels. Vérifier le résultat à l'aide de Matlab.

Transformation homographique. Comme la fonction $G(e^{j\omega T})$ n'est pas rationnelle en ω , la construction manuelle de la courbe de Nyquist des systèmes discrets est plus difficile que la construction de la courbe de Nyquist des systèmes analogiques. Cet inconvénient peut être surmonté en effectuant un changement de variable qui transforme la transmittance $G(z)$ en une fonction de transfert analogique.

Ce changement de variable, appelé transformation homographique, associe à tout nombre complexe z le nombre complexe

$$v = c \frac{z-1}{z+1} \quad (5-9)$$

où c est une constante positive arbitraire. Par cette transformation, l'intérieur du cercle unité C du plan- z a pour image le demi-plan des réels négatifs du plan- v et l'extérieur de C a pour image le demi-plan des réels positifs. Pour le voir, considérons un point z du demi-cercle supérieur de C (fig. 5-6).

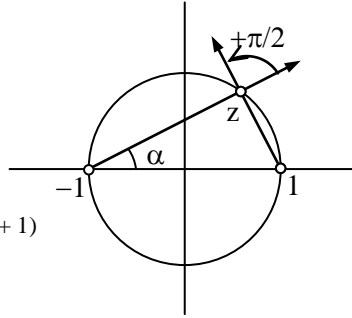


Fig. 5-6 $v = c(z - 1)/(z + 1)$
pour $z \in C$

En examinant cette figure, on constate que

$$|v| = c \frac{|z-1|}{|z+1|} = c \cdot \tan \alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi/2,$$

$$\arg(v) = \arg(z-1) - \arg(z+1) = +\pi/2.$$

Par conséquent $v = c \tan \alpha$ d'où, quand z décrit le cercle C (quand α varie de $-\pi/2$ à $\pi/2$), v décrit l'axe des imaginaires. D'autre part, si z est à l'extérieur de C , on a $0 < |\arg(v)| < \pi/2$ d'où v est à droite de l'axe des imaginaires ($\operatorname{Re}(v) > 0$) et si z est à l'intérieur de C , on a $\pi/2 < |\arg(v)| < \pi$ d'où v est à gauche de l'axe des imaginaires ($\operatorname{Re}(v) < 0$).

La transformation (5-9) est inversible et on a :

$$v = c \frac{z-1}{z+1} \Leftrightarrow z = \frac{c+v}{c-v}. \quad (5-10)$$

Ainsi, ayant une transmittance $G(z)$ et en posant

$$G_v(v) = G\left(\frac{c+v}{c-v}\right) \quad (5-11)$$

les pôles p de $G(z)$ sont liés aux pôles p_v de $G_v(v)$ par l'équation

$$p = \frac{c+p_v}{c-p_v}$$

et $|p| < 1 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(p_v) < 0$.

Il suffit donc d'appliquer le critère de Routh ou de Nyquist analogue à $G_v(v)$ pour tester la stabilité de $G(z)$.

Critère de Routh transformé. Écrivons $G(z)$ sous la forme rationnelle $N(z)/D(z)$ où N et D sont des polynômes de degrés m et n respectivement. Les pôles de $G(z)$ sont les racines de $D(z)$ d'où les pôles de $G_v(v)$ sont les racines du polynôme

$$D_v(v) = (c-v)^n D\left(\frac{c+v}{c-v}\right). \quad (5-12)$$

Pour appliquer le critère de Routh on commence par développer $D_v(v)$ selon les puissances décroissantes de v . Ceci peut être manuellement long si $n > 3$ et le calcul symbolique de Matlab facilite cette tâche.

Exemple 5-3

Supposons que $D(z)$ est le polynôme considéré dans l'exemple 5-1 :

$$P(z) = 4z^4 + 5z^3 + 6z^2 - 2z - 1.$$

En choisissant $c = 1$, on écrit sur la fenêtre de Matlab les instructions suivantes :

```
>> D = @(z) 4*z^4+5*z^3+6*z^2-2*z-1;
>> syms v
>> Dv = D((1+v)/(1-v))*(1-v)^4;
>> collect(Dv)
```

On obtient le polynôme

$$6*v^4 + 6*v^3 + 6*v^2 + 34*v + 12$$

dont le tableau de Routh est le suivant :

6	6	12
6	34	
-28	12	
-256/7		
12		

Comme à la première colonne le signe change 2 fois, $G(z)$ a deux pôles à l'extérieur du cercle unité.

Critère de Nyquist transformé. Il suffit d'appliquer la méthode de Nyquist analogue à la fonction de transfert $G_v(v)$ définie en (5-11) en remplaçant v par $j\omega_v$, $\omega_v \in (-\infty, +\infty)$. Comme l'axe

des imaginaires du plan v est l'image par la transformation homographique (5-10) du cercle unité du plan z , on a :

$$j\omega_v = c \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1} = c \frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{e^{j\omega T/2} + e^{-j\omega T/2}} = c \operatorname{ctg} \left(\frac{\omega T}{2} \right).$$

La vraie fréquence ω est liée à ω_v par l'équation

$$\omega = \frac{2}{T} \arctg(\omega_v / c). \quad (5-13)$$

En choisissant $c = 2/T$, l'équation (5-13) devient $\operatorname{tg}(\omega T/2) = \omega_v T/2$ d'où, pour les faibles valeurs de $\omega T/2$, ω sera presque égale à ω_v .

Exemple 5-4

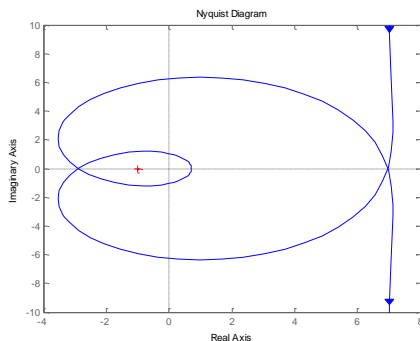
Considérons de nouveau la transmittance de l'exemple 5-2 :

$$G(z) = \frac{3}{(z-1)(2z^2 + 2e^{-1/2}z + 1)}, \quad T = 1.$$

En remplaçant z par $(2 + v)/(2 - v)$, on obtient la fonction de transfert analogique

$$G_v(v) = \frac{-(3/2)(v-2)^3}{v[(3-2e^{-1/2})v^2 + 4v + (12+8e^{-1/2})]}$$

$G_v(j\omega_v)$ est une fonction rationnelle de ω_v dont la courbe de Nyquist se construit par la technique employée en analogique (en étudiant les variations de $\operatorname{Re}[G_v(j\omega_v)]$ et de $\operatorname{Im}[G_v(j\omega_v)]$) ou par l'instruction "nyquist(sys)" de Matlab.



En examinant la courbe de Nyquist de $G_v[j(\omega_v)]$ ci-dessus, on constate que $N = -2$ et comme $P = 0$, la

boucle fermée a deux pôles instables, résultat obtenu d'une manière directe à l'exemple 5-2.

La transformation homographique nous ramène donc aux techniques analogiques déjà connues. Cependant, il est plus simple dans certains cas d'appliquer directement les méthodes discrètes surtout lorsqu'on dispose d'un logiciel d'assistance à l'étude des systèmes automatiques comme celui de Matlab

5-2 RÉPONSE D'UN SYSTÈME ÉCHANTILLONNÉ

Comme en analogique, le fonctionnement d'un système discret stable se caractérise par sa réponse échantillonnée y^* à l'échantillonnage u^* d'un échelon unité ou à celui d'un signal sinusoïdal (fig. 5-7).

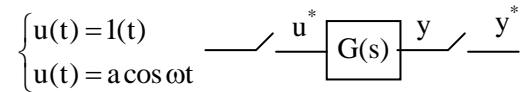


Fig. 5-7 Réponses indicielle et fréquentielle

Quand $u(t) = 1(t)$, on dit que y^* est une réponse indicielle ou temporelle et quand $u(t) = a \cdot \cos \omega t$ (ou $a \cdot \sin \omega t$), on dit qu'elle est fréquentielle.

Réponse indicielle. La transformée z de cette réponse étant $y(z) = G(z)z/(z-1)$, la valeur de l'échantillon à l'instant kT est, d'après (4-28),

$$y_k = \sum \operatorname{Res} \left(\frac{G(z)}{z-1} z^k \right). \quad (5-14)$$

Le résidu en un pôle p_i de multiplicité m vaut

$$\operatorname{Res}(p_i) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-p_i)^m G(z) \frac{z^k}{z-1} \right] \Big|_{z=p_i}$$

et en particulier, le résidu en 1 est $G(1)$ ($G(z)$ étant stable, 1 n'en est pas un pôle).

Exemples 5-5

a) Système de premier ordre. Soit $G(s) = A/(s + \sigma)$, $\sigma > 0$. On a : $G(z) = Z[G(s)] = Az/(z - \rho)$ avec $\rho = e^{-\sigma T}$ et la réponse indicielle de $G(z)$ est

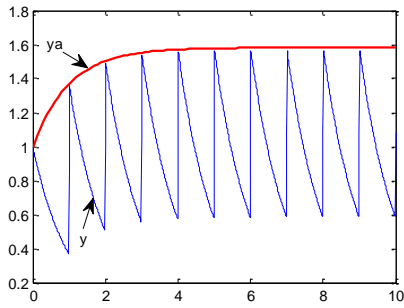
$$y_k = \sum \text{Res} \left(\frac{Az^{k+1}}{(z-\rho)(z-1)} \right)$$

$$= \frac{A}{1-\rho} + A \frac{\rho^{k+1}}{\rho-1} = \frac{A}{1-\rho} (1-\rho^{k+1}).$$

On voit que les y_k sont les échantillons du signal

$$y_a(t) = \frac{A}{1-\rho} (1-\rho e^{-\sigma t})$$

qui est la réponse indicielle du système continu de premier ordre $G_a(s)$ dont le pôle est $-\sigma$. À noter que la fonction $y_a(t)$ diffère considérablement de la réponse $y(t)$ de $G(s)$ à $u^*(t)$ (exercice 5-4) mais son échantillonnage est le même que celui de $y(t)$ comme on peut le voir sur le graphe suivant.



b) Système à pôle double. La réponse indicielle de $G(z) = A/(z-\rho)^2$ avec $\rho = e^{-\sigma T} < 1$, est

$$y_k = \sum \text{Res} \left(\frac{Az^k}{(z-\rho)^2(z-1)} \right)$$

$$= \frac{A}{(1-\rho)^2} + \frac{d}{dz} \left(\frac{Az^k}{z-1} \right) \Big|_{z=\rho}$$

$$= \frac{A}{(1-\rho)^2} \left[1 - \left(kT \frac{(1-\rho)}{\rho T} + 1 \right) \rho^k \right].$$

Ceci est l'échantillonnage du signal

$$y_a(t) = \frac{A}{(1-\rho)^2} \left[1 - \left(\frac{(1-\rho)}{\rho T} t + 1 \right) e^{-\sigma t} \right]$$

qui est la réponse indicielle d'un système continu $G_a(s)$ à pôle double en $-\sigma$.

c) Système à 2 pôles complexes. La réponse indicielle de $G(z) = A/(z-p)(z-\bar{p})$ est

$$y_k = \sum \text{Res} \frac{Az^k}{(z-p)(z-\bar{p})(z-1)}$$

$$= \frac{A}{|p-1|^2} + \frac{A}{|p-1|^2} \frac{p^k(\bar{p}-1) - \bar{p}^k(p-1)}{p-\bar{p}}.$$

En posant $p = e^{(-\sigma+j\omega)T} = \rho e^{j\varphi}$ et θ l'angle entre $p-1$ et l'axe des réels (fig. 5-8), l'expression de la réponse devient

$$y_k = \frac{A}{|p-1|^2} \left(1 - \frac{\rho^k}{\sin \theta} \sin(k\varphi + \theta) \right)$$

qui est l'échantillonnage de

$$y_a(t) = \frac{A}{|p-1|^2} \left(1 - \frac{e^{-\sigma t}}{\sin \theta} \sin(\omega t + \theta) \right).$$

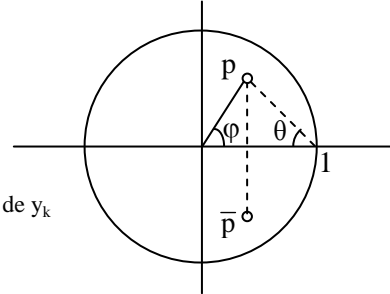


Fig. 5-8 Paramètres de y_k

$y_a(t)$ est la réponse indicielle d'un système continu de pôles $-\sigma \pm j\omega$.

EXERCICE 5-4

Montrer analytiquement et à l'aide de Matlab que le graphe dans l'exemple 5-5 précédent correspond à $G(s) = 1/(s+1)$ et $T = 1$.

Les caractéristiques d'un pôle. Les exemples précédents montrent que la réponse indicielle d'un système discret $G(z)$ de pôles $p = \rho e^{j\varphi}$ est un échantillonnage de la réponse indicielle d'un système continu dont les pôles $p_s = -\sigma + j\omega$ correspondent à ceux de $G(z)$ c.à.d. $\rho = e^{-\sigma T}$ et $\varphi = \omega T$ (fig. 5-2). Pour cette raison, on associe à un pôle p de $G(z)$ les mêmes caractéristiques que celles de son correspondant p_s .

a) Lieu des pôles à constante de temps τ constante.

$$\tau = 1/\sigma \Rightarrow \rho = e^{-\sigma T} = e^{-T/\tau}.$$

Le lieu des pôles de constante de temps τ est donc le cercle de rayon $e^{-T/\tau}$ qui diminue avec τ . La réponse est d'autant plus rapide que ses pôles sont voisins de l'origine.

b) Lieu des pôles à fréquence ω constante.

$$\varphi = \omega T$$

Les pôles de fréquence ω sont donc sur la demi-droite d'argument ωT .

c) Lieu des pôles à facteur d'amortissement ξ constant.

Rappelons que si $\omega_n = |p_s|$ est la fréquence naturelle relative au pôle $p_s = -\sigma + j\omega$, on a :

$$\sigma = \xi \omega_n \quad \text{et} \quad \omega = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$\Rightarrow \rho = e^{-\sigma T} = e^{-\beta \varphi} \quad \text{avec} \quad \beta = \xi / \sqrt{1 - \xi^2}.$$

Le lieu des pôles de facteur d'amortissement ξ est donc une spirale dont le rayon ρ diminue de 1 à $e^{-\beta\pi}$ quand φ varie de 0 à π et, pour φ fixé, il augmente quand ξ diminue.

d) Lieu des pôles à fréquence naturelle ω_n constante.

$$\rho = e^{-\sigma T} = e^{-\sqrt{\omega_n^2 T^2 - \varphi^2}}, \quad |\varphi| \leq \omega_n T.$$

Pour $\varphi = 0$, $\rho = e^{-\omega_n T}$ et pour $\varphi = \omega_n T$, $\rho = 1$. Les lieux des pôles à ω_n constante sont orthogonaux aux lieux des pôles à ξ constant. En effet, dans le plan s le lieu des pôles p_s à ω_n constante est un cercle de centre O et de rayon ω_n et les lieux des pôles p_s à ξ constant sont des demi-droites d'origine O, donc orthogonales au cercle à $\omega_n = c^{1e}$. Comme la transformation $p = e^{p_s T}$ conserve les angles, l'image du cercle dans le plan z est orthogonale aux images des demi-droites dans ce plan. Par conséquent les lieux c) et d) sont orthogonaux, comme c'est le cas pour les lieux a) et b).

