

Chapitre 5

COMMANDES $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_{\infty}$

5-1 INTRODUCTION

La figure 5-1 est la représentation standard d'un système de commande automatique (voir section 4-2). Le signal $u \in \mathbb{R}^p$ est la commande, $m \in \mathbb{R}^q$ est le vecteur des signaux mesurés, $z \in \mathbb{R}^k$ est le vecteur caractérisant la performance (petite erreur, commande bornée et de faibles fréquences, ...) et $w \in \mathbb{R}^r$ est le vecteur des signaux exogènes (la consigne r , la perturbation d et le bruit de mesure b).

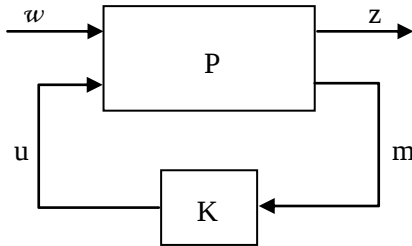


Fig. 5-1 Schéma standard d'un système de commande

Le système P , dit augmenté (ou ajouté), englobe l'objet commandé, les filtres $w_{wi}(s)$ des entrées exogènes et les filtres $w_{zi}(s)$ des variables de performance. Les filtres $w_{wi}(s)$ sont introduits pour modéliser les entrées réelles possibles et les filtres de sortie $w_{zi}(s)$ servent à indiquer les fréquences pour lesquelles la norme du signal de performance z doit être faible. Cette exigence sera assurée par un choix convenable de la matrice de transfert de l'organe de commande $K(s)$. Rappelons que la norme-2 d'un signal vectoriel $x(t)$ est la moyenne quadratique de son module. D'après l'égalité de Parseval, cette norme peut aussi s'exprimer en fonction de la transformée de Fourier $x(j\omega)$ de x :

$$\|x(t)\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^T(t)x(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^*(j\omega)x(j\omega)d\omega.$$

La norme $\mathcal{H}_2$ d'une matrice de transfert $G(s)$ stable est la moyenne quadratique des normes-2 des colonnes $g_{\bullet i}(t)$ de $G(t)$. Son carré est égal à la puissance moyenne de sa réponse y_b à un bruit blanc unitaire (voir section 3-6) :

$$\begin{aligned} \|G\|_2 &= \left(\sum_i \|g_{\bullet i}(t)\|_2^2 \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{\mathbb{E}(y_b^T y_b)} \end{aligned}$$

La norme $\mathcal{H}_{\infty}$ de G est le supremum sur l'ensemble des fréquences de sa plus grande valeur singulière. Elle vaut aussi le gain maximum en norme-2 de G :

$$\begin{aligned} \|G\|_{\infty} &= \sup_{\omega} \bar{\sigma}[G(j\omega)] \\ &= \sup_{\substack{u \in L_2^n \\ u \neq 0}} \frac{\|y(t)\|_2}{\|u(t)\|_2} \end{aligned}$$

où u et y sont respectivement l'entrée et la sortie de G . À noter que la norme $\mathcal{H}_2$ n'est valable que si G est strictement propre ($\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = 0$) mais que cette condition n'est pas exigée par la norme $\mathcal{H}_{\infty}$.

L'organe de commande $K(s)$ est considéré optimal

- 1) s'il stabilise intérieurement le système de commande de la figure 5-1 et
- 2) s'il minimise la norme de la fonction de transfert T_{zw} entre le vecteur des entrées

exogènes w et celui z des variables de performance.

La minimisation de la norme $\mathcal{H}_2$ de T_{zw} conduit à une commande dite $\mathcal{H}_2$ et la minimisation de la norme $\mathcal{H}_{\infty}$ de T_{zw} conduit à une commande dite $\mathcal{H}_{\infty}$. Ce chapitre est essentiellement destiné à l'établissement des équations relatives à chacune de ces politiques. Leur robustesse sera aussi discutée et des exemples mettront en évidence leur portée pratique.

Commençons par la formulation générale du problème et la justification de ses hypothèses.

Formulation

La matrice de transfert $P(s)$ du système P peut être décomposée en 4 sous-matrices reliant ses entrées w et u à ses sorties z et m :

$$\begin{pmatrix} z \\ m \end{pmatrix} = P(s) \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix}. \quad (5-1)$$

La fonction de transfert de w à z du système de commande T de la figure 5-1 est la transformation linéaire fractionnaire de P et K (voir 4-20).

$$T_{zw} = F_b(P, K) = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21}. \quad (5-2)$$

L'organe de commande K qui minimise la norme ($\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_{\infty}$) de T_{zw} sera déterminé partant de la représentation d'état de P . Comme l'entrée $[w; u]$ et la sortie $[z; m]$ de P sont constituées chacune de 2 sous-vecteurs, la représentation d'état de P est de la forme :

$$\dot{x} = Ax + B_1w + B_2u, \quad (5-3a)$$

$$z = C_1x + D_{11}w + D_{12}u, \quad (5-3b)$$

$$m = C_2x + D_{21}w + D_{22}u. \quad (5-3c)$$

Ces équations sont liées aux sous-matrices de $P(s)$ par les relations :

$$P_{ik}(s) = C_i(sI - A)^{-1}B_k + D_{ik} \quad (5-4)$$

où l'indice $i = 1$ correspond à la sortie z et $i = 2$ à la sortie m , $k = 1$ à l'entrée w et $k = 2$ à l'entrée u .

Hypothèses

Trois types d'hypothèses sont généralement adoptés.

Hyp 1. Nous savons que tout système ne peut être commandé que s'il est stabilisable et détectable. Or la boucle fermée (de u à u) de système de commande (fig. 5-1) est constituée du système commandé $G = (A, B_2, C_2, D_{22})$ et de l'organe K . Par conséquent, tout mode instable de G doit être contrôlable c.à.d. affecté par l'entrée u et observable c.à.d. qui affecte la sortie m . On suppose donc que les actionneurs et les capteurs sont connectés au système de sorte à satisfaire cette exigence, d'où les hypothèses du type 1 :

- (A, B_2) stabilisable, (5-5)

- (A, C_2) détectable. (5-6)

Hyp 2. Pour produire une commande u convenable, l'organe K doit être informé de l'entrée w et de l'état x du système P à travers la sortie mesurée m . Or x et w affectent m selon les équations (en transformée de Fourier)

$$\begin{aligned} 0 &= (A - j\omega I)x + B_1w, \\ m &= C_2x + D_{21}w. \end{aligned} \quad (5-7)$$

Si ces équations sont dépendantes, une variable m_i peut être remplacée par une combinaison linéaire des autres composantes de m . Dans ce cas, m_i sera inutile n'ajoutant aucune information concernant x et w . Pour éviter cette redondance pour toutes les fréquences ω , y comprise la fréquence $\omega = \infty$ pour laquelle $x = 0$ et $m = D_{21}w$, le système P doit être conçu de sorte que

- les lignes de chacune des matrices suivantes

$$M_{21} = \begin{pmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D_{21}. \quad (5-8)$$

soient indépendantes $\forall \omega$

Cette condition signifie que la matrice de transfert $P_{21}(s)$ entre w et m n'a pas de zéros sur l'axe des imaginaires (voir (1-70)). Elle sera, par exemple, satisfaite si, pour toute composante m_i de m , on tient compte de l'effet du bruit de mesure w_{bi} qui l'affecte car, dans ce cas, l'information sur w_{bi} ne

peut être transmise à K que par m_i qui devient alors indispensable (non redondante).

D'un autre côté, l'organe de commande K agit sur les variables de performance z par la commande u selon les équations (en transformée de Fourier)

$$\begin{aligned} 0 &= (A - j\omega I)x + B_2 u, \\ z &= C_1 x + D_{12} u. \end{aligned} \quad (5-9)$$

Si les colonnes de la matrice associée au second membre de (5-9) sont dépendantes, il existera une variable u_k redondante non nécessaire à la production de z . Pour éviter cette redondance pour toutes les fréquences ω , y comprise la fréquence $\omega = \infty$ pour laquelle les équations (5-9) se réduisent à $z = D_{12}u$, le système P doit être conçu de sorte que

- les colonnes de chacune des matrices suivantes

$$M_{12} = \begin{pmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D_{12} \quad (5-10)$$

soient indépendantes $\forall \omega$

Cette condition signifie que la matrice de transfert $P_{12}(s)$ entre u et z n'a pas de zéros sur l'axe des imaginaires. Elle sera, par exemple, satisfaite si l'on impose à chaque composante u_i de u une contrainte définie par l'intermédiaire d'une variable de performance z_i fonction seulement de u_i . De cette manière, on ne peut plus minimiser la norme de z sans tenir compte de la commande u_i qui devient donc indispensable (non redondante).