La figure 5-9 ci-dessous montre la grille que fournit Matlab pour déterminer les caractéristiques d'un pôle à l'intérieur du cercle unité. Un pôle situé à l'intersection d'une courbe ξ et d'une courbe ω_n lui correspond une constante de temps $\tau = 1/\xi \omega_n$, une fréquence $\omega = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ et un dépassement maximum $DM = e^{-\sigma\pi/\omega}$.

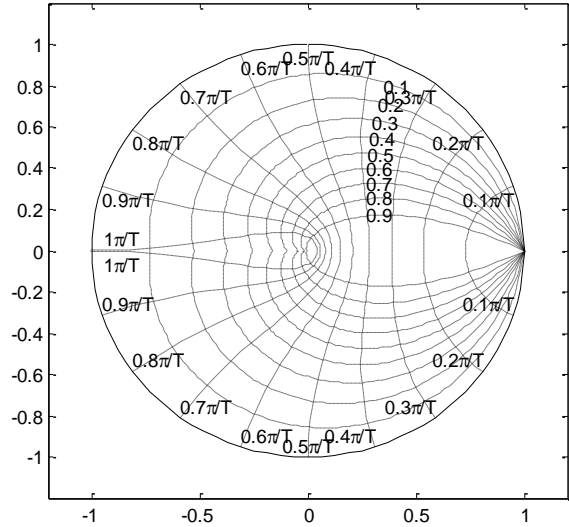


Fig. 5-9 Abaque des ξ et ω_n constants

Pôles dominants. Nous savons que la réponse d'un système en un instant kT est une somme finie de termes de la forme $A_{ir} k^r p_i^k$ où le pôle p_i définit la constante de temps et la fréquence de ce terme. L'amplitude A_{ir} dépend à la fois des pôles et des zéros de la transmittance. D'après (5-14), si le pôle p_i est stable et très voisin d'un zéro, le facteur A_{ir} est presque nul et on peut négliger les termes correspondants à ce pôle. On peut aussi négliger les termes qui s'annulent rapidement c.à.d. ceux dont les pôles ont une constante de temps relativement faible (inférieure de 4 fois la constante de temps d'un autre pôle). Souvent ces simplifications ne laissent que le pôle réel ou les deux pôles complexes conjugués qui ont la plus grande constante de temps c.à.d. les plus voisins du cercle unité. Les caractéristiques de ces pôles, dits dominants, sont des approximations grossières des caractéristiques globales de la réponse du système et serviront comme point de départ dans la recherche d'une commande convenable.

Exemple 5-6

Les pôles de la transmittance

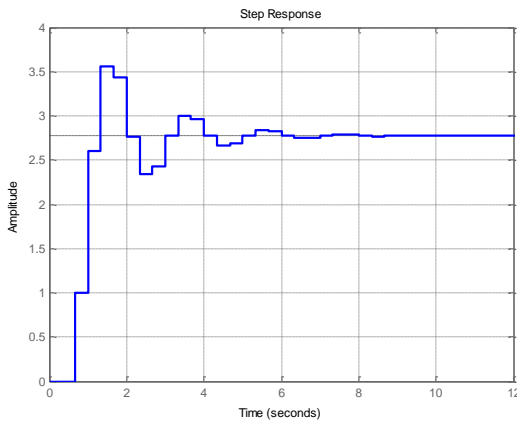
$$G(z) = \frac{z + 0.4}{(z - 0.4)(z^2 - 0.8z + 0.64)}$$

sont $p_1 = 0.4$ et $p_{2,3} = 0.4(1 \pm j\sqrt{3})$ de modules $\rho_1 = e^{-T/\tau_1} = 0.4$ et $\rho_{2,3} = e^{-T/\tau_{2,3}} = 0.8$. Comme $(0.8)^4 > 0.4$, on a $\tau_{2,3}/\tau_1 = \text{Ln}(\rho_{2,3})/\text{Ln}(\rho_1) > 4$ et on peut, en première analyse, négliger le terme de p_1 devant celui de $p_{2,3}$. Pour une période d'échantillonnage $T = 1/3$ sec, la constante de temps τ , le temps de stabilisation t_s , la fréquence ω et la période T_{osc} des oscillations, le nombre n de ces oscillations durant t_s et le dépassement maximum DM associés au pair de pôles dominants $p_{2,3}$ sont

- $\tau = -\frac{T}{\text{Ln}(\rho)} = -\frac{1}{3\text{Ln}(0.8)} = 1.5 \text{ sec.}$
- $t_s = 4.6\tau = 6.9 \text{ sec.}$
- $\omega = \varphi / T = 3 \arctg \sqrt{3} = \pi \text{ rad / sec.}$
- $T_{\text{osc}} = 2\pi/\omega = 2 \text{ sec.}$
- $n = t_s / T_{\text{osc}} = 6.9 / 2 = 3.45$.
- $\text{DM} = e^{-\pi/\tau\omega} = e^{-1/1.5} = 0.51$ ou 51%.

Pour comparer ces caractéristiques aux caractéristiques effectives de la réponse indicielle de $G(z)$, représentons cette dernière en écrivant les instructions

```
>> n = [1 .4]; d = [1 -1.2 0.96 -0.256];
>> G=tf(n,d,1/3);
>> step(G)
```



En examinant le graphe obtenu, on constate qu'à part l'amplitude des oscillations qui est atténuée par les termes négligés, les autres caractéristiques de la réponse de $G(z)$ ne sont pas très différentes de celles du pair de pôles $p_{2,3}$ calculées ci-dessus. Cette différence augmente quand le rapport $\text{Ln}(\rho_{2,3})/\text{Ln}(\rho_1)$ diminue c.à.d. quand les pôles de $G(z)$ sont situés sur des cercles voisins.

EXERCICE 5-5

Soit $y(z)$ la réponse de $G(z)$ à une entrée $u(z)$ et $y_1(z)$ la réponse de $G_1(z) = zG(z)/[(\tau + 1)z - \tau]$ à la même entrée $u(z)$. Montrer que, pour $\tau > 0$, y et y_1 tendent en régime stationnaire vers la même valeur mais que $y_1(k) < y(k) \Leftrightarrow y_1(k) > y_1(k - 1)$. Dédurre que y_1 est plus amortie que y .

Réponse fréquentielle. L'entrée échantillonnée est maintenant

$$u^*(t) = (a \cos \omega t)^* = a(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})^* / 2.$$

La réponse échantillonnée y_k^+ de $G(z)$ à $(e^{j\omega t})^*$, de transformée $z/(z - e^{j\omega T})$, est

$$\begin{aligned} y_k^+ &= \sum \text{Res} \left(G(z) \frac{z^k}{z - e^{j\omega T}} \right) \\ &= \sum A_i(k) p_i^k + G(e^{j\omega T}) e^{j\omega k T} \end{aligned}$$

où les p_i sont les pôles de $G(z)$, les $A_{iv}(k)$ des polynômes en k . Comme $G(z)$ est supposé stable, $|p_i| < 1 \forall i$, d'où

$$y_k^+ \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} G(e^{j\omega T}) e^{j\omega k T}.$$

De même en posant y_k^- la réponse à $(e^{-j\omega T})^*$,

$$y_k^- \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} G(e^{-j\omega T}) e^{-j\omega k T}.$$

Donc, en posant $\psi = \arg[G(e^{j\omega T})]$, on déduit par superposition que :

$$y_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} a |G(e^{j\omega T})| \cos(\omega k T + \psi). \quad (5-15)$$

Ainsi, en régime stationnaire, le système de transmittance $G(z)$ amplifie l'entrée de $|G(e^{j\omega T})|$ et la déphase de $\psi = \arg[G(e^{j\omega T})]$. $G(e^{j\omega T})$ est appelé la réponse fréquentielle de ce système. Le diagramme de Bode de $G(z)$ est la représentation en fonction de ω de $|G(e^{j\omega T})|$ en décibels et de ψ en degrés.

Effet de l'échantillonnage. Soit

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(t) \delta(t - kT) = f(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (5-16)$$

l'échantillonnage de $f(t)$. Comme la fonction $\sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)$ est périodique de période T , elle peut être représentée par une série de Fourier :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{jn\omega_e t} \quad (5-17)$$

$$\text{où } \omega_e = \frac{2\pi}{T} \text{ et } a_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT) e^{-jn\omega_e t} dt.$$

Mais $\delta(t)$ est la seule impulsion de $\sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)$ située entre $-T/2$ et $T/2$. D'où

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jn\omega_e t} dt = \frac{1}{T} e^{-jn\omega_e 0} = \frac{1}{T} \quad \forall n.$$

Tenant compte de (5-16) et (5-17), $f^*(t)$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$f^*(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t) e^{jn\omega_e t}$$

dont la transformée de Fourier se déduit de sa transformée de Laplace $f^*(s)$ en remplaçant s par $j\omega$:

$$\begin{aligned} f^*(j\omega) &= \int_0^{\infty} f^*(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(t) e^{jn\omega_e t} \right) e^{-j\omega t} dt \\ \Rightarrow f^*(j\omega) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[j(\omega - n\omega_e)]. \end{aligned} \quad (5-18)$$

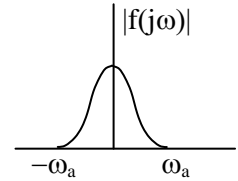
D'un autre côté, si tous les pôles de $f(s)$ sont à gauche de l'axe des imaginaires, on peut inverser

par la formule d'inversion (4-35) la transformée Laplace en intégrant le long de l'axe des imaginaires (c.à.d. en prenant $c = 0$) ce qui donne la formule d'inversion de Fourier :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (5-19)$$

C'est une généralisation du développement en série de Fourier valable pour des fonctions $f(t)$ périodiques ou non. En comparant (5-19) et la série de Fourier (5-17), la fonction fréquentielle $|f(j\omega)|$, appelée *spectre* de $f(t)$, peut être interprétée comme étant l'amplitude (à une constante près) de l'harmonique de fréquence ω de $f(t)$. Si $|f(j\omega)|$ s'annule ou devient négligeable pour les fréquences $\omega > \omega_a$ (fig. 5-9) nous dirons que ω_a est la plus grande fréquence contenue dans $f(t)$.

Fig. 5-9 Spectre avant l'échantillonnage



D'après (5-18), le spectre du signal échantillonné $Tf^*(t)$ se déduit de celui de $f(t)$ par des décalages de $n\omega_e$, l'entier n variant de $-\infty$ à $+\infty$ comme le montre la figure 5-10. $f^*(t)$ contient donc infiniment plus de fréquences que $f(t)$.

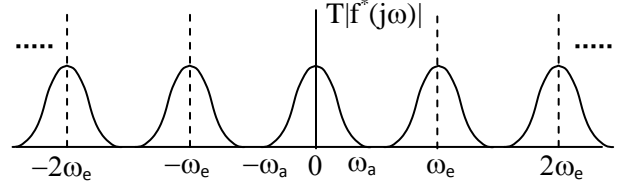


Fig. 5-10 Spectre du signal échantillonné

Pour reconstituer $f(t)$ à partir de $f^*(t)$ il faut éliminer de ce dernier toutes les fréquences $\omega > \omega_a$ et ne conserver que les fréquences comprises entre $-\omega_a$ et ω_a . En examinant la figure 5-10, on constate que ce filtrage ne peut se réaliser que si $\omega_a < \omega_e - \omega_a$ ou $2\omega_a < \omega_e$. C'est le *théorème de Shannon* :

Un signal échantillonné ne peut être reconstitué que si la fréquence d'échantillonnage ω_e est supérieure à 2 fois la plus grande fréquence ω_a contenue dans $f(t)$.

En effectuant l'exercice 5-6, on constate que si la fréquence d'échantillonnage ω_e est supérieure à 6 fois ω_a , le bloqueur d'ordre zéro atténue beaucoup les amplitudes des harmoniques de fréquences supérieures à $\omega_e/2$ tout en conservant presque intactes les harmoniques inférieures à ω_a . Par conséquent, si $\omega_e \geq 6\omega_a$, ce bloqueur reconstitue suffisamment bien le signal $f(t)$ à partir du signal échantillonné $f^*(t)$.

EXERCICE 5-6

Montrer que le spectre d'un bloqueur d'ordre 0 est $|B_0(j\omega)| = T|\sin\alpha/\alpha|$ avec $\alpha = \omega T/2$. Représenter $|B_0(j\omega)|$ en fonction de α et montrer que ce bloqueur reconstitue assez fidèlement $f(t)$ à partir de $f^*(t)$ si $\omega_e \geq 6\omega_a$.

5-3 PERFORMANCE

Le contenu de ce paragraphe et du suivant est essentiellement une adaptation directe de ce qui a été détaillé sur ce sujet pour les systèmes analogiques. La figure 5-11 représente un système de commande discrète où la transmittance $G_c(z)$ définit la commande et la fonction de transfert $G_p(s)$ englobe le bloqueur, l'actionneur, l'objet commandé et le transmetteur. Les perturbations, rapportées à la sortie, sont représentées par le signal d et le signal b représente le bruit de mesure et des dynamiques négligées.

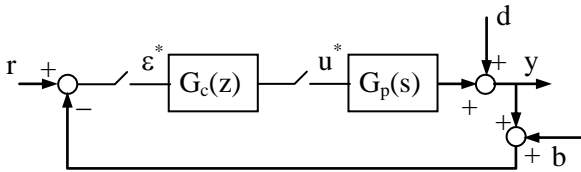


Fig. 5-11 Système de commande et ses entrées

L'objectif principal est de déterminer $G_c(z)$ qui minimise l'écart échantillonné e^* entre la référence r^* et la sortie y^* : $e^* = r^* - y^*$. Or,

$$\begin{aligned} y^* &= d^* + G_p^* u^* = d^* + G_p^* G_c^* e^*, \\ &= d^* + G_p^* G_c^* (r^* - y^* - b^*). \end{aligned}$$

En remplaçant $r^* - y^*$ par e^* et en groupant les termes, on déduit que la transformée z de e est liée à celles des entrées r , d et b par l'équation

$$e(z) = S(z)[r(z) - d(z)] + T_f(z)b(z) \quad (5-20)$$

où

$$S(z) = \frac{1}{1 + G(z)}, \quad G(z) = G_p(z)G_c(z), \quad (5-21)$$

$$T_f(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)}. \quad (5-22)$$

La transmittance $S(z)$ est appelée *sensibilité* du système et $T_f(z)$, qui est la transmittance entre r et y , est appelée *sensibilité complémentaire* car

$$S(z) + T_f(z) = 1 \quad \forall z. \quad (5-23)$$

On dit que le système est performant si la réponse y suit les variations de la référence r même en présence des perturbations d et des bruits de mesure b . En d'autres termes les effets de r , d et b sur $|e|$ doivent être minimum. Or, d'après (5-19),

$$|e(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |e(j\omega)| d\omega,$$

d'où $|e(t)|$ est d'autant plus faible que $|e(j\omega)|$ est faible $\forall \omega$. Compte tenu de la relation entre $e^*(j\omega)$ et $e(j\omega)$ (voir figure 5-10), on déduit qu'on obtient une bonne performance si $|e^*(j\omega)|$ est faible $\forall \omega$.

Déterminons les conditions pour que les effets de r , d et b sur $|e^*(j\omega)| = |e(z)|_{z=e^{j\omega T}}$ soient faibles.

Poursuite. Un système de commande a une bonne poursuite si, dans l'absence des perturbations d et des bruits de mesure b , l'écart e entre la référence r et la réponse y est faible, c.à.d. si, pour $d = b = 0$, $|e^*(j\omega)|$ est petit $\forall \omega$. Comme d'après (5-20)

$$|e^*(j\omega)| = |S(e^{j\omega T})| |r^*(j\omega)|, \quad (5-25)$$

on a une bonne poursuite si $|S(e^{j\omega T})| \ll 1$ dans l'ensemble Ω_r des fréquences pour lesquelles $|r^*(j\omega)|$ a une valeur significative (non négligeable). D'après la définition (5-21) de S , la bonne poursuite sera

garantie si le gain de la chaîne directe $|G(e^{j\omega T})| \gg 1$ pour les fréquences appartenant à Ω_r .

D'autre part, tenant compte de (5-20) et du théorème de la valeur finale, l'écart e tend vers

$$e_s = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} e(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} S(z) r(z) \quad (5-26)$$

quand $t \rightarrow \infty$. Cette valeur limite de e dépend de la rapidité de variation de la référence r et ceci est caractérisé par les cas particuliers suivants.

a) $r(t) = 1$ (r ne varie pas). L'écart e_s sera appelé *erreur stationnaire de position* et désigné par e_{sp} . Il est donné par

$$e_{sp} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} S(z) \frac{z}{z-1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1+G(z)} \quad (5-27)$$

On dit que $G(z)$ est de type n_0 si 1 est un pôle de cette transmittance de multiplicité n_0 . De (5-27) on déduit que

$$e_{sp} = \begin{cases} 1/(1+K_p) & \text{si } n_0 = 0 \\ 0 & \text{si } n_0 \geq 1 \end{cases} \quad (4-28)$$

où $K_p = G(1)$ est appelé constante de l'erreur de position.

b) $r(t) = t$ (r varie avec une vitesse 1). L'écart e_s sera appelé *erreur stationnaire de vitesse* et désigné par e_{sv} . Il est donné par

$$e_{sv} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} S(z) \frac{Tz}{(z-1)^2} = \frac{T}{\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z)}$$

ou

$$e_{sv} = \begin{cases} \infty & \text{si } n_0 = 0, \\ T/K_v & \text{si } n_0 = 1, \\ 0 & \text{si } n_0 \geq 2. \end{cases} \quad (5-29)$$

$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z)$ est appelé constante de l'erreur de vitesse.

c) $r(t) = t^2/2$ (r varie avec une accélération 1). L'écart e_s sera appelé erreur d'accélération et

désigné par e_{sa} . Il est donné par

$$e_{sa} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} S(z) \frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3} = \frac{T^2}{\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G(z)}$$

ou

$$e_{sa} = \begin{cases} \infty & \text{si } n_0 \leq 1, \\ T^2/K_a & \text{si } n_0 = 2, \\ 0 & \text{si } n_0 \geq 3. \end{cases} \quad (5-30)$$

$K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G(z)$ est appelé constante de l'erreur d'accélération.

Rejet des perturbations. Un système de commande a un bon rejet des perturbations si, pour une référence $r = 0$ et dans l'absence des bruits de mesure b , l'écart e entre la référence r et la réponse y est faible, c.à.d. si, pour $r = b = 0$, $|e^*(j\omega)|$ est petit $\forall \omega$. Comme d'après (5-20)

$$|e^*(j\omega)| = |S(e^{j\omega T})| |d^*(j\omega)|, \quad (5-31)$$

par comparaison avec (4-25), on a un bon rejet des perturbations si la même condition que pour la bonne poursuite, $|G(e^{j\omega T})| \gg 1$, est remplie dans l'ensemble Ω_d des fréquences pour lesquelles $|d^*(j\omega)|$ a une valeur significative. Si cette condition est vérifiée dans l'ensemble des fréquences $\Omega_p = \Omega_r \cup \Omega_d$, le système aura une bonne poursuite et un bon rejet des perturbations et on dit qu'il est performant.

Filtrage des bruits. Un système de commande filtre les bruits si, pour une référence $r = 0$ et dans l'absence des perturbations d , l'écart e entre la référence r et la réponse y est faible, c.à.d. si, pour $r = d = 0$, $|e^*(j\omega)|$ est petit $\forall \omega$. Comme d'après (5-20)

$$|e^*(j\omega)| = |T_f(e^{j\omega T})| |b^*(j\omega)|, \quad (5-32)$$

on a un bon filtrage des bruits si $|T_f(e^{j\omega T})| \ll 1$ dans l'ensemble Ω_b des fréquences pour lesquelles $|b^*(j\omega)|$ a une valeur significative (non négligeable). Tenant compte de la définition (5-22) de T_f , le filtrage des bruits sera assuré si $|G(e^{j\omega T})| \ll 1$ pour les fréquences appartenant à Ω_b . Ceci est en contradiction avec la condition $|G(e^{j\omega T})| \gg 1$ de la

bonne performance. Heureusement en pratique $\Omega_b \cap \Omega_p = \emptyset$ car, en général, les fréquences des bruits sont nettement plus élevées que celles contenues dans la référence r ou les perturbations d .

Ainsi, comme en analogique, la transmittance $G(z)$ de la chaîne directe d'un système de commande bien conçu doit satisfaire aux conditions suivantes :

- $|G(e^{j\omega T})| \gg 1$ dans Ω_p (faibles fréquences),
- $|G(e^{j\omega T})| \ll 1$ dans Ω_b (hautes fréquences).

Une autre condition à ajouter concerne la robustesse.

5-4 ROBUSTESSE

La transmittance de la chaîne directe du système réel ne sera pas exactement égale à la nominale G à cause de l'imprécision du modèle ou de l'usure. Cette modification de G peut réduire la performance attendue ou même conduire à l'instabilité.

Sensibilité et marge de stabilité. Un système de commande est d'autant plus robuste que la transmittance T_f de sa boucle fermée est moins sensible à la déviation de G . Cette sensibilité, que nous désignons aussi par S , se définit par la variation relative de la fonction T_f par unité de variation relative de la fonction G . En d'autres termes,

$$S = \frac{dT_f / T_f}{dG / G}. \quad (5-33)$$

Sachant que $T_f = G/(1 + G)$, on déduit que

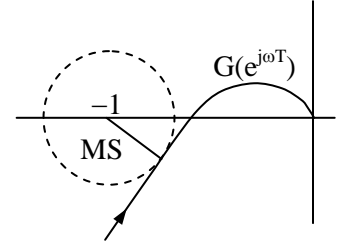
$$S = \frac{dT}{dG} \cdot \frac{G}{T_f} = \left[\frac{(1+G)-G}{(1+G)^2} \cdot (1+G) \right] = \frac{1}{1+G}.$$

La sensibilité de T_f aux déviations de G a donc la même expression (5-21) que la sensibilité de l'écart e à la référence r ou à la perturbation d et c'est pour cette raison qu'elle est désignée par la même lettre S . Le système de commande est donc d'autant plus robuste que $\max_{\omega} |S(e^{j\omega T})|$ est faible ou, ce qui revient au même, que

$$MS = \min_{\omega} |1 + G(e^{j\omega T})| \quad (5-34)$$

est grand. Comme le montre la figure 5-12, MS est la distance entre le point -1 et la courbe de Nyquist $G(e^{j\omega T})$.

Fig. 5-12 Interprétation de MS



Supposons que la boucle fermée est nominale stable. Quand G s'écarte de la nominale, la stabilité reste maintenue tant que le nombre $Z = P - N$ du critère (5-8) de Nyquist ne se modifie pas. Or, rarement P change de valeur, surtout quand les pôles de $G(z)$ ne sont pas très voisins du cercle unité. Par contre, N ne conserve sa valeur que si la courbe $G(e^{j\omega T})$ de Nyquist reste d'un même côté par rapport au point -1 . Par conséquent, le risque de déstabilisation à cause de la déviation de G est d'autant plus faible que la distance MS entre la courbe $G(e^{j\omega T})$ et -1 est grand. MS sera appelée la marge de stabilité du système.

Marges de gain et de phase. Le calcul de la marge de stabilité MS définie par (5-34) n'est pas simple sauf dans des cas très particuliers. Pour cette raison, on préfère la remplacer par deux autres grandeurs, appelées marge de gain et marge de phase, qui constituent ensemble une mesure de l'éloignement de la courbe $G(e^{j\omega T})$ du point -1 .

Pour définir ces marges considérons la figure 5-13 où $G(e^{j\omega T})$ est la courbe de Nyquist de la chaîne directe d'une boucle fermée nominale stable et soient A et B les points d'intersection de cette courbe respectivement avec l'axe des réels et le cercle unité. Si $G(e^{j\omega T})$ coupe l'axe des réels ou le cercle unité en plusieurs points, A et B désigneront les intersections les plus voisines du point -1 .

La marge de gain d'un système stable est le rapport $1/OA$, généralement exprimée en décibels :

$$MG = 20 \log_{10} \frac{1}{OA} \text{ db} \quad (5-35)$$

et la marge de phase est l'angle φ entre l'axe des réels négatifs et le vecteur \overline{OB} , généralement exprimé en degrés :

$$MP = \arg(\overline{OB}) + 180^\circ \mod 360^\circ. \quad (5-36)$$

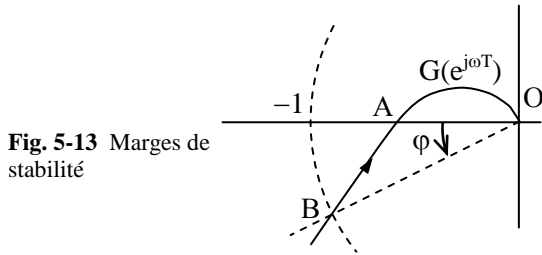


Fig. 5-13 Marges de stabilité

$|MG|$ et $|MP|$ sont d'autant plus grands que A et B sont éloignés de -1 c.à.d. que le risque d'instabilité est faible. Il est généralement recommandé que la marge $|MG|$ soit supérieure à 6db et que la marge $|MP|$ soit supérieure à 30° .

À noter que $OA = |G(e^{j\omega_{cp}T})|$ où ω_{cp} est la fréquence pour laquelle

$$\arg[G(e^{j\omega_{cp}T})] = -180^\circ \quad (5-37)$$

et $\arg(\overline{OB}) = \arg[G(e^{j\omega_{cg}T})]$ où ω_{cg} est la fréquence pour laquelle

$$|G(e^{j\omega_{cg}T})| = 1. \quad (5-38)$$

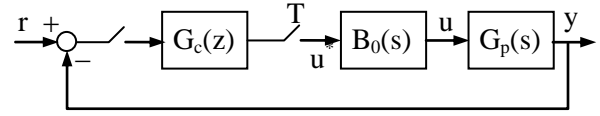
ω_{cp} est appelé la *fréquence de coupure de phase* et ω_{cg} la *fréquence de coupure de gain*. Une fois ces fréquences sont calculées en résolvant les équations (5-37) et (5-38), les marges de stabilité s'obtiennent en appliquant (5-35) et (5-36), qui peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} MG &= -20 \log_{10} |G(e^{j\omega_{cp}T})|, \\ MP &= \arg[G(e^{j\omega_{cg}T})] + 180^\circ. \end{aligned} \quad (5-39)$$

Analytiquement ce calcul est long et plus compliqué que dans le cas des systèmes analogiques. Heureusement Matlab donne directement les marges de stabilité par l'instruction « $[MG, MP] = \text{margin}(G)$ ». On peut aussi lire ces marges sur la courbe de Nyquist ou le diagramme de Bode qui

s'obtiennent par les mêmes instructions qu'en analogique : « $\text{nyquist}(G)$ » et « $\text{bode}(G)$ ».

Exemple 5-7



La fonction de transfert de l'objet commandé est $G_p(s) = 1/(s+1)(s+2)$ et la commande est de type PI (proportionnelle-intégrale) de la forme $G_c(z) = k_p[1 + z/(z-1)]$. Il s'agit de déterminer la valeur de k_p pour laquelle la marge de gain est de 6 db puis de vérifier si pour cette valeur de k_p la marge de phase est satisfaisante.

La transmittance de la boucle ouverte est

$$G(z) = G_c(z)Z[B_0G_0(s)].$$

Or,

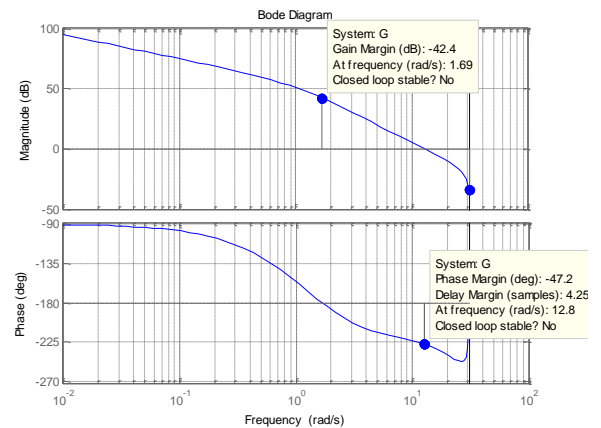
$$\begin{aligned} Z[B_0G_0(s)] &= \frac{z-1}{z} \left(\frac{1}{2} \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}} + \frac{1}{2} \frac{z}{z-e^{-2T}} \right) \\ &= \frac{(1-e^{-T})^2(z+e^{-T})}{2(z-e^{-T})(z-e^{-2T})} \end{aligned}$$

d'où

$$G(z) = K \frac{(z-1/2)(z+e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})(z-e^{-2T})}.$$

$$\text{avec } K = k_p(1-e^{-T})^2.$$

Pour $T = 0.1$ sec et $K = 1$ Matlab fournit le diagramme de Bode de G suivant :



Les valeurs $MG = -42.4$ db et $MP = -47.2^\circ$ des marges de gain et de phase et les fréquences

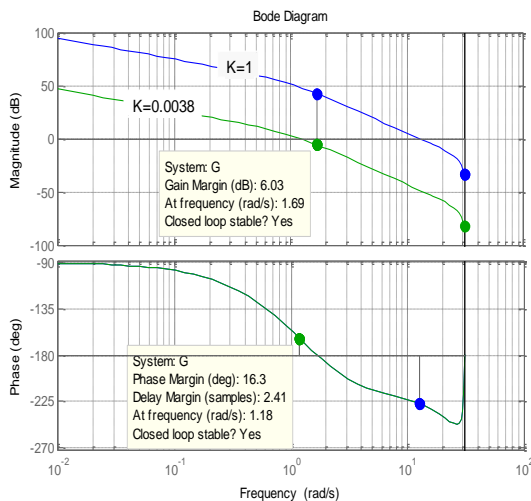
correspondantes $\omega_{cp} = 1.69$ rd/sec et $\omega_{cg} = 12.8$ rd/sec qui apparaissent sur cette figure sont obtenues en effectuant à l'aide de la souris la suite d'opérations «Right-Click >> Characteristics >> All Stability Margins». Généralement, quand la courbe de phase est décroissante en ω_{cp} , les valeurs négatives de MG et MP indiquent que le système est instable mais pour s'en assurer il convient de tracer la courbe de Nyquist et d'appliquer le critère $Z = P - N$ du paragraphe 5-1. En diminuant la valeur de K , la courbe de gain baisse mais la courbe de phase ne se modifie pas. On stabilise le système avec une marge de gain de 6 db si l'on baisse la courbe de gain de $42.4 + 6$ db c.à.d. si l'on choisit la valeur de K telle que

$$20\log_{10} K = -48.4 \Rightarrow K = 10^{-48.4/20} = 0.0038$$

ou

$$k_p = \frac{0.0038}{(1 - e^{-0.1})^2} = 0.42.$$

La figure suivante montre dans le même plan les deux diagrammes de Bode pour $K = 1$ et $K = 0.0038$. On voit qu'en abaissant la courbe de gain, le système se stabilise avec une marge de gain MG = 6.03 db (comme prévu) et une marge de phase MP = 16.3°. Cette valeur de MP est généralement jugée insuffisante.