Les hypothèses (5-7) et (5-8) impliquent que le nombre q des lignes de D_{21} est au plus égal au nombre r de ses colonnes et que le nombre p des colonnes de D_{12} est au plus égal au nombre k de ses lignes. Ceci revient à dire que le nombre d'entrées exogènes w_k doit être au moins égal au nombre des sorties mesurées m_i et que le nombre de variables de performance z_i doit être au moins égal au nombre des signaux de commande u_k .

Hyp 3. Comme nous l'avons signalé plus haut, l'objectif de ce chapitre est la détermination d'un organe de commande stabilisante K qui minimise la norme $\mathcal{H}_2$ ou la norme $\mathcal{H}_{\infty}$ de la fonction de transfert T_{zw} . Or la norme $\mathcal{H}_2$ n'est définie que pour les matrices de transfert strictement propres. De tels

systèmes sont souhaités en pratique car si T_{zw} n'est pas strictement propre, sa réponse à une entrée constante effectue un saut à l'instant initial. Mais, d'après (5-2) et (5-4), T_{zw} n'est strictement propre que si $D_{11} = 0$. Pour satisfaire cette condition, il suffit que les variables de performance z ne soient pas directement affectées par les entrées exogènes w . Concernant la norme $\mathcal{H}_{\infty}$, la condition $D_{11} = 0$ n'est pas exigée mais nous l'admettons car c'est le cas le plus fréquent en pratique et elle simplifie considérablement l'expression de la commande. Nous admettons en plus que $D_{22} = 0$ mais ceci n'est pas une vraie restriction puisqu'on peut toujours remplacer m par le signal mesurable $m - D_{22}u$. Les hypothèses de troisième type sont donc les suivantes :

$$\bullet \quad D_{11} = D_{22} = 0 \quad (5-11)$$

et les équations (5-3) du système augmenté P se réduisent aux suivantes :

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u, \quad (5-12a)$$

$$z = C_1 x + D_{12} u, \quad (5-12b)$$

$$m = C_2 x + D_{21} w. \quad (5-12c)$$

L'exemple suivant montre comment satisfaire les hypothèses ci-dessus par l'introduction de nouvelles entrées w_i ou de sorties z_i .

Exemple 5-1

On désire commander un double intégrateur $G(s) = 1/s^2$ de sorte que sa réponse y à une référence r soit la plus voisine possible de la réponse y_d d'un système de premier ordre, $G_0(s) = 1/(s+1)$, à la même entrée r . Dans ce but, on peut proposer une boucle fermée autour de $G(s)$ comportant un organe de commande $K(s)$ de sorte que la fonction de transfert $H = (1 + GK)^{-1}GK$ entre r et y vérifie l'une des conditions suivantes

- 1) H voisine de G_0 ,
- 2) H voisine de la matrice unitaire I et monté en série avec G_0 .

Ces deux stratégies, représentées respectivement par les figures 5-2a et 5-2b, diffèrent par le signal de mesure m reçu par l'organe de commande K . Pour la première stratégie, l'information sur le système

est envoyée à K à travers $m = r - y$ et pour la deuxième à travers $m = e = y_d - y$.

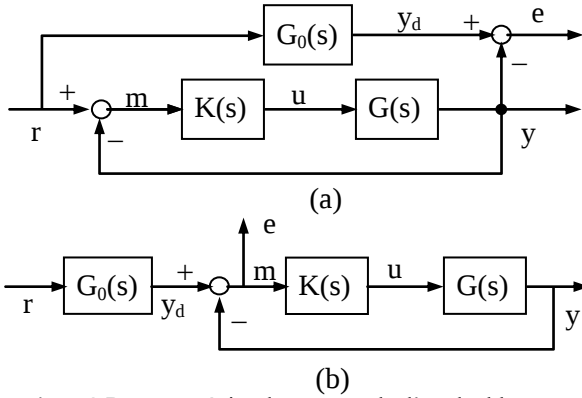


Fig. 5-2 Deux stratégies de commande d'un double intégrateur

Nous ne considérons dans cet exemple que la première stratégie, la deuxième pouvant être traitée d'une manière semblable. En supprimant K de la figure 5-2a, la matrice de transfert $P(s)$ du système augmenté d'entrée $[r ; u]$ et de sortie $[e ; m]$ s'obtient par inspection :

$$P(s) = \begin{pmatrix} G_0 & -G \\ 1 & -G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/(s+1) & -1/s^2 \\ 1 & -1/s^2 \end{pmatrix}.$$

En posant $x_1 = y_d$ et $x_2 = y$, la réalisation de P est donnée par les équations d'état suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + r & e &= x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 & m &= x_2 + r \\ \dot{x}_3 &= -u \end{aligned}$$

Les matrices relatives à ce système sont de Jordan :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \end{matrix}, \quad \begin{cases} D_{11} = 0, D_{12} = 0, \\ D_{21} = 1, D_{22} = 0. \end{cases}$$

+Les hypothèses (5-11) sont satisfaites et comme cette représentation d'état est minimale (tous ses modes sont contrôlables et observables) les hypothèses (5-5) et (5-6) sont aussi satisfaites. Il

reste à examiner les hypothèses de deuxième type (5-8) et (5-10). On a :

$$M_{21} = \begin{pmatrix} -(1+j\omega) & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -j\omega & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -j\omega & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$M_{12} = \begin{pmatrix} -(1+j\omega) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -j\omega & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -j\omega & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est facile de vérifier que les colonnes de M_{12} sont indépendantes $\forall \omega$ mais que les lignes de M_{21} ne le sont pas pour $\omega = 0$. À cette fréquence, la résolution des équations (5-7) montre que la mesure de m n'ajoute aucune information concernant les valeurs de x et r . D'autre part, comme $D_{12} = 0$, la commande u n'affecte pas la sortie e quand $\omega = \infty$ où $e = D_{12}u$. De plus, quand $\omega \rightarrow \infty$, $G \rightarrow 0$ et l'organe de commande K aura tendance à augmenter infiniment son gain afin de compenser par la commande u la diminution du gain de G. Or $\lim_{s \rightarrow \infty} K(s) = \infty$ signifie que K(s) est impropre donc irréalisable. Ces difficultés peuvent être surmontées en complétant la formulation précédente du problème par l'introduction d'autres entrées ou sorties.

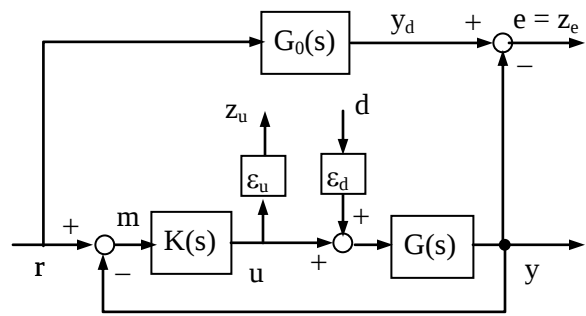


Fig. 5-3 Système 5-2a complété

Nous savons que tout actionneur est une source de perturbations et il se sature quand le module de son entrée dépasse une certaine valeur. Ceci se traduit en ajoutant à u une petite perturbation $\tilde{d} = \varepsilon_d d$, $\|d\|_2 \leq 1$, et en exigeant que la norme de u

reste inférieur à $1/\varepsilon_u$ c.à.d. $\|z_u\|_2 = \|\varepsilon_u u\|_2 \leq 1$ comme le montre la figure 5-3.

L'entrée exogène est maintenant $w = [r ; d]$ et la sortie de performance est $z = [z_e ; z_u]$ avec $z_e = e$. La matrice de transfert du système augmenté P d'entrée $[w ; u]$ et de sortie $[z ; m]$ devient :

$$P(s) = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} G_0 & -\varepsilon_d G \\ 0 & 0 \\ 1 & -\varepsilon_d G \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -G \\ \varepsilon_u \\ -G \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1/(s+1) & -\varepsilon_d/s^2 & -1/s^2 \\ 0 & 0 & \varepsilon_u \\ 1 & -\varepsilon_d/s^2 & -1/s^2 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

dont les matrices correspondantes à sa forme minimale de Jordan sont :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_d \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_u \end{pmatrix},$$

$$C_2 = (0 \quad 1 \quad 0), \quad D_{21} = (1 \quad 0), \quad D_{22} = 0.$$

Il est facile de vérifier que les hypothèses hyp1, hyp2 et hyp3 sont maintenant toutes satisfaites.

5-2 POLITIQUE $\mathcal{H}_2$

Comme pour la politique LQG, la politique $\mathcal{H}_2$ se définit aussi par deux matrices K_c et K_r , la première pour transformer l'état x en une commande u et l'autre pour minimiser l'erreur d'estimation de x .