En diminuant encore plus K , on améliore les marges de gain et de phase mais on réduit la bande passante (l'ensemble des fréquences pour lesquelles le gain est supérieur à -3 db) ce qui ralentit la réponse et dégrade la performance. La commande PI choisie

ne pouvant pas assurer à la fois la robustesse et la performance pour ce système, il est nécessaire de rechercher une politique plus convenable. Les prochains paragraphes sont destinés à des techniques permettant de concevoir une telle politique.

5-5 CONCEPTION DE LA LOI DE COMMANDE

La figure 5-15 représente de nouveau la structure de base d'un système de commande discrète soumis à une référence r , une perturbation d et un bruit de mesure b . Ayant le modèle $G_p(s)$ du procédé commandé, il s'agit de déterminer la transmittance $G_c(z)$ d'une loi de commande assurant un fonctionnement stable et qui satisfait les exigences temporelles et/ou fréquentielles imposées.

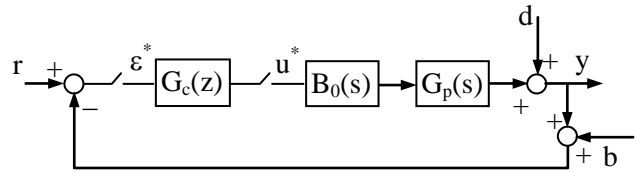


Fig. 5-15 Structure de base d'un système de commande.

Du point de vu temporel on exige généralement

- une erreur stationnaire nulle ou petite,
- une réponse transitoire rapide,
- des oscillations de faibles amplitudes,
- un signal de commande minimisé afin d'éviter la saturation de l'actionneur et de réduire la consommation d'énergie.

Par les exigences fréquentielles on cherche à assurer la bonne performance, le filtrage des bruits de mesure et des dynamiques négligées ainsi que la robustesse. En posant $G(z) = G_c(z)Z[B_0(s)G_p(z)]$, nous avons vu aux paragraphes 5-3 et 5-4 que ces exigences se traduisent mathématiquement par

- un grand gain $|G(e^{j\omega T})|$ dans l'ensemble Ω_p des fréquences pour lesquelles la référence $r(j\omega)$ et la perturbation $d(j\omega)$ sont non négligeables (faibles fréquences).
- Un gain faible $|G(e^{j\omega T})|$ dans l'ensemble Ω_b des fréquences pour lesquelles le bruit $b(j\omega)$ est non

négligeable (hautes fréquences).

- Des grandes marges de gain et de phase.

Pour satisfaire ces exigences, on peut choisir la transmittance $G_c(z)$ de la loi de commande soit d'une forme particulière soit par recherche intuitive ou déductive sans adopter préalablement une forme particulière.

Les formes particulières sont les discrétisations de celles employées en analogique :

- proportionnelle simple P,
- proportionnelle avec intégration ou dérivation. PI, PD ou PID,
- avance de phase AP ou retard de phase RT,
- ou une combinaison de ces formes.

Discrétisation. La discrétisation d'une forme revient à remplacer l'opérateur s de dérivation par une expression approximative en z . Cette expression peut être déduite de l'une des relations équivalentes

$$z = e^{sT}, \quad ze^{-sT} = 1, \quad z = e^{sT/2} / e^{-sT/2}.$$

Sachant que T est faible, on peut écrire

$$z \approx 1 + sT, \quad z(1 - sT) \approx 1, \quad z \approx \frac{1 + sT/2}{1 - sT/2}$$

d'où l'on tire :

$$s \approx \frac{z-1}{T}, \quad s \approx \frac{z-1}{Tz}, \quad s \approx \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}. \quad (5-40)$$

La première relation (5-40) signifie que la discrétisation de la dérivée d'un signal $e(t)$ est

$$\left(\frac{de}{dt} \right)_k \approx \frac{e_{k+1} - e_k}{T}$$

et on l'appelle *discrétisation avant*. La deuxième qui s'écrit $s \approx (1 - z^{-1})/T$ signifie que

$$\left(\frac{de}{dt} \right)_k \approx \frac{e_k - e_{k-1}}{T}$$

et on l'appelle *discrétisation arrière*. La troisième relation (5-40), appelée *approximation de Tustin*,

s'écrit $z - 1 \approx (T/2)(z+1)s$ et elle traduit le développement de Taylor de e_{k+1} jusqu'au second ordre. En effet,

$$\begin{aligned} e_{k+1} - e_k &\approx T \left(\frac{de}{dt} \right)_k + \frac{T^2}{2} \frac{(de/dt)_{k+1} - (de/dt)_k}{T} \\ &= \frac{T}{2} \left[\left(\frac{de}{dt} \right)_{k+1} + \left(\frac{de}{dt} \right)_k \right]. \end{aligned}$$

On peut aussi interpréter les relations (5-40) en considérant leurs inverses :

$$\frac{1}{s} \approx \begin{cases} \frac{T}{z-1} & \text{ou} & \frac{Tz}{z-1} & \text{ou} & \frac{T(z+1)}{2(z-1)} \end{cases} \quad (5-41)$$

d'où

$$(z-1)(1/s) \approx \begin{cases} T & \text{ou} & Tz & \text{ou} & T(z+1)/2. \end{cases}$$

Ces relations signifient que la discrétisation de l'intégrale d'un signal $e(t)$ vérifie

$$\int_0^{(k+1)T} e(t)dt - \int_0^{kT} e(t)dt = \int_{kT}^{(k+1)T} e(t)dt \approx \begin{cases} Te_k & \text{ou} \\ Te_{k+1} & \text{ou} \\ T \frac{e_k + e_{k+1}}{2} \end{cases}$$

et ceci est représenté sur la figure 5-16.

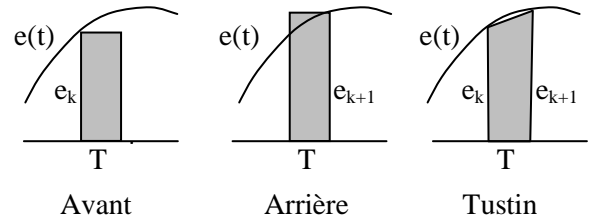


Fig. 5-16 Interprétation de l'opérateur d'intégration.

À remarquer que l'approximation de Tustin n'est autre que la transformation homographique (5-9) avec $c = 2/T$.

Exemple 5-8

Employant la discrétisation arrière, déterminons les transmittances d'un compensateur à avance ou à retard de phase et d'un PID numériques.

Compensateur à avance ou à retard de phase

Sa forme analogique est

$$G_c(s) = a \frac{s + 1/\tau}{s + a/\tau}.$$

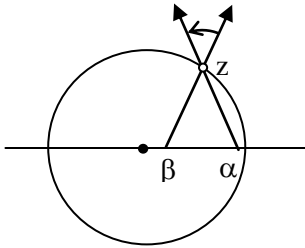
En remplaçant s par $(z - 1)/Tz$, on obtient :

$$\begin{aligned} G_c(z) &= a \frac{\tau + T}{\tau + aT} \frac{z - \tau/(\tau + T)}{z - \tau/(\tau + aT)} \\ &= K \frac{z - \alpha}{z - \beta}. \end{aligned} \quad (5-42)$$

où $\alpha = 1/(1 + T/\tau)$, $\beta = 1/(1 + aT/\tau)$
et $K = (1 - \beta)/(1 - \alpha)$.

Le zéro α et le pôle β de $G_c(z)$ sont les images du zéro $-1/\tau$ et du pôle $-a/\tau$ de $G_c(s)$ par la transformation $z = 1/(1 - sT)$, inverse de la transformation $s = (z - 1)/Tz$. D'autre part, l'expression de K peut se déduire de l'égalité $\lim_{s \rightarrow 0} G_c(s) = \lim_{z \rightarrow 1} G_c(z)$.

À noter que α et β sont des réels entre 0 et 1 et que ce compensateur est à avance de phase ($a > 1$) si $\beta < \alpha$ et il est à retard de phase si $\beta > \alpha$. La figure suivante montre bien que, pour $\omega > 0$, $\arg[G_c(e^{j\omega T})]$ est positif quand $\beta < \alpha$ et il est négatif dans le cas inverse.



Régulateur PID

Sa forme analogique est

$$G_c(s) = k_p \left(1 + \frac{\tau_d s}{\tau_f s + 1} + \frac{1}{\tau_i s} \right)$$

où la dérivée pure $\tau_d s$, qui n'est pas réalisable, est remplacée par un quasi-dérivateur qui limite le gain de dérivation à τ_d/τ_f pour les fréquences supérieures à $1/\tau_f$. La valeur de τ_f est généralement choisie

autour de $\tau_d/10$. L'expression précédente de $G_c(s)$ peut se mettre sous la forme

$$G_c(s) = k \frac{(s + a)(s + b)}{s(s + c)}$$

où a et b sont des réels positifs ou complexes conjugués à partie réelle positive et $c = 1/\tau_f$.

En remplaçant s par $(z - 1)/Tz$, on obtient :

$$G_d(z) = K \frac{(z - \alpha)(z - \beta)}{(z - 1)(z - \gamma)} \quad (5-43)$$

où $\alpha = \frac{1}{1 + aT}$, $\beta = \frac{1}{1 + bT}$, $\gamma = \frac{1}{1 + cT}$

et $K = \frac{kabT}{c} \frac{1 - \gamma}{(1 - \alpha)(1 - \beta)}$.

Comme pour le compensateur ci-dessus, les zéros α et β et les pôles 1 et γ de $G_c(z)$ sont les images des zéros $-a$ et $-b$ et des pôles 0 et $-c$ de $G_c(s)$ par la transformation $z = 1/(1 - sT)$ et de l'égalité $\lim_{s \rightarrow 0} sG_c(s) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z - 1)/Tz]G_c(z)$ on tire l'expression de K .

EXERCICE 5-7

Montrer que la discrétisation de Tustin suit les mêmes règles que dans l'exemple précédent.

5-5-1 Conception de la commande par le lieu d'Evans.

Nous avons vu (voir exemple 5-6) que la réponse d'un système est surtout influencée par la position de ses pôles dominants à l'intérieur du cercle unité. Cette réponse est d'autant plus rapide que le module des pôles dominants est petit et elle est d'autant moins oscillante que l'argument de ces pôles est petit. Les pôles non dominants et les zéros affectent aussi la réponse mais en moindre degré. L'influence des pôles non dominants est d'autant plus faible qu'ils sont éloignés des pôles dominants et l'influence d'un zéro est d'autant plus faible qu'il est voisin d'un pôle.

Le lieu d'Evans aide à choisir les pôles et les zéros

du régulateur et d'ajuster la valeur de son gain statique de sorte à placer les pôles de la boucle fermée $T(z)$ dans des positions convenables assurant une réponse rapide sans trop d'oscillations. La construction de ce lieu pour les systèmes discrets suit les mêmes règles que pour les systèmes continus puisque dans les deux cas il s'agit de représenter la variation des racines d'un polynôme à variable complexe (le polynôme caractéristique) en fonction d'un paramètre K du régulateur. Il n'existe pas une méthode systématique pour le choix des pôles, des zéros et du gain statique du régulateur et le concepteur sera surtout guidé par son intuition et par ses acquis accumulés par la pratique. Cependant, certaines directives utiles seront données à travers les exemples suivants.

Exemple 5-9

Il s'agit de commander l'angle de rotation θ d'un moteur à charge nominale de constante de temps 0.5 sec et de vitesse limite $\Omega_L = 8$ rad/s par volt de tension de la commande u . En supposant que le gain du capteur est de 1 V/rd, la fonction de transfert du système commandé est donc

$$G_p(s) = \frac{8}{s(0.5s + 1)} = \frac{16}{s(s + 2)}.$$

Commande proportionnelle

C'est la commande la plus simple, définie par $G_c(z)$ = $k_p = c^{te}$. Pour cette commande, la transmittance de la boucle ouverte est

$$\begin{aligned} G(z) &= k_p (B_0 G_p)(z) \\ &= k_p \frac{z-1}{z} Z\left(\frac{G_p(s)}{s}\right) \\ &= k_p \frac{z-1}{z} \sum \text{Res} \frac{16}{s^2(s+2)} \frac{z}{z-e^{sT}}. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \text{Res}(0) &= \left[-\frac{16z(z-e^{sT} - Te^{sT}(s+2))}{(s+2)^2(z-e^{sT})^2} \right]_{s=0} \\ &= -\frac{4z(z-1-2T)}{(z-1)^2} \end{aligned}$$

et

$$\text{Res}(-2) = \frac{4z}{z-e^{-2T}}.$$

Donc

$$\begin{aligned} G(z) &= 4k_p \left[\frac{z-1}{z-e^{-2T}} - \frac{z-1-2T}{z-1} \right] \\ &= 4k_p \frac{(2T-1+e^{-2T})z + [1-(1+2T)e^{-2T}]}{(z-1)(z-e^{-2T})}. \end{aligned}$$

Si $T = 0.05$ sec. est la période d'échantillonnage,

$$G(z) \approx \frac{0.02k_p(z+0.967)}{(z-1)(z-0.905)}.$$

Le lieu d'Evans est représenté sur la figure 5-17. Tous les points stables de ce lieu sont très voisins du cercle unité ce qui montre que la commande proportionnelle conduit à une réponse lente ($\tau = -T/Ln\rho$ qui croît avec ρ). Sur le lieu, ρ est minimum au point de bifurcation 0.95 d'où $\tau_{\min} = -0.05/Ln(0.95) = 0.975$ sec, soit environ 2 fois la constante du temps du système commandé.

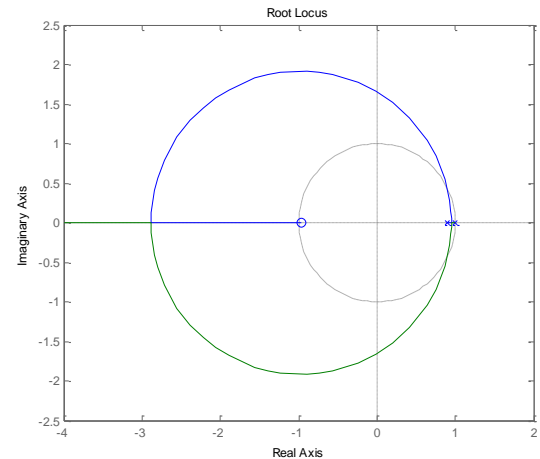


Fig. 5-17 Lieu d'Evans de la commande P

Commande à avance de phase

Pour éloigner le lieu du cercle unité C , on élimine le pôle 0.905 de $G(z)$ et on le remplace par le pôle 0.5 plus près du centre de C (un pôle de module très faible accélère trop la réponse ce qui peut saturer l'actionneur). Ceci revient à choisir

$$G_c(z) = k \frac{z-0.905}{z-0.5}. \quad (5-44)$$

C'est une commande à avance de phase car $\beta < \alpha$ (voir 5-42). Remarquer que nous n'avons pas éliminé le pôle 1 puisqu'il annule l'erreur

stationnaire e_{sp} . Ainsi, avec la commande (5-44), la transmittance de la chaîne directe devient

$$G(z) = K \frac{z + 0.967}{(z - 1)(z - 0.5)}, \quad K = 0.02k \quad (5-45)$$

dont la partie utile de son lieu d'Evans est représentée sur la figure 5-18 en superposition avec l'abaque de $\xi = c^{te}$ et $\omega_n = c^{te}$.

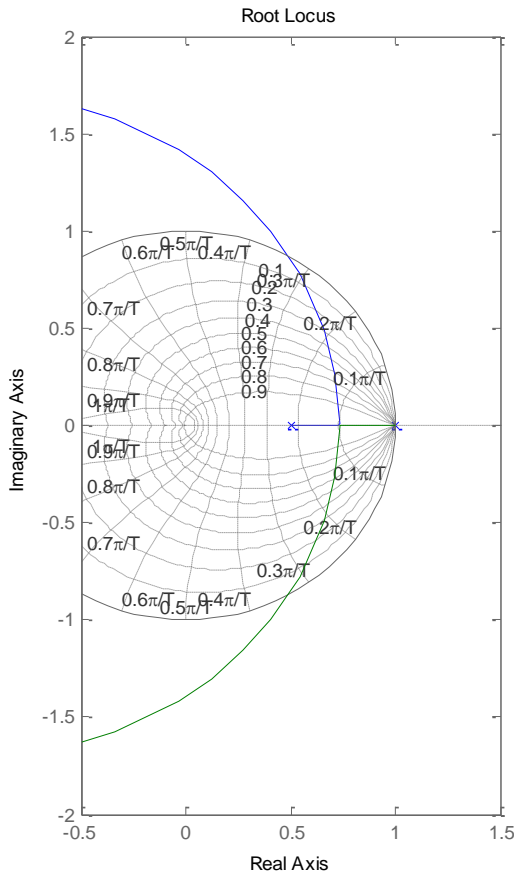


Fig. 4.18 Lieu d'Evans de la commande AP

Les points de ce lieu hors de l'axe des réels sont les racines complexes du $1 + G(z) = 0$ c.à.d. du polynôme caractéristique

$$P(z) = (z - 1)(z - 0.5) + K(z + 0.967) = 0.$$

En posant $z_1 = z + 0.967$, l'équation précédente se ramène à

$$P(z_1) = (z_1 - 1.967)(z_1 - 1.467) + Kz_1 = 0$$

$$\Rightarrow z_1 \bar{z}_1 = |z_1|^2 = (1.967)(1.467) \Rightarrow |z_1| = 1.698 \quad \forall K.$$

Ceci montre que les pôles complexes de la boucle fermée sont sur le cercle de centre -0.967 et de rayon 1.698

On obtient un dépassement maximum DM d'environ 4% si le facteur d'amortissement est $\xi = 0.7$. Or l'intersection p du lieu d'Evans avec la spirale $\xi = 0.7$ est entre les courbes $\omega_n = 0.1\pi/T$ et $\omega_n = 0.2\pi/T$. En évaluant par inspection l'éloignement de p de ces courbes on estime que $\omega_n \approx 0.1(1 + 1/3)\pi/0.05 = 8.377$ rd/sec. On en déduit les caractéristiques suivantes.

- Constante de temps
 $\tau = 1/\xi\omega_n = 1/(0.7 \times 8.377) = 0.17$ sec.
- Fréquence des oscillations
 $\omega_a = \omega_n(1 - \xi^2)^{1/2} = 5.98$ rd/sec.
- Période des oscillations
 $T_a = 2\pi/\omega_a = 1.05$ sec.
- Temps de stabilisation
 $t_s = 4.6\tau = 4.6(0.17) = 0.782$ sec
- Nombre des oscillations
 $n = t_s/T_a = 0.782/1.05 = 0.745$

Comme $1 + G(p) = 0$, on tire de (5-45)

$$K = -\frac{(p-1)(p-0.5)}{p+0.967}, \quad p = \rho e^{j\phi}$$

$$\text{avec } \rho = e^{-T/\tau} = e^{-0.05/0.17} = 0.745, \\ \phi = \omega_a T = 5.98(0.05) = 0.299 \text{ rd.}$$

D'où $K = 0.0652$ et $k = K/0.02 = 3.2624$.

Sous la commande $G_c = 3.26(z - 0.905)/(z - 0.5)$, la transmittance de la boucle fermée est

$$T_f(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)} = \frac{0.0652(z + 0.967)}{(z - 0.745e^{j0.299})(z - 0.745e^{-j0.299})}$$

La figure 5-19 représente la réponse indicielle de $T_f(z)$ (qui s'obtient par l'instruction «step(T_f)» où l'on peut vérifier les valeurs des caractéristiques calculées ci-dessus. $G(z)$ étant de type 1, le graphe montre que l'erreur stationnaire de position est bien

nulle.

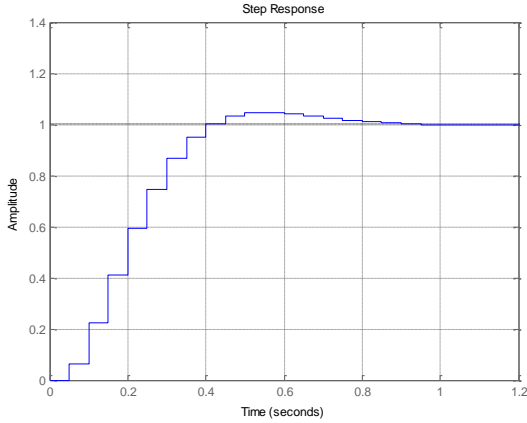


Fig. 5-19 Réponse indicielle sous la commande AP

En plus de la qualité de la réponse, il est important de s'assurer que le signal de commande ne dépasse pas les limites de saturation du convertisseur. Ce signal u est lié à la référence r par la transmittance :

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{u(z)}{r(z)} = \frac{G_c(z)}{1 + G(z)} \\ &= \frac{3.26(z-1)(z-0.905)}{(z-0.745e^{j0.299})(z-0.745e^{-j0.299})} \end{aligned}$$

La réponse indicielle de $H(z)$ (fig. 5-20) montre, pour une référence constante de 1 volt, la variation de la commande entre le démarrage et l'instant où la rotation du moteur arrive à la valeur désirée.

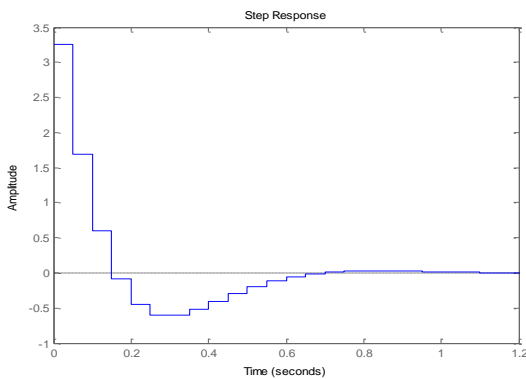


Fig. 5-20 Signal de commande AP du moteur

Pour une référence de valeur $r \neq 1$, le signal $u(t)$ ci-dessus sera multiplié par r mais son temps de stabilisation est toujours le même. D'autre part, il est intéressant de remarquer qu'au démarrage l'action

est forte mais diminue au fur et à mesure que l'angle de rotation s'approche de la valeur désirée et avant l'arrivée à cette valeur (avant l'instant 0.4 sec), une action de freinage opposée à la vitesse ($u < 0$) est appliquée afin de diminuer le dépassement.

EXERCICE 5-8

Soit de nouveau le procédé $G_p(s)$ de l'exemple 5-9 précédent commandé aussi par avance de phase de transmittance $G_c(z) = k(z - 0.905)/(z - \beta)$ avec $T = 0.05$ sec. Quelle valeur doit avoir $\arg[G_c(p)]$ pour que le lieu d'Evans passe par le point p défini par $\xi = 0.7$ et $\omega_n = 0.2\pi/T$. Déduire la valeur de β et calculer la valeur de $K = 0.02k$ pour laquelle p est un pôle de la boucle fermée. Que seront les caractéristiques de la réponse indicielle.

Exemple 5-10

Soit

$$G_p(s) = \frac{(s+2)}{(s-1)(s^2+0.4s+2)}$$

la fonction de transfert du système commandé et choisissons $T = 0.1$ sec. la période d'échantillonnage. La transmittance de la boucle ouverte est

$$G(z) = G_c(z)Z[B_0G_p(s)] = G_c(z)(B_0G_p)(z)$$

avec

$$(B_0G_p)(z) = \frac{z-1}{z} \sum \text{Res} \frac{(s+2)}{s(s-1)(s-p_s)(s-\bar{p}_s)} \frac{z}{z-e^{sT}}$$

où $p_s = -0.2 + j(1.4)$.

Le calcul du second membre donne:

$$(B_0G_p)(z) = \frac{0.0054(z+1.09)(z-0.819)}{(z-1.1)(z^2-1.941z+0.961)}$$

qu'on peut aussi obtenir par l'instruction «zpk(c2d(G_p , T))». Les pôles de cette transmittance sont $q_1 = 1.1$ et $q_{2,3} = \rho e^{\pm j\varphi}$ avec

$$\rho = \sqrt{0.961} = 0.98,$$

$$\varphi = \arccos \frac{1.941/2}{0.98} = 0.14 \text{ rad} \approx 8^\circ.$$

La commande la plus simple est la proportionnelle, $G_c(z) = k_p$, mais en traçant le lieu d'Evans (dans une

partie est représentée sur la figure 5-21), on constate que la branche partant d'un pôle complexe sort du cercle unité pour $k_p \approx 0.5$ et la branche partant du pôle instable 1.1 pénètre dans ce cercle pour $k_p \approx 1$. Ceci montre que le système est instable $\forall k_p$, résultat qui peut être vérifié en appliquant le critère de Jury au polynôme caractéristique

$$P(z) = z^3 + (K - 3.04)z^2 + (0.271K + 3.096)z - (0.893K + 1.057)$$

où $K = 0.0054 k_p$.

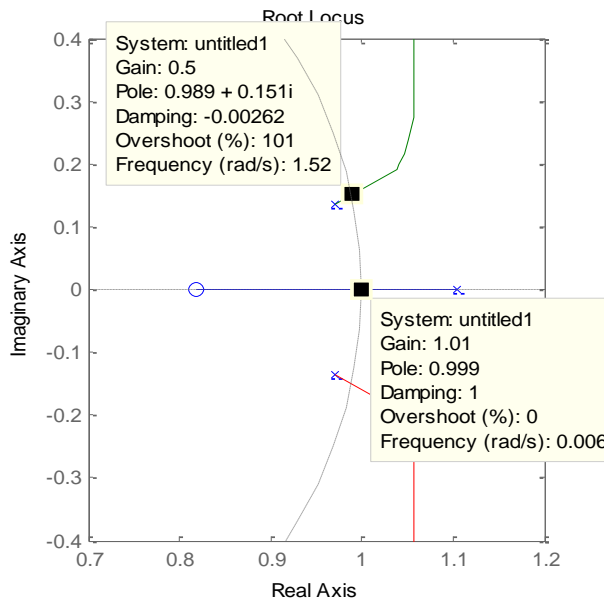


Fig. 4-21 Gains de stabilité critique

L'instabilité provient du pôle instable q_1 et des pôles q_2 et q_3 , stables mais très voisins du cercle unité. On élimine ces derniers en choisissant un régulateur ayant des zéros égaux à q_2 et q_3 mais on doit éviter d'éliminer q_1 par un tel moyen car, si la valeur réelle de q_1 n'est pas exactement égale à 1.1 (ce qui est probable), il ne sera pas simplifier et l'instabilité due à ce pôle subsiste. Par contre, même si les pôles $q_{2,3}$ ne seront pas parfaitement éliminés par les zéros du régulateur, on sait que l'effet d'un pôle stable voisin d'un zéro est négligeable. Maintenant, pour que le régulateur soit propre (réalisable), on doit lui associer au moins autant de pôles que de zéros. On choisit un pôle en 1 pour annuler l'erreur stationnaire de position et un autre voisin du zéro -1.09 pour atténuer l'effet de celui-ci qui tend généralement à amplifier la réponse. Ce deuxième

pôle nous le choisissons stable en -0.9 . Avec cette politique, le régulateur sera un PID (voir 5-43) dont la transmittance est

$$G_c(z) = k_p \frac{z^2 - 1.941z + 0.961}{(z + 0.9)(z - 1)}$$

et celle de la boucle ouverte devient :

$$G(z) = G_c(z)(B_0 G_p)(z) = K \frac{(z + 1.09)(z - 0.819)}{(z + 0.9)(z - 1)(z - 1.1)},$$

$$K = 0.0054 k_p.$$

Quand K varie de 0 à l'infini, les pôles de la boucle fermée $T_f(z)$ décrivent les branches du lieu d'Evans représenté en partie sur la figure 5-22. À l'aide de la souris, Matlab fournit la valeur du gain K correspondant à chaque point du lieu ainsi que des caractéristiques relatives à ce point.