Matrice de commande K_c

Il s'agit de déterminer un organe de commande $K(s)$ qui stabilise le système de la figure 5-1 tout en minimisant la norme $\mathcal{H}_2$ de T_{zw} c.à.d. $\|T_{zw}\|_2$. Supposons pour le moment que toutes les variables d'état sont mesurables sans bruit de mesure. Sous cette condition, l'organe de commande reçoit le maximum d'information sur le système quand $m = x$ et la commande est la plus simple quand $K(s)$ est

une matrice constante $-K_c$. En remplaçant u par $-K_c x$ dans les équations (5-12), elles deviennent :

$$\dot{x} = (A - B_2 K_c)x + B_1 w, \quad (5-13a)$$

$$z = (C_1 - D_{12} K_c)x, \quad (5-13b)$$

$$m = x. \quad (5-13c)$$

Nous savons que la minimisation de $\|T_{zw}\|_2$ revient à minimiser la puissance moyenne de z quand l'état initial est nul et que l'entrée w est un bruit blanc unitaire (voir (3-84)). Le problème se ramène donc à déterminer une matrice K_c qui stabilise $A - B_2 K_c$ et qui minimise l'indice de performance

$$J = \mathbb{E}[z^T(t)z(t)]$$

quand $x(0) = 0$ et w est un bruit blanc unitaire. Par définition ce bruit vérifie :

$$\mathbb{E}[w(\tau_1)w^T(\tau_2)] = I\delta(\tau_1 - \tau_2), \quad \forall \tau_1, \forall \tau_2, \quad (5-14)$$

I étant la matrice unité. Compte tenu de (5-13b), on peut écrire l'indice de performance sous la forme

$$J = \mathbb{E}[x^T Q_r x] \quad (5-15)$$

avec

$$Q_r = (C_1 - D_{12} K_c)^T (C_1 - D_{12} K_c). \quad (5-16)$$

Il est évident que $Q_r \geq 0$. En plus, d'après l'hypothèse (5-10), on a :

$$\begin{pmatrix} A - j\omega I & -B_2 \\ C_1 & -D_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ K_c x \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x = 0$$

ce qui signifie que toute solution de $\dot{x} = (A - B_2 K_c)x$ qui annule $(C_1 - D_{12} K_c)x$, c.à.d. qui annule $x^T Q_r x$, est nécessairement nulle. Par conséquent, d'après le théorème de Lyapunov (voir ce théorème et sa remarque à la section 2-6), la matrice $A - B_2 K_c$ de l'équation (5-13a) du système est stable si et seulement s'il existe une matrice symétrique $X > 0$ qui vérifie

$$A_r^T X + X A_r = -Q_r. \quad (5-17)$$

où

$$A_r = A - B_2 K_c$$

Admettons qu'une telle matrice X existe et montrons que l'indice de performance J peut être exprimé en fonction de X qui dépend de K_c . Sachant que $x(0) = 0$, la solution de (5-13a) est donnée par (voir (1-11))

$$x(t) = \int_0^t e^{A_r(t-\tau)} B_1 w(\tau) d\tau$$

où A_r est une matrice stable. En remplaçant dans (5-15) $x(t)$ par son expression, on tire

$$\begin{aligned} J &= \mathbb{E} \int_0^t \int_0^t w^T(\tau_1) B_1^T e^{A_r^T(t-\tau_1)} Q_r e^{A_r(t-\tau_2)} B_1 w(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \text{tr} \int_0^t \int_0^t \mathbb{E}[w(\tau_2) w^T(\tau_1)] B_1^T e^{A_r^T(t-\tau_1)} Q_r e^{A_r(t-\tau_2)} B_1 d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned}$$

où $\text{tr}(M)$ désigne la trace de la matrice M . D'autre part, comme la norme $\mathcal{H}_2$ de T_{zw} est indépendante du temps, il en est de même de J . Par conséquent, tenant compte de (5-14), on déduit de l'équation précédente que

$$\begin{aligned} J &= \lim_{t \rightarrow \infty} \text{tr} \int_0^t \int_0^t I \delta(\tau_1 - \tau_2) B_1^T e^{A_r^T(t-\tau_1)} Q_r e^{A_r(t-\tau_2)} B_1 d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \text{tr}(B_1^T X_1 B_1) \end{aligned}$$

avec
$$X_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{A_r^T(t-\tau_1)} Q_r e^{A_r(t-\tau_1)} d\tau_1.$$

$X_1 > 0$ car $Q_r \geq 0$ et, comme nous l'avons signalé ci-dessus, toute solution $x = e^{A_r t} x(0)$ de $\dot{x} = A_r x$ n'annule $x^T Q_r x$ que si $x(0) = 0$. D'autre part, A_r étant stable, $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{A_r t} = 0$, d'où

$$\begin{aligned} A_r^T X_1 + X_1 A_r &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t -\frac{d}{d\tau_1} \left[e^{A_r^T(t-\tau_1)} Q_r e^{A_r(t-\tau_1)} \right] d\tau_1 \\ &= -\lim_{t \rightarrow \infty} \left[Q_t - e^{A_r^T t} Q_r e^{A_r t} \right] \\ &= -Q_r. \end{aligned}$$

Ainsi X_1 vérifie l'équation (5-17) et comme cette dernière ne possède qu'une seule solution définie positive, on déduit que $X = X_1$ et que

$$J = \text{tr}(B_1^T X B_1). \quad (5-18)$$

La matrice K_c qui minimise J s'obtient donc en annulant la dérivée de J par rapport à chaque élément k_{cij} de K_c . Or X est la solution de (5-17). Tenant compte de (5-16) et sachant que X est symétrique, la multiplication de (5-17) à gauche par un vecteur x_0^T et à droite par x_0 donne

$$\begin{aligned} 2x_0^T X(A - B_2 K_c)x_0 \\ = -x_0^T (C_1 - D_{12} K_c)^T (C_1 - D_{12} K_c)x_0 \end{aligned}$$

et la dérivée de cette équation par rapport à k_{cij} est

$$\begin{aligned} 2x_0^T \frac{\delta X}{\delta k_{cij}} (A - B_2 K_c)x_0 \\ = 2x_0^T X B_2 (1_{ij})x_0 + 2x_0^T (C_1 - D_{12} K_c)^T D_{12} (1_{ij})x_0. \end{aligned}$$

On voit que $\delta X / \delta k_{cij}$ s'annule $\forall x_0$ si et seulement si

$$X B_2 = -(C_1 - D_{12} K_c)^T D_{12}.$$

Mais la matrice $D_{12}^T D_{12}$ est inversible puisque, d'après l'hypothèse (5-10), les colonnes de D_{12} sont indépendantes. Par conséquent, en posant

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1^T \\ D_{12}^T \end{bmatrix} [C_1 \quad D_{12}],$$

on obtient :

$$K_c = R^{-1} (B_2^T X + S^T) \quad (5-19)$$

Il reste à déterminer la matrice X . Or cette matrice est la solution définie positive (dp) de l'équation (5-17) quand on y remplace K_c et Q_r par leurs expressions (5-19) et (5-16). En effectuant ces substitutions, on peut facilement vérifier que X est la solution de l'équation de Riccati :

$$\begin{aligned} A_c^T X + X A_c - X B_2 R^{-1} B_2^T X \\ = -Q + S R^{-1} S^T \end{aligned} \quad (5-20)$$

où
$$A_c = A - B_2 R^{-1} S^T.$$

Ainsi, si l'équation (5-20) possède une solution $X > 0$, la matrice K_c de la commande $\mathcal{H}_2$ est donnée par (5-19). Elle stabilise le système et minimise $\|T_{zw}\|_2$ à condition que toutes les variables d'état soient mesurables. À noter que si $S = C_1^T D_{12} = 0$, c.à.d. quand l'indice de performance J ne comporte pas une pénalité sur l'effet mutuel de x et u sur z (examiner (5-15) et (5-16) sachant que $-K_c x = u$), les équations précédentes se réduisent aux équations (2-57) et (2-58) de la politique LQR.

Estimateur et filtrage

Le plus souvent les variables d'état ne sont pas toutes mesurables et, pour obtenir la commande $u = -K_c x$, il convient d'estimer x à partir d'un signal vectoriel mesurable $m \neq x$. L'équation de l'estimation $\hat{x}$ de x est de la forme

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_2 u + K_f (m - \hat{m}) \quad (5-21)$$

obtenue à partir de l'équation (5-12a) de x en ignorant le bruit blanc inconnu w (de moyenne nulle) et en ajoutant un terme correcteur $K_f (m - \hat{m})$. L'écart entre le signal mesuré m et son estimation $\hat{m} = C_2 \hat{x}$ (qui provient de (5-12c) en ignorant w) reflète l'erreur d'estimation $\varepsilon = x - \hat{x}$. La matrice K_f sera choisie de sorte à minimiser en régime stationnaire la moyenne de $\|\varepsilon\|^2$, c.à.d. l'indice d'estimation

$$\begin{aligned} J_f &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\varepsilon^T \varepsilon) \\ &= \text{tr} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\varepsilon \varepsilon^T) = \text{tr} Y. \end{aligned} \quad (5-22)$$

En retranchant (5-21) de (5-12a) on obtient l'équation suivante qui montre l'effet de K_f et w sur l'évolution de ε :

$$\dot{\varepsilon} = (A - K_f C_2) \varepsilon + (B_1 - K_f D_{21}) w. \quad (5-23)$$

L'estimation $\hat{x}$ de x est non biaisée si $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \varepsilon = 0$. Comme $\mathbb{E} w = 0$, on déduit de (5-23) que $\hat{x}$ sera non biaisée si et seulement si la matrice $A_s = A - K_f C_2$ est stable. Sous cette condition, en posant $B_s = B_1 - K_f D_{21}$, la solution stationnaire de (5-23) (c.à.d. quand $e^{A_s t} \varepsilon(0) \rightarrow 0$) est donnée par

$$\varepsilon = \int_0^t e^{A_s(t-\tau)} B_s w(\tau) d\tau, \quad (5-24)$$

d'où,

$$\begin{aligned} Y &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\varepsilon \varepsilon^T) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \int_0^t e^{A_s(t-\tau_1)} B_s \mathbb{E}[w(\tau_1) w^T(\tau_2)] B_s^T e^{A_s^T(t-\tau_2)} d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned}$$

Tenant compte de (5-14), on déduit que

$$Y = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{A_s(t-\tau_1)} B_s B_s^T e^{A_s^T(t-\tau_1)} d\tau_1 \quad (5-25)$$

et

$$\begin{aligned} A_s Y + Y A_s^T &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t -\frac{d}{d\tau_1} \left[e^{A_s(t-\tau_1)} B_s B_s^T e^{A_s^T(t-\tau_1)} \right] d\tau_1 \\ &= -\lim_{t \rightarrow \infty} \left(B_s B_s^T - e^{A_s t} B_s B_s^T e^{A_s^T t} \right). \end{aligned}$$

Comme A_s est supposée stable, on voit que la matrice Y vérifie l'équation

$$A_s Y + Y A_s^T = -B_s B_s^T = -W_s \quad (5-26)$$

avec

$$W_s = (B_1 - K_f D_{21}) (B_1 - K_f D_{21})^T. \quad (5-27)$$

Il est évident que $W_s \geq 0$. En plus, d'après l'hypothèse (5-8), on a l'implication

$$\begin{pmatrix} \varepsilon^T & \varepsilon^T K_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \varepsilon = 0$$

d'où toute solution $\varepsilon = e^{A_s t} \varepsilon_0$ de $\dot{\varepsilon} = (A - K_f C_2)^T \varepsilon = A_s^T \varepsilon$ qui annule $(B_1 - K_f D_{21})^T \varepsilon = B_s^T \varepsilon$, c.à.d. qui annule $\varepsilon^T W_s \varepsilon$, est nécessairement nulle. Par conséquent si l'équation de Lyapunov (5-26) admet une solution $Y_1 > 0$, A_s sera stable. Mais si A_s est stable l'équation (5-25) montre que $Y > 0$ et vérifie (5-26). Comme une telle solution est unique, on aura nécessairement

$$Y_1 = Y = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\varepsilon \varepsilon^T). \quad (5-28)$$

Pour déterminer maintenant la matrice K_f qui minimise l'indice d'estimation J_f définie par (5-22), il suffit d'annuler les dérivées de Y par rapport à

chaque élément k_{ij} de K_f . Mais l'équation (5-26) de Y a la même forme que l'équation (5-17) de X et, d'après (5-10), $D_{21}D_{21}^T$ est inversible. En remplaçant dans (5-19) et (5-20) chaque matrice de (5-17) par sa matrice correspondante de (5-26) et en posant

$$\begin{bmatrix} W & U \\ U^T & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1^T & D_{21}^T \end{bmatrix}$$

on aboutit au résultat suivant :

$$K_f = (YC_2^T + U)V^{-1} \quad (5-29)$$

où Y est la solution définie positive de l'équation de Riccati

$$\begin{aligned} A_f Y + Y A_f^T - Y C_2^T V^{-1} C_2 Y \\ = -W + U V^{-1} U^T \end{aligned} \quad (5-30)$$

avec $A_f = A - U V^{-1} C_2$.

Les équations (5-29) et (5-30) définissent la matrice K_f . À noter que si $U = 0$, c.à.d. quand l'indice d'estimation J_f ne comporte pas une pénalité sur l'effet mutuel de x et m sur ε , les équations précédentes se réduisent aux équations (2-70) et (2-71) du filtre de Kalman.

La politique LQG n'est donc qu'un cas particulier de la politique $\mathcal{H}_2$. De plus, contrairement à LQG, il n'est pas exigé dans $\mathcal{H}_2$ de se limiter à des perturbations blanches.

Ayant les matrices K_c et K_f , la commande u de la politique $\mathcal{H}_2$ est donnée par

$$u = -K_c \hat{x} \quad (5-31)$$

où, d'après (5-21), $\hat{x}$ est la solution de l'équation

$$\dot{\hat{x}} = (A - B_2 K_c - K_f C_2) \hat{x} + K_f m. \quad (5-32)$$

Les équations (5-31) et (5-32) constituent les équations d'état de l'organe de commande $K(s)$ d'entrée m et de sortie u . Il est de même ordre n que

le système commandé P (même nombre de variables d'état) et l'ordre du système global T , d'entrée w et de sortie z , est donc $2n$. D'autre part $K(s)$ est strictement propre puisque, d'après (5-31), sa matrice D est nulle. Tenant compte des équations (5-12), (5-23) et (5-31), il est facile de voir que les équations d'état du système global T de la figure 5-1 peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A - B_2 K_c) x + B_2 K_c \varepsilon + B_1 w, \\ \dot{\varepsilon} &= (A - K_f C_2) \varepsilon + (B_1 - K_f D_{21}) w, \\ z &= (C_1 - D_{12} K_c) x + D_{12} K_c \varepsilon. \end{aligned} \quad (5-33)$$

Le gain $\gamma = \|T_{zw}\|_2$ de T est égal à la racine carrée de $\mathbb{E}(z^T z)$ quand w est un bruit blanc unitaire et $x(0) = \varepsilon(0) = 0$. Un calcul semblable à celui effectué ci-dessus pour J et J_f montre que

$$\gamma^2 = \text{tr}(B_1^T X B_1) + \text{tr}(R K_c Y K_c^T R). \quad (5-34)$$

Pour un système augmenté P , donné par ses équations d'état minimale, l'instruction

$$>> [K, T, \text{gam}] = \text{h2syn}(P, q, p)$$

calcule rapidement les équations d'état de l'organe de commande optimale K et du système global correspondant T ainsi que le gain γ de ce système. Les arguments q et p de la fonction «h2syn» sont respectivement les dimensions des signaux m et u . L'exemple suivant montre comment formuler un système à commander et déterminer son organe de commande $K(s)$ par h2syn.

Exemple 5-2

On désire commander un système modélisé par la fonction de transfert

$$G(s) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-s^2 + 3}{(s+1)^2(s+2)} \\ \frac{3s+1}{(s+2)(s-1)} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

de sorte que chacune de ses deux réponses y_1 et y_2 soit la plus voisine possible de la réponse y_d de $G_0(s) = 5/(s+5)$ à une référence $r(t)$. Pour se conformer à la réalité physique, il est nécessaire de

modéliser aussi les perturbations et les bruits de mesure et de tenir compte des limitations que les signaux de commande doivent en pratique respecter.

1) Supposons que le modèle $G(s)$ du système est obtenu en négligeant certaines de ses dynamiques qui se manifestent pour des fréquences $\omega \geq 10$ rad/sec. Ce modèle n'est donc acceptable que si les harmoniques des perturbations $\tilde{d}_1$ et $\tilde{d}_2$ aux deux entrées de G sont négligeables pour les fréquences $\omega \geq 10$ rad/sec. Nous admettons donc que les perturbations sont des signaux d_1 et d_2 filtrés par le filtre passe bas

$$w_d(s) = \frac{k_d}{s + a_d}$$

où les valeurs des paramètres k_d et a_d ainsi que le signal d_i , $i = 1, 2$, peuvent être choisis arbitrairement à condition que $\tilde{d}_i = w_d(s)d_i$ soit une perturbation pratiquement possible vérifiant en particulier la condition $|\tilde{d}_i(j\omega)| \ll 1$, $\forall \omega \geq 10$ rad/sec.

2) Les harmoniques des signaux de commande u_1 et u_2 de fréquences $\omega \geq 10$ rad/sec peuvent aussi exciter les dynamiques négligées du système. Pour éviter cette possibilité, nous associons à chaque commande u_i , $i = 1, 2$, une variable de performance z_{ui} telle que

$$z_{ui} = w_{ui}(s)u_i \quad \text{avec} \quad w_{ui}(s) = \frac{\beta_i(s + \delta_i)}{(s + \alpha_i)}$$

où $w_{ui}(s)$ est un filtre passe haut dont les paramètres seront choisis de sorte à satisfaire les conditions suivantes :

$$w_{ui}(0) = \frac{\beta_i \delta_i}{\alpha_i} < 1,$$

$$w_{ui}(\infty) = \beta_i \gg 1,$$

$$\omega_{cui} = \frac{\alpha_i}{\beta_i} < 10 \text{ rad/sec.}$$

De cette manière, comme la commande minimise z_{ui} , les harmoniques de u_i de fréquence $\omega > 10 > \omega_{cui}$ rad/sec seront négligeables mais ses harmoniques de faibles fréquences pourront avoir des valeurs

suffisamment grandes pour accélérer la convergence de la réponse y vers la réponse désirée y_d .