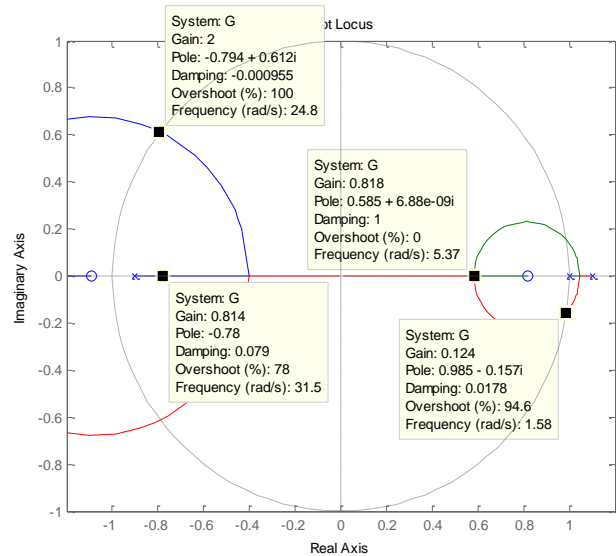


Fig. 5-22 Choix des pôles de la boucle fermée

Les branches L_1 et L_2 qui partent des pôles 1 et 1.1 bifurquent entre ces deux points pour pénétrer dans le cercle unité quand $K = 0.124$. Elles se rencontrent de nouveau au point 0.585 quand $K = 0.818$ et bifurquent l'une, disons L_1 , vers le zéro 0.819 et l'autre, L_2 , vers la gauche. Cette dernière rencontre la branche L_3 provenant du pôle -0.9 pour bifurquer et sortir du cercle unité quand $K = 2$. Le système sera donc stable pour les valeurs de K comprises entre 0.124 et 2.

En choisissant $K = 0.818$, la transmittance $T_f(z)$ de la boucle fermée aura deux pôles confondus $p_1 = p_2 = 0.585$ et un troisième $p_3 = -0.778$. Pour cette valeur de K , le module de p_1 (et par conséquent sa constante de temps) atteint son minimum mais p_3 est dominant puisqu'il est le plus éloigné du centre du cercle unité. La constante de temps de la réponse globale sera donc $\tau = -T/\text{Ln}p_3 = -0.1/\text{Ln}0.778 = 0.34\text{sec}$ à laquelle correspond le temps de stabilisation $t_s = 4.6\tau = 1.56\text{sec}$. Les zéros de $T_f(z)$ étant ceux de $G(z)$, on a :

$$T_f(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)} = \frac{0.818(z + 1.09)(z - 0.819)}{(z + 0.778)(z - 0.585)^2}.$$

La réponse indicielle de $T_f(z)$ est celle de la figure 5-23 où l'on voit que les zéros et le pôle négatif ont créé un dépassement d'environ 38%. Les petites oscillations qui sont superposées à l'allure moyenne sont dues au pôle négatif p_3 dont la fréquence est $\omega = \pi/T = 10\pi$ c.à.d. de période 0.2 sec.

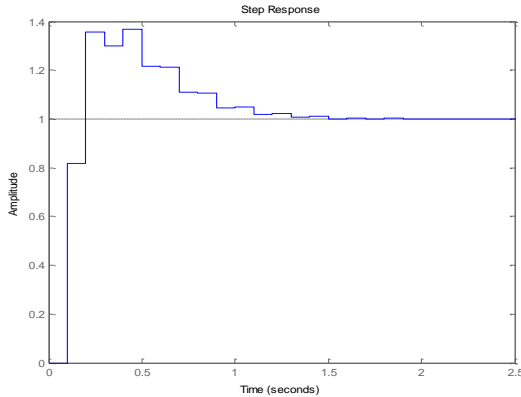


Fig. 5-23 Réponse indicielle pour $K = 0.817$

On peut se demander si le comportement du système ne sera pas amélioré pour une autre valeur de K . La réponse à cette question n'est pas simple à cause des effets non négligeables des pôles non dominants et des zéros de $T_f(z)$. Le seul moyen pour s'assurer du bon choix de la valeur de K consiste à effectuer quelques essais en donnant à K des valeurs autour de 0.818. On constatera que plus K s'écarte de cette valeur, plus le temps de stabilisation et/ou le dépassement augmentent. Le mieux serait donc d'associer à K la valeur 0.818 ($k_p = 151$) ou une valeur voisine. Évidemment une politique de

commande autre que la PID peut aussi donner des résultats satisfaisants comme l'exercice suivant permet de le constater.

EXERCICE 5-9

Soit de nouveau le procédé $G_p(s)$ de l'exemple 5-10 précédent. Remplaçons la commande PID par une PD de transmittance $G_d(z) = k(z - 0.819)$. La période d'échantillonnage étant toujours $T = 0.1\text{sec}$, représenter à l'aide de Matlab le lieu d'Evans et déterminer la valeur de $K = 0.0054k$ du point de bifurcation. Tracer pour cette valeur de K la réponse indicielle et calculer sa valeur finale. Quelle est le gain de l'amplificateur qu'il faut placer entre la référence et le comparateur (prés-compensateur) pour annuler l'erreur stationnaire de position ? Que seront sous cette politique le dépassement et le temps de stabilisation de la réponse ?

5-5-2 Conception de la commande par transformation homographique.

Nous savons (voir § 5-1) que la transformation homographique inverse $z = h^{-1}(v) = (c + v)/(c - v)$, $c > 0$, associée à une transmittance $G(z)$ une fonction de transfert analogique équivalente

$$G_v(v) = G \left[\frac{c + v}{c - v} \right]$$

dont la région de stabilité est le demi-plan $\text{Re}(v) < 0$ comme celui de la fonction de transfert en s . Il est facile de vérifier que

$$G(z) = K \frac{\prod_{i=1}^m (z - \zeta_i)}{\prod_{j=1}^n (z - p_j)} \quad (5-46)$$

$$\Leftrightarrow G_v(v) = K_v (c - v)^{n-m} \frac{\prod_{i=1}^m [v - h(\zeta_i)]}{\prod_{j=1}^n [v - h(p_j)]}$$

où $h(z) = c(z - 1)/(z + 1)$ est la transformée homographique et K_v se déduit de l'égalité

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)^{n_0} G(z) = \lim_{v \rightarrow 0} \left(\frac{c + v}{c - v} - 1 \right)^{n_0} G_v(v), \quad (5-47)$$

n_0 étant le type de $G(z)$. À remarquer que le numérateur et le dénominateur de $G_v(v)$ sont toujours de même degré.

Cette transformation permet de concevoir une commande discrète par des méthodes analogiques. En désignant par $G_p(s)$ la fonction de transfert du procédé commandé et en donnant à la constante arbitraire c la valeur $2/T$, la synthèse de cette commande s'effectue en trois étapes :

1) Calcul de la fonction de transfert analogique

$$G_{pa}(v) = (B_0 G_p)(z) \Big|_{z \rightarrow \frac{2/T+v}{2/T-v}}, \quad (5-48)$$

2) Conception par des techniques analogiques de la fonction de transfert $G_{ca}(v)$ d'un régulateur qui commande le système $G_{pa}(v)$.

3) Passage par transformation homographique inverse à la transmittance de la commande discrète,

$$G_c(z) = G_{ca}(v) \Big|_{v \rightarrow \frac{2z-1}{Tz+1}}. \quad (5-49)$$

La recherche d'une commande convenable $G_{ca}(v)$ peut se faire par le lieu d'Evans en se basant sur des spécifications temporelles ou par le diagramme de Bode en se basant sur des spécifications fréquentielles. Ces dernières se définissent en tenant compte de la relation liant la fréquence ω_v du plan- v à la fréquence réelle ω (voir 5-13) :

$$\frac{\omega_v T}{2} = \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} \quad (5-50)$$

Exemple 5-11

Nous avons obtenu pour le système $G_p(s)$ de l'exemple 5-10, avec $T = 0.1$ sec, la transmittance

$$(B_0 G_p)(z) = \frac{0.0054(z+1.09)(z-0.819)}{(z-1.1)(z^2-1.941z+0.961)}. \quad (5-51)$$

En remplaçant z par $h^{-1}(v)$ avec $c = 2/T = 20$, on obtient d'après (5-46) :

$$G_{pa}(v) = K_a \frac{(20-v)(v-b_1)(v-b_2)}{(v-a)(v^2+\alpha v+\beta)} \quad (5-52)$$

avec

$$b_1 = h(-1.09) = 20 \frac{-2.09}{-0.09} = 464.44$$

$$b_2 = h(0.819) = 20 \frac{-0.181}{1.819} = -1.99$$

$$a = h(1.1) = 20 \frac{0.1}{2.1} = 0.95$$

et on tire de $(c+v)^2 - 1.941(c^2 - v^2) + 0.961(c-v)^2$

$$\alpha = \frac{2c(1-0.961)}{1+1.941+0.961} = 0.4,$$

$$\beta = \frac{c^2(1-1.941+0.961)}{1+1.941+0.961} = 2.05.$$

D'autre part, d'après (5-47), on déduit de (5-52) et (5-51), de type $n_0 = 0$, que

$$K_v \frac{20b_1b_2}{-a\beta} = \frac{0.0054(2.09)(0.181)}{-0.1(1-1.941+0.961)}$$

$$\Rightarrow K_v = -0.0001$$

Ainsi,

$$G_{pa}(v) \approx 0.0001 \frac{(v-20)(v-464)(v+2)}{(v-0.95)(v^2+0.4v+2)}. \quad (5-53)$$

Au lieu de ce long calcul, on obtient $G_{pa}(v)$ en écrivant sur Matlab les instructions suivantes :

```
>> B0Gp = @(z) 0.0054*(z+1.09)*(z-0.819)/...
((z-1.1)*(z^2-1.941*z+0.961));
>> syms v;
>> Gpa = B0Gp ((20+v)/(20-v));
>> factor(Gpa)
```

Comme pour $c = 2/T$ la transformation homographique n'est autre que l'approximation de Tustin, les pôles de $G_{pa}(v)$ ainsi que l'un de ses zéros ont presque les mêmes valeurs que ceux de $G_p(s)$; les autres zéros de $G_{pa}(v)$ sont dus à la discrétisation par l'échantillonneur-bloqueur.

Recherche de $G_{ca}(v)$ par le lieu d'Evans

Pour la commande proportionnelle, $G_{ca}(v) = k_p$, la figure 5-24 montre la partie du lieu d'Evans voisine de l'origine. Les branches qui partent des pôles complexes quittent la région de stabilité pour $k_p \geq$

0.45 et la branche partant du pôle 0.95 ne rentre dans cette région que pour $k_p \geq 1$, ce qui montre que le système sera instable $\forall k_p$.

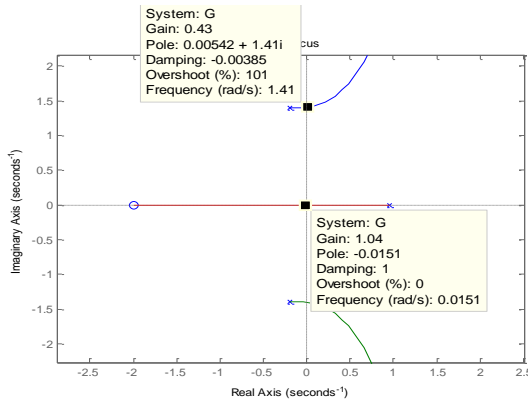


Fig. 4-24 Gains critiques de la commande proportionnelle

Cette instabilité est surtout causée par les pôles complexes voisins de l'axe des imaginaires. Choisissons un régulateur PID qui élimine ces pôles par ses zéros et annule l'erreur stationnaire de position par son pôle en 0. Pour que ce régulateur soit propre, un autre pôle stable doit être introduit. Nous le prenons éloigné de l'axe des imaginaires afin que son effet soit faible et qu'il repousse moins le lieu vers la région d'instabilité. Par exemple, en donnant à ce pôle la valeur -464 , la fonction de transfert du régulateur sera

$$G_{ca}(v) = k_p \frac{(v^2 + 0.4v + 2)}{v(v + 464)}$$

et celle de la boucle ouverte devient

$$G_a(v) = K \frac{(v - 20)(v + 2)(v - 464)}{v(v - 0.95)(v + 464)}.$$

où $K = 0.0001k_p$. Or si les pôles dominants de la boucle fermée sont très loin de l'origine, leur constante de temps sera trop petite et sature rapidement les actionneurs, ou leur fréquence sera trop grande et excite les dynamiques négligées du système commandé. Ceci nous conduit à se limiter aux points v de module relativement faible pour lesquels le rapport $(v - 464)/(v + 464) \approx -1$. Dans cette région, la fonction $G_v(v)$ sera voisine de

$$\tilde{G}_v(v) = -K \frac{(v - 20)(v + 2)}{v(v - 0.95)}$$

dont le lieu d'Evans est représenté sur la figure 5-25.

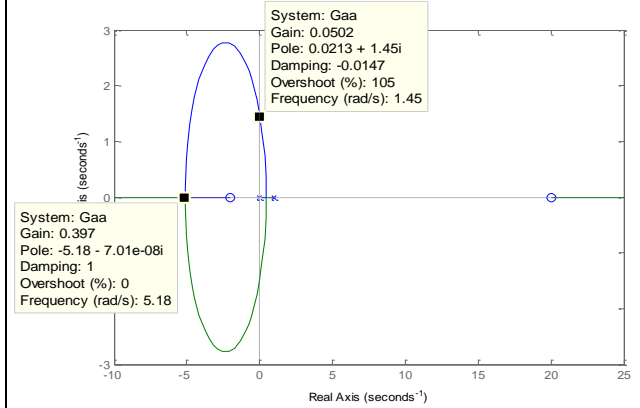


Fig. 5-25 Lieu d'Evans de $\tilde{G}_a(v)$.

Cette figure montre que quand la valeur de K dépasse 0.05, le lieu rentre dans la région de stabilité et que pour $K \approx 0.4$ ($k_p = 4000$) il arrive à un point de bifurcation où la constante de temps est minimum. Pour cette valeur de K , la transmittance de la commande discrète sera

$$G_c(z) = G_{ca}(v) \Big|_{v \rightarrow \frac{2z-1}{Tz+1}} \approx 170 \frac{z^2 - 1.941z + 0.961}{(z + 0.92)(z - 1)}.$$

Cette commande ne diffère que peu de celle obtenue d'une manière directe dans l'exemple 5-10. En générale, il est plus simple d'employer le lieu d'Evans directement dans le plan- z sans passer par la transformation homographique. Cette dernière est surtout utilisée pour la conception d'une loi de commande basée sur des spécifications fréquentielles.

Recherche de $G_{ca}(v)$ par le diagramme de Bode

La courbe de Nyquist de la fonction de transfert $G_{pa}(v)$, fig. 5-26, montre que le nombre de tours N autour de -1 n'est jamais positif quelle que soit la position de ce point par rapport à la courbe. Comme le nombre de pôles à partie réelle positive de $G_{pa}(v)$ est $P = 1$ (voir (5-53)), on a $Z = P - N \geq 1$ et la boucle fermée est instable pour toute commande proportionnelle k_p .

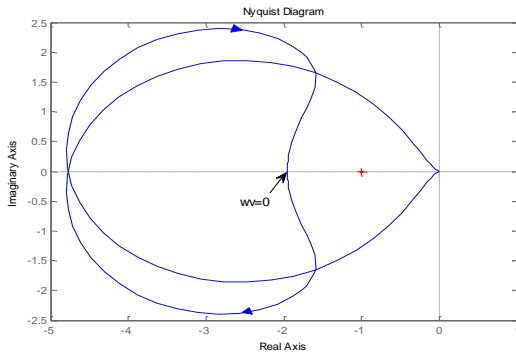


Fig. 5-26 Courbe de Nyquist de $G_{pa}(v)$

La rotation autour de -1 dans le sens négatif provient surtout du terme de second degré au dénominateur de $G_{pa}(v)$. En effet, ce terme qui a un facteur d'amortissement ξ très faible, diminue rapidement la phase de $G_{pa}(j\omega_v)$ au voisinage de la fréquence de coupure de gain, $\omega_{cgv} \approx \sqrt{2}$, comme le montre le diagramme de Bode de cette fonction (fig. 5-27).