3) L'organe de commande est informé sur l'état du système à travers la mesure des sorties y_1 et y_2 . Or les capteurs qui effectuent cette mesure génèrent généralement des bruits $\tilde{b}_1$ et $\tilde{b}_2$ de hautes fréquences. Si l'expérience nous révèle que les harmoniques de ces bruits ne sont significatives qu'à partir de 50 rad/sec, nous pouvons admettre que $\tilde{b}_1$ et $\tilde{b}_2$ sont les réponses à des signaux b_1 et b_2 d'un filtre passe haut

$$w_b(s) = \frac{k_b s}{s + a_b}$$

où les valeurs des paramètres k_b et a_b ainsi que le signal b_i , $i = 1, 2$, peuvent être choisis arbitrairement à condition que $\tilde{b}_i = w_b(s)b_i$ soit un bruit pratiquement possible vérifiant en particulier la condition $|\tilde{b}_i(j\omega)| \ll 1$, $\forall \omega \leq 50$ rad/sec.

4) Pour que l'erreur $e = y_d - y$ soit suffisamment faible en régime stationnaire (c.à.d. à faibles fréquences), nous associons à chacune de ses composantes e_i , $i = 1, 2$, une variable de performance définie par

$$z_{ei} = w_{ei}(s)e_i \quad \text{avec} \quad w_{ei}(s) = \frac{\gamma_i}{(s + \varepsilon_i)}.$$

Le paramètre ε_i , de faible valeur, est ajouté à s afin que le filtre $w_{ei}(s)$ soit stable. Si l'on néglige ε_i et si le système est stable ($z_{ei} < \infty$), $e_i(j\omega)$ ne peut que tendre vers 0 quand $\omega \rightarrow 0$. Ceci signifie que l'erreur de position e_i sera très petite en régime stationnaire (effet d'intégration). D'autre part, pour que l'organe de commande minimise e_i pour toutes les fréquences ω appartenant à $[0, 10]$, la valeur de γ_i , qui est presque égale à la bande passante du filtre $w_{ei}(s)$, doit être au moins égale à 10.

En connectant les filtres définissant les entrées exogènes et les variables de performance au système de commande, on obtient le schéma représenté par la figure 5-4 où $W_u = \text{diag}(w_{u1}, w_{u2})$ et $W_e = \text{diag}(w_{e1}, w_{e2})$.

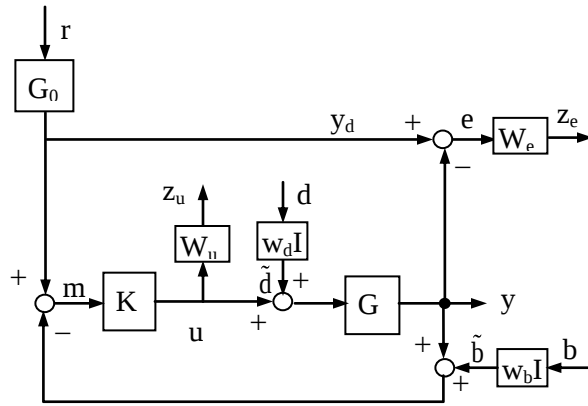


Fig. 5-4 Système de commande avec ses filtres définissant ses entrées et ses sorties.

Le système augmenté P contient tous les éléments de ce schéma à part l'organe de commande K . Il a pour entrées les vecteurs $w = [r; d; b]$ et u et pour sorties les vecteurs $z = [z_e; z_u]$ et m . Au lieu de déterminer manuellement la fonction de transfert $P(s)$ de P , il est plus simple de l'obtenir à l'aide de l'instruction «sysic».

Les instructions «ss» et «minreal» associent à $P(s)$ une réalisation d'état minimal en éliminant les variables d'état non contrôlables ou non observables. Il suffit ensuite d'employer «h2syn» pour obtenir l'organe de commande K de la politique $\mathcal{H}_2$. Dans le programme suivant, les valeurs des paramètres des filtres sont choisies en tenant compte des leurs conditions mentionnées ci-dessus.

% Système commandé

```
>> s = zpk('s');
>> G = [0 (-s^2+3)/((s+1)^2*(s+2))
        (3*s+1)/((s+2)*(s-1)) 1/(s+2)];
```

% Modèle de référence

```
>> G0 = (5/(s+5))*eye(2);
```

% Filtres des entrées

```
>> wd = (1/(s+5))*eye(2);
>> wb = (2*s/(s+100))*eye(2);
```

% Filtres des sorties

```
>> We = (50/(s+0.001))*eye(2);
>> Wu = [100*(s+2)/(s+800) 0
        0 100*(s+1)/(s+800)];
```

% Système augmenté $P(s)$

```
>> systemnames = 'G G0 Wd Wb Wu We';
>> inputvar = '[r{2};d{2};b{2};u{2}]';
>> outputvar = '[We;Wu;G0-G-Wb]';
>> input_to_G = '[u+Wd]';
>> input_to_G0 = '[r]';
>> input_to_Wd = '[d]';
>> input_to_Wb = '[b]';
>> input_to_Wu = '[u]';
>> input_to_We = '[G0-G]';
>> P = sysic;
```

% Synthèse de la politique $\mathcal{H}_2$

```
>> P = minreal(ss(P));
>> [K, Ta, gam] = h2syn(P,2,2);
>> K = tf(K); % Matrice de transfert de K.
```

Pour tester l'efficacité de l'organe de commande obtenu, simulons par «lsim» la matrice de transfert T_r liant la fonction de référence y_d , la perturbation réelle $\tilde{d}$ et le bruit réel $\tilde{b}$ à la réponse y de G et à la commande u . Des équations

$$\begin{aligned} y &= G[\tilde{d} + K(y_d - y - \tilde{b})], \\ u &= K[y_d - \tilde{b} - G(\tilde{d} + u)], \end{aligned}$$

on déduit que

$$\begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix} = T_r \begin{pmatrix} y_d \\ \tilde{d} \\ \tilde{b} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad T_r = \begin{pmatrix} T & SG & -T \\ S_e K & -T_e & -S_e K \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{aligned} S &= (I + GK)^{-1}, \quad T = I - S, \\ S_e &= (I + KG)^{-1}, \quad T_e = I - S_e \end{aligned}$$

sont les sensibilités à la sortie et à l'entrée de G et leurs complémentaires.

% Définition de T_r

```
>> S = inv(eye(2)+G*K);
>> Se = inv(eye(2)+K*G);
>> T = eye(2)-S;
>> Te = eye(2)-Se;
>> Tr = [T S*G -T ; Se*K -Te -Se*K];
```

Les entrées suivantes de T_r sont choisies parmi une infinité d'entrées possibles compatibles avec les conditions du problème mentionnées ci-dessus.

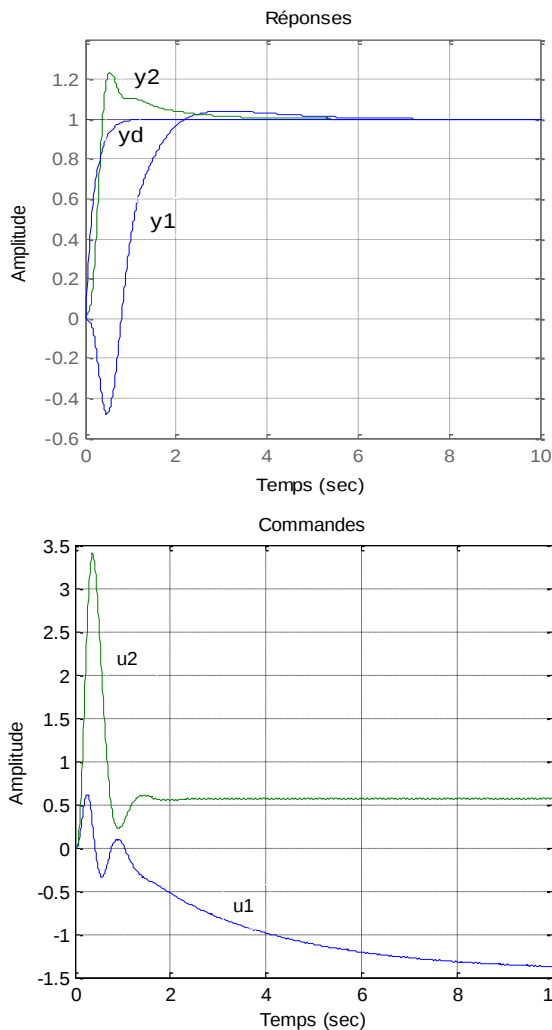
% Choix des entrées

```
>> t = 0 : 0.01 : 10;
>> yd = [1 ; 1]*(1-exp(-5*t));
>> dt = [0.1 ; 0.1]*ones(size(t));
>> bt = [0.1 ; 0.1]*sin(75*t);
```

La simulation suivante permet la comparaison graphique entre y et y_d et montre la variation de la commande u .

% Simulation

```
>> yu = lsim(Tr, [yd ; dt ; bt]', t);
>> plot(t, yu(:, 1:2))
>> hold
>> step(5/(s+5))
>> hold off
>> plot(t, yu(:, 3:4))
```



On voit qu'en régime stationnaire la commande $\mathcal{H}_2$ a presque annulé l'écart entre y et y_d ainsi que l'effet de la perturbation constante d et du bruit de mesure sinusoïdal b . La convergence de y vers y_d est assez rapide (environ 5 sec) et la commande u est peu oscillante avec des valeurs acceptables ne dépassant pas -1.5 et 3.5 . Cependant, en régime transitoire l'erreur entre y et y_d est assez grande. Ceci s'explique par le fait que durant ce régime la référence y_d possède de hautes fréquences que la réponse y ne peut pas suivre puisque nous avons empêché la commande u d'avoir de telles fréquences afin de ne pas exciter les dynamiques non modélisées. Ainsi, par soucis de robustesse, nous avons implicitement toléré une certaine dégradation de la performance. En modifiant les paramètres des filtres des entrées d et b et des sorties e et u , il est possible d'obtenir un meilleur compromis entre la performance et la robustesse.

Remarque : L'ordre du système commandé G de l'exemple précédent n'est que 3. Mais en ajoutant les filtres et $G_0(s)$, l'ordre du système augmenté P est devenu 13 ce qui a produit un organe de commande K d'ordre 13. Cet ordre est trop grand comparé à l'ordre 3 de G mais l'instruction «reduce» de Matlab peut produire un organe K presque équivalent à K ayant un ordre plus petit. Nous traiterons plus loin les principes de la réduction des systèmes linéaires.

5-3 ROBUSTESSE DE $\mathcal{H}_2$

Malheureusement, quand les variables d'état ne sont pas toutes mesurables, la robustesse de la commande $\mathcal{H}_2$ telle qu'elle est définie à la section précédente devient douteuse. En effet, l'exemple suivant montre que la marge de stabilité de la politique $\mathcal{H}_2$ peut être dans certains cas très faible.

Exemple 5-3

Les matrices des équations (5-12) d'un système augmenté P sont les suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma} & 0 \\ \sqrt{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{q} & \sqrt{q} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$C_2 = (1 \ 0), \quad D_{21} = (0 \ 1).$$

La commande $\mathcal{H}_2$ s'obtient en appliquant les équations (5-31) et (5-32) où la matrice K_c se déduit des équations (5-19) et (5-20) et la matrice K_f des équations (5-29) et (5-30). Comme

$$\begin{bmatrix} Q & S^T \\ S & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1^T \\ D_{12}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & D_{12} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} q & q & 0 \\ q & q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right],$$

l'équation (5-20) devient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X + X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - X \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = -q \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et le lecteur peut vérifier que la solution définie positive de cette équation est

$$X = \begin{pmatrix} 2a & a \\ a & a \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a = 2 + \sqrt{q+4}.$$

On déduit de l'équation (5-19) que

$$K_c = (0 \ 1) \begin{pmatrix} 2a & a \\ a & a \end{pmatrix} = (a \ a).$$

De même, comme

$$\begin{bmatrix} W & U^T \\ U & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1^T & D_{21}^T \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} \sigma & \sigma & 0 \\ \sigma & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

l'équation (5-30) devient

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y + Y \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - Y \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y = -\sigma \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et le lecteur peut vérifier que la solution définie positive de cette équation est

$$Y = \begin{pmatrix} b & b \\ b & 2b \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad b = 2 + \sqrt{\sigma+4}.$$

On déduit de l'équation (5-29) que

$$K_f = \begin{pmatrix} b & b \\ b & 2b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix}.$$

En remplaçant les matrices par leurs valeurs dans les équations (5-31) et (5-32) de l'organe de commande, on obtient :

$$\dot{\hat{x}} = \begin{pmatrix} 1-b & 1 \\ -(a+b) & 1-a \end{pmatrix} \hat{x} + \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} m,$$

$$u = -(a \ a) \hat{x}.$$

Pour examiner la robustesse de cette commande, nous supposons que la fonction de transfert entre u et m du système commandé n'est pas exactement $G(s) = C_2(sI - A)^{-1}B_2$ mais $\tilde{G}(s) = (1 + \varepsilon)G(s)$ où ε est l'erreur relative de modélisation. Ceci revient à supposer que la matrice C_2 est effectivement $[1 + \varepsilon \ 0]$ au lieu de $[1 \ 0]$. En posant $k = (1 + \varepsilon)$, les équations d'état du système global s'obtiennent en substituant u par $-(a \ a)\hat{x}$ dans l'équation (5-12a) de $\dot{x}$ et m par $(k \ 0)x + D_{21}w$ dans l'équation (5-32) de $\dot{\hat{x}}$. D'où

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{pmatrix} = \tilde{A} \begin{pmatrix} x \\ \hat{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ K_f D_{21} \end{pmatrix} w$$

avec

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & -a \\ kb & 0 & 1-b & 1 \\ kb & 0 & -(a+b) & 1-a \end{pmatrix}.$$

Le système est stable si les valeurs propres de cette dernière matrice sont toutes à pm. Il est donc nécessaire que les coefficients α_i du polynôme caractéristique

$$\pi(s) = \det(sI - \tilde{A}) = s^4 + \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$$

soient tous positifs. Or, on peut vérifier que

$$\alpha_1 = a + b - 4 + 2\varepsilon ab \quad \text{et} \quad \alpha_0 = 1 - \varepsilon ab.$$

Sachant que $a = 2 + \sqrt{q+4}$ et $b = 2 + \sqrt{\sigma+4}$, si σ et q sont suffisamment grand et $\varepsilon \neq 0$, α_1 aura le signe de εab et α_0 le signe de $-\varepsilon ab$. Par conséquent, pour toute erreur relative de modélisation ε , aussi petite soit-elle, il existe des valeurs pour σ et q à partir desquelles le système réel sera instable. Ceci montre que la marge de stabilité de la commande $\mathcal{H}_2$ peut être dans certains cas très faible.

Dans l'exemple précédent $S = U = 0$ et la commande $\mathcal{H}_2$ obtenue est en fait une commande LQG. Par conséquent, la robustesse en stabilité de la politique LQG est incertaine bien que la politique LQR (c.à.d. quand toutes les variables d'état sont mesurables et $S = U = 0$) soit très robuste indépendamment du système commandé (voir la démonstration vers la fin de la section 3-5). Ceci provient du fait que ces deux politiques n'ont pas le même organe de commande $K(s)$: pour LQR,

$$K(s) = -K_c \quad \text{et} \quad m = x \quad (5-35)$$

tandis que pour LQG, d'après (5-31) et (5-32),

$$K(s) = -K_c (sI - A + B_2 K_c + K_f C_2)^{-1} K_f \quad (5-36)$$

et $m = C_2 x + D_{21} w$.

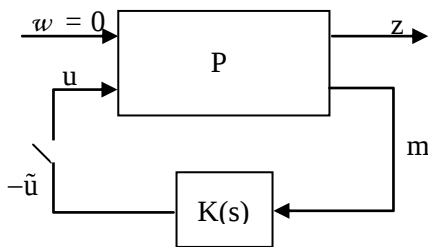


Fig. 5-5 Boucle ouverte en u

La fonction de transfert L de la boucle ouverte liant la commande u au signal de retour $-\tilde{u}$ (fig. 5-5) n'est donc pas la même pour ces deux politiques. Or, comme nous l'avons vu à la section 3-5, la

marge de stabilité dépend de L à travers la sensibilité $S = (I + L)^{-1}$.

Rappelons que le signal de retour LQG, $-\tilde{u} = K_c \hat{x}$, est déduit de celui de LQR, $-\tilde{u} = K_c x$, par la substitution de l'état x par son estimation optimale $\hat{x}$. Or cette estimation n'est correcte que si le modèle du système commandé représente exactement le système réel. Comme cette hypothèse n'est jamais vraie en pratique, les deux commandes LQG et LQR ne seront pas nécessairement voisines.