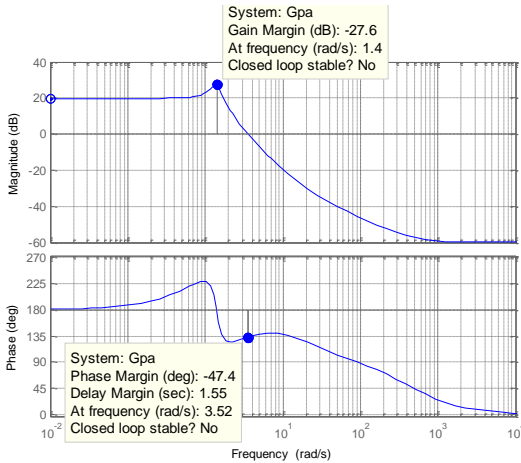


Fig. 5-27 Chute de la phase de $G_{pa}(j\omega_v)$ en ω_{cgv} .

Par le numérateur d'un régulateur PID, on élimine le terme de second degré de $G_{pa}(v)$ et par son pôle en 0 on annule l'erreur stationnaire. D'autre part, pour rendre le régulateur propre et filtrer les bruits dont la fréquence est supposée supérieure à 100 rad/sec, on introduit un pôle double en 100. Ces objectifs conduisent à un régulateur d'expression

$$G_{ca}(v) = k_p \frac{v^2 + 0.4v + 2}{v(v + 100)^2}$$

et, tenant compte de (5-53), la transmittance de la

boucle ouverte devient :

$$G_a(v) = K \frac{(v - 20)(v + 2)(v - 464)}{v(v - 0.95)(v + 100)^2}, \quad K = 10^{-4} k_p.$$

La fréquence ω_{cg} de coupure du gain de $G_a(j\omega_v)$ doit être d'un côté suffisamment grande pour une bonne performance (bonne poursuite et bon rejet des perturbations) et d'un autre côté il doit être suffisamment inférieure à 100 pour un bon filtrage des bruits. En choisissant $\omega_{cgv} = 10$ rad/sec, qui est comprise entre les fréquences de cassure 2 et 20 rad/sec, on a :

$$|G_a(j\omega_{cg})| \approx K \frac{(20)464\omega_{cg}}{(\omega_{cg}^2)10^4} = 1 \Rightarrow K \approx 10.8.$$

En construisant le diagramme de Bode de $G_a(j\omega_v)$ pour cette valeur de K , on trouve que les marges de gain et de phase ne sont pas satisfaisantes. Pour améliorer la robustesse, on diminue K à 8 ce qui donne le diagramme suivant (fig.5-28) de caractéristiques $\omega_{cgv} = 8$ rad/sec, $MG = 7$ db et $MP = 37^\circ$. D'après (5-50), la fréquence réelle de coupure du gain est $\omega_{cg} = 20 * \arctg(8/20) = 7.6$ rad/sec.

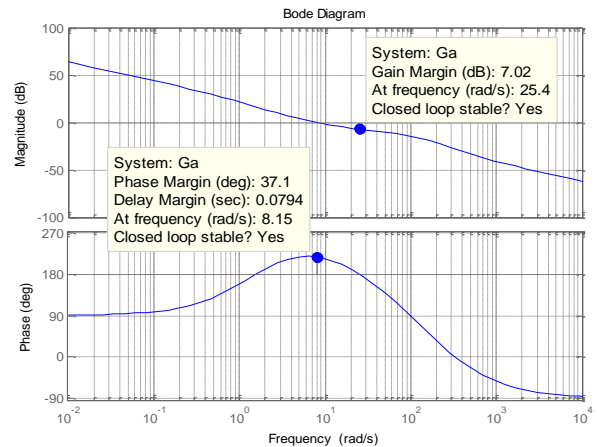


Fig. 4-24 Caractéristiques fréquentielles finales

La transmittance du régulateur qui satisfait ces spécifications est :

$$G_c(z) = G_{ca}(v) \Big|_{v \rightarrow \frac{2z-1}{Tz+1}} = 114 \frac{(z+1)(z^2 - 1.941z + 0.961)}{(z + 0.667)^2(z-1)}.$$

EXERCICE 5-10

Pour la commande proportionnelle $k_p = 1$ du système considéré à l'exemple 5-9, déterminer par transformation homographique la fréquence ω_{cg} de coupure du gain. Construire un régulateur à avance de phase qui double cette fréquence. Que seront les marges de gain et de phase ?

5-5-3 Conception de la commande par approximation pseudo-continue

Cette méthode qui dérive de la transformation homographique est simple mais elle est approximative et ne donne des résultats corrects que lorsque la fréquence d'échantillonnage est élevée. En pratique, il faut avoir au moins 10 échantillons durant la constante de temps τ de la réponse indicielle de la boucle fermée ainsi que durant la période T_a de ses oscillations. En d'autres termes, la méthode est valable si $T < \tau/10$ et $T < 2\pi/10\omega_a$ c'est-à-dire si les pôles dominants de la boucle fermée du système analogique équivalent sont à l'intérieur du rectangle gris représenté sur la figure 5-29 suivante.

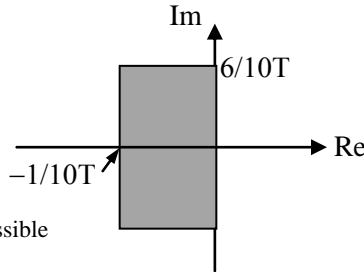


Fig. 5-29 Région admissible des pôles dominants

Pour approximer le système discret de la figure 5-30 par un système analogique, commençons par écrire la transformée de Laplace de sa réponse continue $y(t)$. On a :

$$y(s) = B_0(s)G_p(s)G_c^*(s)e^*(s). \quad (5-54)$$

Or
$$e^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT)e^{-skT} = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{\infty} e(kT)e^{-skT}$$

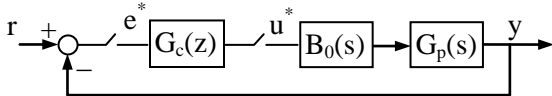


Fig. 5-30 Système à commande discrète.

et comme T est supposé petit, la définition de l'intégrale de Riemann permet d'écrire :

$$e^*(s) \approx \frac{1}{T} e(s). \quad (5-55)$$

D'autre part, en remplaçant e^{-sT} par son approximation de Tustin $(2/T - s)/(2/T + s)$, on obtient :

$$B_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \approx \frac{2}{2/T + s}. \quad (5-56)$$

Tenant compte de (5-55) et (5-56), l'équation (5-54) devient :

$$y(s) = G_{eq}(s)G_c^*(s)e(s)$$

avec

$$G_{eq}(s) = \frac{2/T}{s + 2/T} G_p(s). \quad (5-57)$$

Ainsi, si la période d'échantillonnage est suffisamment petite de sorte que les pôles dominants de la boucle fermée soient à l'intérieur du rectangle gris de la figure 5-29, le système discret de la figure 5-30 sera presque équivalent au système de commande analogique de la figure 5-31.

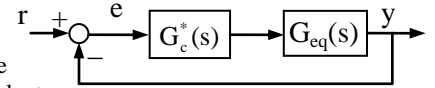


Fig. 5-31 Système analogique équivalent

Il suffit donc de déterminer $G_c^*(s)$ par l'une des techniques analogiques puis de remplacer s par son approximation de Tustin pour déduire la transmittance de la commande discrète :

$$G_c(z) = G_c^*(s) \Big|_{s \rightarrow \frac{2z-1}{Tz+1}}. \quad (5-58)$$

Exemple 5-12

Soit

$$G_p(s) = \frac{s + 0.5}{s(s + 2)^2}$$

la fonction de transfert du système à commander numériquement avec un échantillonnage de période

$T = 0.1\text{sec}$. Ceci revient à chercher une commande analogique $G_c^*(s)$ pour le système

$$G_{eq}(s) = \frac{20}{s+20} \frac{s+0.5}{s(s+2)^2}.$$

Pour $G_c^*(s) = k_p$, le lieu d'Evans montre que le pôle dominant sera entre 0 et -0.5 dont la constante de temps est supérieure à 2sec . Pour accélérer la réponse, on élimine le zéro -0.5 et l'un des pôles -2 par le compensateur à retard de phase

$$G_c^*(s) = k \frac{s+2}{s+0.5}.$$

La fonction de transfert de la boucle ouverte devient

$$G_a(s) = K \frac{1}{s(s+2)(s+20)}, \quad K = 20k.$$

Le lieu des pôles dominants de la boucle fermée est représenté à la figure 5-32 suivante.

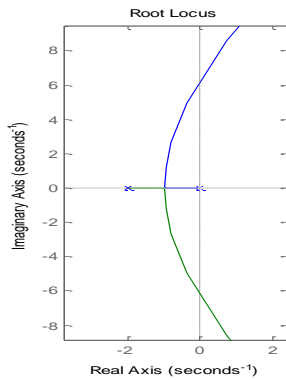


Fig. 5-32 Lieu des pôles dominants de $T_a(s)$

Ces pôles auront la forme $-\sigma \pm j\sigma$ (de facteur d'amortissement $\xi = \sqrt{2}/2$) et le troisième pôle sera en $-a$ si l'égalité suivante est vérifiée :

$$s(s+2)(s+20) + K = (s+a)(s^2 + 2\sigma s + 2\sigma^2).$$

Par identification, on trouve :

$$\sigma = \omega_a = 0.95, \quad a = 20.01, \quad K = 36 \text{ (} k = 1.8 \text{)}.$$

Comme $\sigma < 1/10T = 1$ et $\omega_a < 6/10T = 6$, l'approximation pseudo-continue est valable. Nous adoptons donc pour le système discret la commande

$$G_c(z) = 1.8 \frac{s+2}{s+0.5} \Big|_{s \rightarrow 20 \frac{z-1}{z+1}} = 1.93 \frac{z-0.82}{z-0.95}.$$

Pour cette commande on prévoit que le dépassement maximum, le temps de stabilisation et la période des oscillations de la réponse indicielle sont respectivement voisins de

$$DM = 100e^{-\pi\sigma/\omega_a} = 4\%,$$

$$t_s = 4.6/\sigma = 4.8\text{sec}$$

et

$$T_a = 2\pi/\omega_a = 6.6\text{sec}.$$

Pour s'assurer de ces caractéristiques, déterminons la transmittance $T_f(z)$ de la boucle fermée du système discret. On a :

$$G_p(z) = Z[B_0(s)G_p(s)] = \frac{0.00446(z-0.95)(z+0.89)}{(z-1)(z-0.82)^2}$$

d'où la transmittance de la boucle ouverte est

$$G(z) = G_c(z)G_p(z) = 0.0086 \frac{(z+0.89)}{(z-1)(z-0.82)}$$

et celle de la boucle fermée est donc

$$T_f(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{0.0086(z+0.89)}{z^2 - 1.811z + 0.8277}.$$

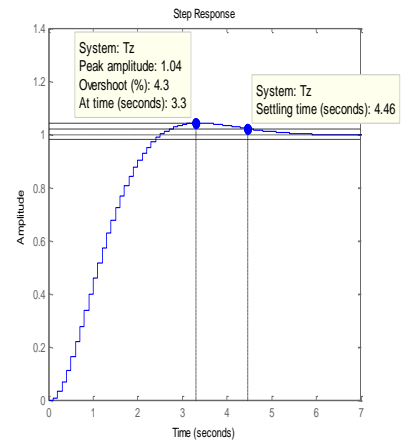


Fig. 4-33 Réponse du système de l'exemple 5-12

La réponse indicielle de $T_f(z)$ (fig. 5-33) montre que ses caractéristiques ne diffèrent pas beaucoup des caractéristiques prévues.

EXERCICE 5-11

Refaire l'exercice 5-10 par pseudo-continuité. Étudier la validité de la solution.

5-5-4 Méthode déductive

De la relation

$$T_f(z) = \frac{G_c(z)(B_0G_p)(z)}{1 + G_c(z)(B_0G_p)(z)} \quad (5-59)$$

liant la transmittance $T_f(z)$ de la boucle fermée au système commandé $(B_0G_p)(z)$ et à la commande $G_c(z)$, on tire

$$G_c(z) = \frac{T_f(z)}{1 - T_f(z)} \cdot \frac{1}{(B_0G_p)(z)}. \quad (5-60)$$

Connaissant $(B_0G_p)(z)$, il suffit de se donner une transmittance $T_f(z)$ convenable pour déduire de (5-60) la transmittance $G_c(z)$ de la commande. Cependant le choix de $T_f(z)$ n'est pas tout à fait arbitraire puisqu'elle doit être asymptotiquement stable et $G_c(z)$ doit être réalisable (c.à.d. propre). Ces contraintes se traduisent par les conditions suivantes.

C₁. Nous savons que $T_f(z)$ est asymptotiquement stable si tous ses pôles sont à l'intérieur du cercle unité sans que les pôles extérieurs à ce cercle soient simplifiés par des zéros. Ceci implique d'après (5-59) que les zéros extérieurs au cercle unité de $(B_0G_p)(z)$ doivent être tous des zéros de $T_f(z)$.

C₂. Si $T_f(z)$ est asymptotiquement stable, il en est de même de $1 - T_f(z)$ puisque son dénominateur est le même que celui de $T_f(z)$ (même réponse libre). Supposons que $(B_0G_p)(z)$ possède un pôle instable z_1 . On peut l'écrire sous la forme $(B_0G_p)(z) = G_1(z)/(z - z_1)$ et de (5-59) on a :

$$1 - T(z) = \frac{z - z_1}{(z - z_1) + G_c(z)G_1(z)}.$$

Comme $z - z_1$ ne doit pas se simplifier par un pôle, on déduit que tout pôle instable de $(B_0G_p)(z)$ doit être un zéro de $1 - T_f(z)$.

C₃. Désignons par n , n_T et n_c respectivement les degrés des dénominateurs de $(B_0G_p)(z)$, $T_f(z)$ et $G_c(z)$ et par m , m_T et m_c les degrés de leurs numérateurs. D'après (5-60), on a :

$$n_c - m_c = (n_T + m) - (m_T + n).$$

Pour que $G_c(z)$ soit propre ($n_c \geq m_c$) il est nécessaire que l'excès de pôles de $T_f(z)$ (la différence entre les degrés du dénominateur et du numérateur) soit au moins égal à celui de $(B_0G_p)(z)$ c.à.d.

$$n_T - m_T \geq n - m.$$

C₄. Enfin, si l'erreur stationnaire de position doit être nulle, il est nécessaire que $T(1) = 1$.