Au lieu d'estimer l'état x , il est possible de garantir la robustesse de la commande en construisant directement un organe $K(s)$ pour lequel la fonction de transfert entre u et $-\tilde{u}$ est voisine de celle de la politique robuste LQR. Cette technique, appelée récupération de la boucle LQR (loop transfer recovery, LTR), peut se faire par l'instruction « ltrsyn » de Matlab qui emploie une méthode due à Doyle et Stein datée de 1979. Elle consiste à modifier LQG (c.à.d. $\mathcal{H}_2$ avec $S = U = 0$) en remplaçant dans (5-30) la matrice $W = B_1 B_1^T$ par la matrice $W_p = W + \rho B_2 B_2^T$ où ρ est un réel positif. On peut alors démontrer que la fonction de transfert de la boucle ouverte de cette politique tend vers celle de la politique LQR quand $\rho \rightarrow \infty$.

Au lieu de rentrer dans les détails de la méthode de Doyle et Stein, nous préférons établir une autre méthode plus récente proposée en 1991 par Chen, Saberi et Sannuti.

Récupération de la boucle LQR

D'après (5-12a) et pour $w = 0$ la transformée de Laplace de l'état x est liée à celle de u par

$$x = (sI - A)^{-1} B_2 u = \Phi(s) B_2 u.$$

La fonction de transfert de la boucle ouverte entre u et $-\tilde{u} = K_c x$ relative à la commande LQR, est donc

$$L(s) = K_c \Phi(s) B_2. \quad (5-37)$$

D'un autre côté, pour $w = 0$ et $m = C_2 x$, à l'organe de commande

$$K(s) = -K_c (sI - A + K_b C_2)^{-1} K_b, \quad (5-38)$$

qui sera désigné par LTR, correspond la fonction de transfert suivante entre u et $-\tilde{u}$:

$$L_b(s) = K_c [\Phi^{-1}(s) + K_b C_2]^{-1} K_b C_2 \Phi(s) B_2. \quad (5-39)$$

L'objectif est de déterminer la matrice K_b qui minimise l'écart entre L_b et L . Or, tenant compte de (5-37) et (5-39), on a :

$$\begin{aligned} L - L_b &= K_c (\Phi^{-1} + K_b C_2)^{-1} (\Phi^{-1} + K_b C_2) \Phi B_2 \\ &\quad - K_c (\Phi^{-1} + K_b C_2)^{-1} K_b C_2 \Phi B_2 \\ &= E_b \end{aligned}$$

avec

$$E_b = K_c (\Phi^{-1} + K_b C_2)^{-1} B_2. \quad (5-40)$$

La matrice K_b doit donc minimiser la norme de la matrice $E_b(s)$. Considérons dans ce but le système auxiliaire représenté par la figure 5-6

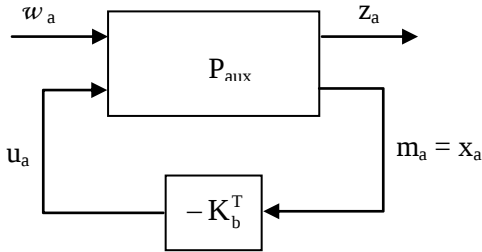


Fig. 5-6 Système auxiliaire pour déterminer K_b

où P_{aux} a pour équations :

$$\begin{aligned} \dot{x}_a &= A^T x_a + K_c^T w_a + C_2^T u_a, \\ z_a &= B_2^T x_a + \Delta u_a, \\ m_a &= x_a, \end{aligned} \quad (5-41)$$

Δ étant une matrice $p \times q$. Sachant que $u_a = -K_b^T x_a$ et tenant compte de (5-40), les équations (5-41) montrent que la matrice de transfert $T_{z_a w_a}$ de w_a à z_a du système de commande auxiliaire vérifie

$$T_{z_a w_a} \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} B_2^T (sI - A^T + C_2^T K_b^T)^{-1} K_c^T = E_b^T$$

Par conséquent, en appliquant les équations (5-19) et (5-20) de la politique $\mathcal{H}_2$ au système auxiliaire (5-41) avec Δ de faible norme, on obtient une matrice K_b

telle que $\|E_b\|_2$ est faible. Ceci exige que l'hypothèse (5-10) soit satisfaite c.à.d que les colonnes des matrices

$$\begin{pmatrix} A^T - j\omega I & C_2^T \\ B_2^T & \Delta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta \quad (5-42)$$

soient indépendantes $\forall \omega$, ce qui implique que le nombre de sorties du système commandé doit être inférieur ou égal au nombre d'entrées. Généralement on choisit Δ de la forme $[\delta I_q; 0]$ avec $|\delta| \ll 1$, le signe de δ étant choisi de sorte à stabiliser la boucle fermée de récupération.

Exemple 5-4

Considérons le système de l'exemple 5-3 avec $\sigma = q = 100$:

```
>> A = [1 1; 0 1]; B1 = [10 0; 10 0]; B2 = [0; 1];
>> C1 = [10 10; 0 0]; D12 = [0; 1];
>> C2 = [1 0]; D21 = [0 1];
>> Q = C1'*C1; R = D12'*D12;
```

Comme $S = 0$, K_c est la matrice de retour d'état de la commande LQR appliquée au couple (A, B_2) avec les matrices de pondération Q et R :

```
>> Kc = lqr(A, B2, Q, R);
```

La fonction de transfert entre u et x est $\Phi(s)B_2$:

```
>> s = tf('s');
>> F = inv(s*eye(2)-A)*B2;
```

La fonction de transfert de la boucle ouverte de la commande LQR est donc

```
>> L = Kc*F;
>> L = minreal(L);
```

D'un autre côté, l'organe de commande $K_{lqg}(s)$ de la politique LQG peut être obtenu à l'aide de l'instruction « h2syn »

```
>> D = [zeros(2,2) D12; D21 0];
>> P = ss(A, [B1 B2], [C1; C2], D)
>> Klqg = h2syn(P, 1, 1);
```

et comme $m = C_2 x$, sa boucle ouverte est

```
>> Lf = -tf(Klqg)*C2*F;
>> Lf = mineral(Lf);
```

La marge de gain et la marge de phase de cette commande sont

```
>> [MGaf,MPf] = margin(Lf);
>> MGf = 20*log10(MGaf), MPf
```

MGf = 0.0582 db et MPf = -0.647°

et on voit bien que ces marges sont très faibles.

Afin de déterminer l'organe de commande (5-38) de récupération, on peut calculer la matrice K_b en appliquant (5-19) et (5-20) au système (5-41) avec $\Delta = \delta = -0.00001$. Mais K_b^T peut aussi se calculer à l'aide de l'instruction « lqr » appliquée au couple (A^T, C_2^T) avec les matrices de pondération $Q_b = B_2 B_2^T$, $R_b = \Delta^T \Delta$ et $S_b = B_2 \Delta$:

```
>> dg = -0.00001;
>> Kbt = lqr(A',C2',B2*B2',dg^2,dg*B2);
>> Kb = Kbt';
```

De (5-38) et (5-39) on déduit la boucle ouverte L_r de la commande LTR :

```
>> Kltr = -Kc*inv(s*eye(2)-A+Kb*C2)*Kb;
>> Lr = -Kltr*C2*F;
```

Pour comparer L_f et L_r à L représentons les courbes de Nyquist de ces 3 fonctions :

```
>> nyquist(L,'k',Lf,'b',Lr,'r')
```

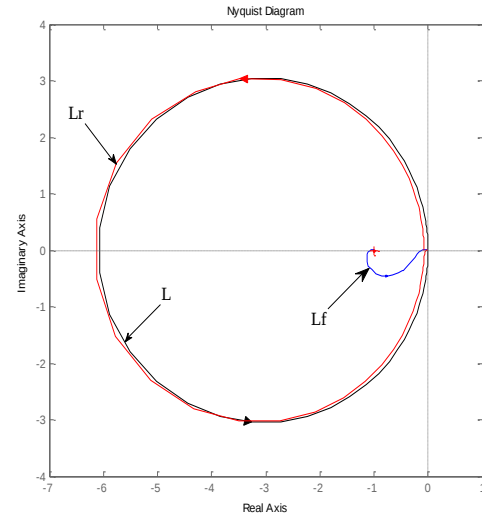
On voit sur la figure que, contrairement à L_f , la boucle L_r est voisine de L et il en est de même de ses marges de gain et de phase :

```
>> [MGa,MP] = margin(L);
>> MG = 20*log10(MGa), MP
```

MG = -15.7 db et MP = 80.56°

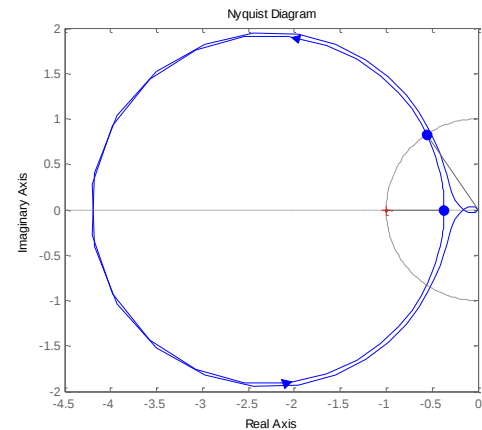
```
>> [MGar,MPr] = margin(Lr);
>> MGr = 20*log10(MGar), MPr
```