Exemple 5-13

Considérons le système

$$G_p(s) = \frac{-(s-1)}{s^2 + 0.4s + 2}.$$

Par l'instruction «c2d(G_p , T)», où $T = 0.1$ sec est la période d'échantillonnage, on obtient

$$(B_0G_p)(z) = \frac{-0.092774(z-1.105)}{z^2 - 1.941z + 0.9608}.$$

Cette transmittance a un excès de pôles égal 1 et possède un zéro extérieur au cercle unité. Les conditions C_1 et C_3 impliquent que 1.105 doit être un zéro de $T_f(z)$ et le degré du dénominateur de celui-ci doit excéder le degré de son numérateur de 1 ou plus. La forme la plus simple est

$$T(z) = k \frac{z - 1.105}{(z - p_1)(z - p_2)}$$

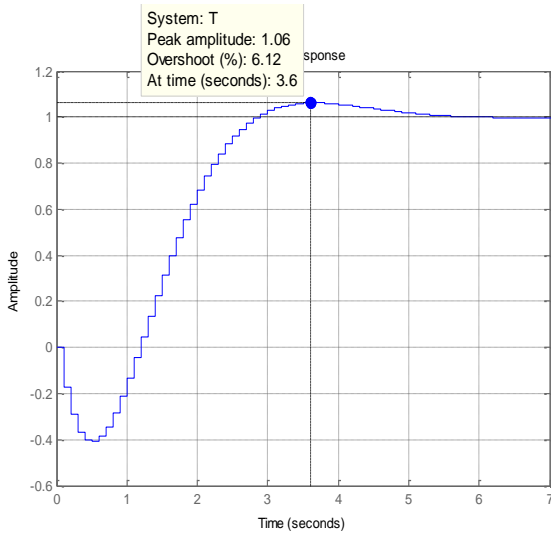
et la condition C_4 sera satisfaite si

$$k = -\frac{(1 - p_1)(1 - p_2)}{0.105}.$$

Pour obtenir une constante de temps $\tau = 1/\sigma \approx 1$ sec (10 fois T) et un dépassement maximum d'environ 4% (qui s'obtient quand $\sigma = \omega_a$), on choisit $p_1 = \bar{p}_2 = \rho e^{j\varphi}$ avec $\rho = e^{-\sigma T} = 0.905$ et $\varphi = \omega_a T = 0.1$ rad/sec. En remplaçant p_1 et p_2 par leurs valeurs dans les équations précédentes, on tire :

$$T(z) = -0.1721 \frac{z - 1.105}{z^2 - 1.801z + 0.819}.$$

La réponse indicielle de cette fonction est représentée sur la figure suivante :



La présence d'un zéro instable dans le système commandé (de phase non minimale) a produit un recul au démarrage mais le dépassement maximum et le temps de stabilisation ne sont pas loin de ce qui est désiré.

Maintenant, en appliquant (5-60), on déduit la transmittance de la commande

$$G_c(z) = -1.8547 \frac{z^2 - 1.941z - 0.9608}{(z-1)(z-0.6289)}.$$

Cette commande élimine les pôles du système commandé $(B_0G_p)(z)$ et les remplace par deux autres pôles dont l'un est 1 pour annuler l'erreur stationnaire c.à.d. pour satisfaire la condition C_4 .

EXERCICE 5-12

Pour le procédé $G_p(s) = 1/(s+1)(s+5)$ et une période d'échantillonnage est $T = 0.1$ sec, déterminer

par la méthode déductive la transmittance $G_c(z)$ de la commande pour laquelle le temps de stabilisation et le dépassement maximum de la réponse indicielle de ce système sont d'environ 5sec et 5%.

4-5-5 Algorithme de Kalman

Ayant la transmittance

$$(B_0G_p)(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0} \quad (5-61)$$

du système à commander dont les zéros et les pôles sont tous à l'intérieur du cercle unité, l'algorithme de Kalman produit une loi de commande pour laquelle l'erreur stationnaire de position s'annule à partir de l'instant nT c.à.d. après n périodes, n étant le degré du dénominateur de $(B_0G_p)(z)$.

Pour établir cet algorithme, prenons comme référence l'échelon unité et considérons l'équation récurrente associée à (5-61) :

$$a_n y_k + a_{n-1} y_{k-1} + \dots + a_0 y_{k-n} = b_n u_k + b_{n-1} u_{k-1} + \dots + b_0 u_{k-n} \quad (5-62)$$

sous la contrainte $y_{n+i} = 1 \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Pour $k \geq 2n$, l'équation (5-62) devient

$$a_n + a_{n-1} + \dots + a_0 = b_n u_k + b_{n-1} u_{k-1} + b_0 u_{k-n}.$$

Si on donne à u_j une valeur constante u_L pour $j \geq n$, on tire de l'équation précédente que

$$u_L = \frac{a_n + a_{n-1} + \dots + a_0}{b_n + b_{n-1} + \dots + b_0} = \frac{1}{(B_0G_p)(1)}. \quad (5-63)$$

Sachant que $y_k = 0 \forall k \leq 0$, $u_k = 0 \forall k < 0$, $y_k = 1 \forall k \geq n$ et $u_k = u_L \forall k \geq n$, il ne subsiste que $2n - 1$ inconnues y_1, \dots, y_{n-1} et u_0, u_1, \dots, u_{n-1} . Pour les déterminer, il suffit de résoudre les $2n - 1$ équations (5-62) relatives à $1 \leq k \leq 2n - 1$.

Ayant toutes les valeurs y_k de la réponse, la transformée Z de y est

$$y(z) = y_1 z^{-1} + y_2 z^{-2} + \dots + y_{n-1} z^{-(n-1)} + \frac{z^{-n}}{1 - z^{-1}}.$$

Comme la référence est l'échelon unité, on a :

$$T_f(z) = \frac{y(z)}{r(z)} = y(z)(1 - z^{-1})$$

et il suffit d'appliquer (5-60) pour déduire $G_c(z)$.

Exemple 5-14

Soit

$$G_p(s) = \frac{s + 0.5}{(s + 1)^2}$$

le système à commander et $T = 1$ sec. la période d'échantillonnage. Il s'agit de déterminer une loi de commande qui maintient la réponse y à la valeur 1 à partir de l'instant $2T$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{y(z)}{u(z)} &= (B_0 G_p)(z) = \frac{z-1}{z} \sum \text{Res} \left(\frac{s+0.5}{s(s+1)^2} \frac{z}{z-e^{sT}} \right) \\ &= c \frac{z-b}{(z-a)^2} \end{aligned}$$

avec

$$a = 0.3679, \quad b = 0.6004, \quad c = 0.5.$$

La valeur du signal de commande u_k à partir de l'instant $2T$ est

$$u_L = \frac{1}{(B_0 G_p)(1)} = \frac{1}{G_p(0)} = 2.$$

L'équation récurrente entre le signal de commande et la réponse est

$$y_k - 2ay_{k-1} + a^2 y_{k-2} = c(u_{k-1} - bu_{k-2}).$$

Sachant que $y_k = 0 \quad \forall k \leq 0$, $u_k = 0 \quad \forall k < 0$, $y_k = 1 \quad \forall k \geq 2$ et $u_k = u_L = 2 \quad \forall k \geq 2$, on déduit de l'équation récurrente les $2n - 1 = 3$ équations suivantes :

$$y_1 = cu_0,$$

$$1 - 2ay_1 = c(u_1 - bu_0),$$

$$1 - 2a + a^2 y_1 = c(u_L - bu_1).$$

En multipliant la deuxième équation par b et la première par b^2 et en additionnant les 3 équations on obtient : $1 - 2a + b + (b - a)^2 y_1 = cu_L$, d'où

$$y_1 = \frac{2(a + c) - (1 + b)}{(a - b)^2} = 2.5048$$

et

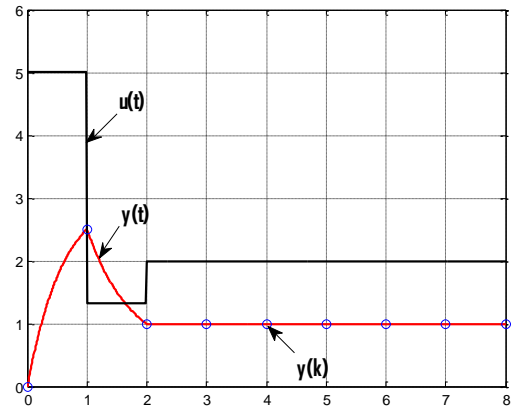
$$u_0 = y_1 / c = 5.0096, \quad u_1 = \frac{1 - 2ay_1}{c} + bu_0 = 1.3217.$$

Ainsi, comme $y(z) = y_1 z^{-1} + z^{-2} / (1 - z^{-1})$, la transmittance de la boucle fermée est

$$T_f(z) = y(z)(1 - z^{-1}) = \frac{y_1 z + (1 - y_1)}{z^2}$$

et en appliquant (5-60), on obtient la loi de commande définie par

$$\begin{aligned} G_c(z) &= \frac{y_1}{c} \frac{[z - (y_1 - 1) / y_1]}{(z - 1)[z - (y_1 - 1)]} \frac{(z - a)^2}{z - b} \\ &= 5.0096 \frac{(z - 0.6008)}{(z - 1)(z - 1.5048)} \frac{(z - 0.3679)^2}{(z - 0.6004)} \\ &\approx 5.0096 \frac{(z - 0.3679)^2}{(z - 1)(z - 1.5048)}. \end{aligned}$$



La figure montre dans le même plan le signal de commande $u(t)$ à l'entrée de $G_p(s)$, la réponse analogique $y(t)$ et la réponse échantillonnée $y(k)$.

On remarque un dépassement de 250 % avant que la réponse se stabilise à 1 à partir de l'instant 2sec. On peut vérifier qu'en augmentant la période d'échantillonnage T , l'action de démarrage u_0 et le dépassement diminuent, évidemment au dépend du temps de stabilisation $2T$.

EXERCICE 5-13

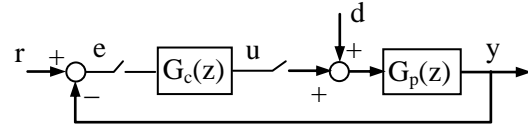
Le système à commander étant

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)},$$

déterminer la loi de commande qui annule l'erreur stationnaire de position à partir de l'instant 3sec. sachant que la période d'échantillonnage est $T = 1$ sec. Représenter le signal de commande bloqué $u(t)$, la réponse analogique $y(t)$ et son échantillonnage $y^*(t)$.

AUTRES EXERCICES ET COMPLÉMENTS

5-14. Le système suivant a deux entrées, la référence r et la perturbation d , et soient la réponse y et la commande u ses sorties.



1) Écrire les 4 transmittances entre chacune des entrées et chacune des sorties.

On dit qu'un système de commande est *intérieurement stable* si tous les signaux qui le traversent restent bornés quand ses entrées sont bornées.

2) Si

$$G_p(z) = \frac{z-a}{(z-b)(z-c)} \quad \text{et} \quad G_c(z) = k \frac{(z-b)(z-c)}{(z-1)(z-a)}$$

avec $|a| > 1$, $0 < b < c < 1$ et $k > 0$.

montrer que, pour $k < 1$, $T_f(z) = y(z)/r(z)$ est stable sans que le système soit intérieurement stable.

3) Pour $a = 2$, $b = 0.5$ et $c = 0.8$, étudier la stabilité interne du système quand on commute a et b dans $G_c(z)$.

5-15. Considérons pour le procédé

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s-1)}$$

la commande analogique à avance de phase

$$G_c(s) = k \frac{s+2}{s+10}.$$

1) Construire le lieu d'Evans de $G(s) = G_c(s)G_p(s)$ et montrer que pour $k = 84$ les parties réelles des pôles de la boucle fermée sont égales et que la constante de temps est minimum.

Dans la suite, on prendra $k = 84$.

2) À l'aide de Matlab, représenter le diagramme de Bode de $G(j\omega)$ et lire les valeurs des marges de gain et de phase et des fréquences correspondantes.

3) Pour commander $G_p(s)$ numériquement, on le précède par un bloqueur B_0 et on adopte la loi de commande définie par

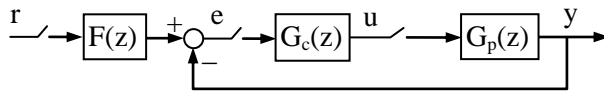
$$G_{cl}(z) = G_c \left(\frac{2(z-1)}{T(z+1)} \right)$$

qui est donc déduite de $G_c(s)$ en remplaçant s par son approximation de Tustin. En posant $G_1(z) = G_{cl}(z)(B_0 G_p)(z)$, construire à l'aide de Matlab le diagramme de Bode de $G_1(e^{j\omega T})$ pour $T = 0.1$ sec. et comparer les marges de gain et de phase avec celles

de $G(j\omega)$. Donner une explication à la *distorsion* (warping) de $G_1(e^{j\omega T})$ par rapport à $G(j\omega)$.

4) Par la méthode pseudo-continue, déterminer pour le même système et la même période d'échantillonnage, $T = 0.1$ sec, une commande numérique PD. Examiner la distorsion fréquentielle entre ce système et le système analogique équivalent.

4-16. Le système de commande suivant est à deux paramètres comportant un régulateur $G_c(z)$ et un pré-filtre $F(z)$. Le premier servira à placer les pôles en des positions convenables et le second à simplifier les zéros indésirables et à annuler l'erreur stationnaire.



Pour la période d'échantillonnage $T = 0.2$ sec, la transmittance du système commandé avec le bloqueur est

$$G_p(z) = \frac{z - 0.96}{z^2 - 1.6z + 0.6}.$$

1) Si $G_c(z)$ est choisi de la forme $k(z - \alpha)/(z - \beta)$, déterminer k , α et β pour que les pôles de la boucle fermée soient de même module $\rho = 0.6$ et d'arguments 0 et ± 0.8 rad.

2) Représenter la réponse indicielle du système dans le cas où $F(z) = 1$.

3) Que devient cette réponse si $F(z) = c/(z - 0.96)$ où la valeur de c sera choisie de sorte à annuler l'erreur stationnaire de position.

5-17. La fonction de transfert du système commandé est

$$G_p(s) = \frac{e^{-s}}{s + 2}$$

et l'organe de commande est de type PI de la forme $G_c(z) = k(z - a)/(z - 1)$. Pour une période d'échantillonnage $T = 0.5$ sec,

1) déterminer les valeurs de a et k pour que le facteur d'amortissement et la période des oscillations des pôles dominants soient $\xi = 0.5$ et $T_a = 5$ sec.

2) Représenter à l'aide de Matlab la réponse indicielle de ce système.

5-18. Déterminer une commande numérique de type avance de phase pour le système

$$G_p(s) = \frac{s + 2}{s(s + 1)(s + 4)}$$

de sorte que l'erreur stationnaire de vitesse soit inférieure à 0.02 et que la fréquence de coupure de gain soit autour de 20 rad/sec, la période d'échantillonnage étant $T = 0.1$ sec. Estimer les marges de gain et de phase.

5-19. En choisissant une période d'échantillonnage $T = 0.1$ sec, déterminer une commande numérique du système

$$G_p(s) = \frac{s - 1}{s^2 - 4}$$

1) par la méthode déductive,

2) par l'algorithme de Kalman.

Représenter dans chaque cas le signal de commande.