MGr = -15.8 db et MP = 76.26°



Pour terminer cet exemple, voyons ce que donne pour $\rho = 10^6$, la méthode de Doyle employée par l'instruction « ltrsyn » de Matlab.

```
>> ro = 10^6;
>> W = B1*B1'; V = D21*D21';
>> G = ss(A,B2,C2,0);
>> Kdyl = ltrsyn(G,Kc,W,V,ro);
>> Ld = Kdyl*C2*F;
>> nyquist(Ld)
```



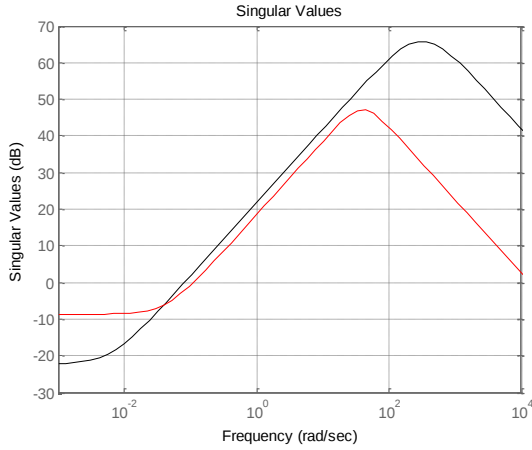
Sur la courbe de Nyquist de la boucle ouverte L_d ainsi obtenue, on peut lire que les marges de gain et de phase sont respectivement 8.67 db et -56.1° .

Remarque : La récupération de la boucle LQR, que ça soit par la méthode de Doyle ou par celle de Chen, conduit généralement à un organe de commande $K(s)$ de gain élevé pouvant amplifier les

bruits de mesure de hautes fréquences et exciter par conséquent les dynamiques non modélisées du système commandé. Pour le voir représentons la valeur singulière des organes de commande $K_{lr}(s)$ et $K_{dy}(s)$ de l'exemple précédent :

>> sigma(Kltr,'k',Kdyl,'r').

La figure suivante montre que ces organes peuvent amplifier de plusieurs dizaines de fois certains harmoniques du bruit de mesure.



La politique $\mathcal{H}_\infty$ que nous allons maintenant développer n'a pas ces inconvénients et nous verrons qu'elle peut être formulée de sorte à assurer la robustesse en stabilité et en performance. Nous commençons par établir les équations générales de cette politique avant de présenter les principales techniques de son utilisation et de montrer leur efficacité.

5-4 POLITIQUE $\mathcal{H}_\infty$

La politique $\mathcal{H}_\infty$ consiste à déterminer un organe de commande stabilisante $K(s)$ qui minimise la norme $\|T_{zw}\|_\infty$ de la fonction de transfert entre l'entrée w et la sortie z du système de commande T (fig. 5-1). Cette minimisation se fait d'une manière indirecte en procédant comme suit :

- 1) On détermine un organe de commande stabilisante $K_i(s)$ tel que $\|T_{zw}\|_\infty \leq \gamma$ où γ est un réel positif donné.
- 2) On diminue progressivement γ et on répète 1) jusqu'à ce que cette opération devienne impossible.

La détermination de $K_\gamma(s)$ découlera d'une propriété fondamentale que nous allons d'abord établir.

Lemmes de la norme- ∞ bornée

Rappelons que si $(A, B, C, 0)$ est une réalisation minimale d'ordre n d'une matrice de transfert strictement propre $G(s)$, $\|G\|_\infty < \gamma$ si et seulement si sa matrice hamiltonienne $(2n \times 2n)$,

$$H = \begin{pmatrix} A & BB^T / \gamma^2 \\ -C^T C & -A^T \end{pmatrix}, \quad (5-43)$$

n'a pas de valeurs propres sur l'axe des imaginaires (voir fin de la section 3-6). En remarquant que, pour

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix},$$

$$J(-J) = I_{2n} \quad \text{et} \quad JHJ = H^T,$$

on déduit que $\det(J) \neq 0$ et que, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \det(\lambda I_{2n} - H) &= \det(\lambda I_{2n} - H^T) = \det(-\lambda JJ - JHJ) \\ &= \det(J) \det(-\lambda I_{2n} - H) \det(J). \end{aligned}$$

Par conséquent, l'opposé $-\lambda$ de toute valeur propre λ de H est aussi une valeur propre de H . Si la matrice H ne possède aucune valeur propre sur l'axe des imaginaires, elle a n valeurs propres à parties réelles strictement positives et n valeurs propres à parties réelles strictement négatives.

Nous savons que la matrice H prend la forme de Jordan quand on passe à la base $B = \{v^1, \dots, v^{2n}\}$ définie par les équations

$$Hv^i = \varepsilon_i v^{i-1} + \lambda_i v^i, \quad \varepsilon_i \in \{0, 1\} \quad (5-44)$$

où les λ_i sont les valeurs propres de H , $\varepsilon_i = 0$ si v^i est un vecteur propre de H relatif à λ_i et $\varepsilon_i = 1$ avec $\lambda_i = \lambda_{i-1}$ pour les autres vecteurs de la base B (voir section 1-4). Ordonnons les vecteurs v^i de B de sorte que ses n premiers vecteurs soient relatifs aux valeurs propres à prn et posons $T = [v^1 \ v^2 \ \dots \ v^n]$. Des équations (5-44), on déduit que

$$HT = TH \quad (5-45)$$

où $\mathcal{H}$ est une matrice ($n \times n$) de la forme de Jordan. Cette matrice $\mathcal{H}$ est évidemment stable et inversible puisque ses valeurs propres (ses éléments diagonaux) sont les λ_i à pm. En écrivant la matrice T , de $2n$ lignes et n colonnes, sous la forme d'une colonne de deux sous-matrices carrées U et V , l'égalité (5-45) devient :

$$H \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \mathcal{H}. \quad (5-46)$$

Voyons s'il existe une matrice $X \geq 0$ telle que $V = XU$. Dans ce cas U sera inversible c.à.d. $Ux = 0 \Rightarrow x = 0$. En effet, comme les colonnes de T sont indépendantes (vecteurs de la base B), on a :

$$\begin{aligned} Ux = 0 &\Rightarrow XUx = Vx = 0 \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} x = Tx = 0 \Rightarrow x = 0. \end{aligned}$$

D'autre part, tenant compte de l'expression (5-43) de H et en posant

$$R = BB^T/\gamma^2 \quad \text{et} \quad Q = C^T C, \quad (5-47)$$

on déduit de (5-46) que la matrice X doit être solution des équations

$$AU + RXU = U\mathcal{H}, \quad (5-48a)$$

$$-QU - A^T XU = XU\mathcal{H}. \quad (5-48b)$$

En multipliant les équations (5-48a) et (5-48b) à droite par U^{-1} , elles deviennent :

$$A + RX = U\mathcal{H}U^{-1}, \quad (5-49a)$$

$$-(Q + A^T X) = XU\mathcal{H}U^{-1}. \quad (5-49b)$$

L'équation (5-49a) montre que la matrice $A + RX$ est stable étant semblable à la matrice $\mathcal{H}$. D'autre part en soustrayant (5-49b) de (5-49a) multipliée à gauche par X , on obtient l'équation de Riccati :

$$A^T X + XA + XRX = -Q \quad (5-50)$$

où R et Q sont, d'après (5-47), des matrices symétriques définies non négatives (≥ 0). Or (5-50)

est équivalente à l'équation de Lyapunov

$$(A + RX)^T X + X(A + RX) = -(Q - X^T RX)$$

où $A + RX$ est stable. Par conséquent, si γ est suffisamment grand de sorte que

$$Q - X^T RX = C^T C - \frac{1}{\gamma^2} X^T BB^T X \geq 0,$$

$X = VU^{-1}$ sera l'unique solution symétrique définie non négative de (5-50).

Ainsi, si $\|G\|_\infty < \gamma$ avec γ suffisamment grand, il existe une matrice (unique) $X \geq 0$ et symétrique qui vérifie (5-50) et telle que $A + RX$ est stable. Montrons que la réciproque est aussi vraie.

S'il existe une matrice $X \geq 0$ et symétrique qui vérifie (5-50) et telle que $A + RX$ stable, on a $\forall \omega$:

$$C^T C = (j\omega I - A)^* X + X(j\omega I - A) - X \frac{BB^T}{\gamma^2} X$$

car $(j\omega I - A)^* = -j\omega I - A^T$. En multipliant l'équation précédente à droite par $(j\omega I - A)^{-1}B$ et à gauche par son adjoint $B^T[(j\omega I - A)^*]^{-1}$, le premier membre devient $G^*(j\omega)G(j\omega)$ et en posant

$$Z(s) = B^T X(sI - A)^{-1} B / \gamma, \quad (5-51)$$

le second membre s'écrit :

$$\begin{aligned} \gamma Z(j\omega) + \gamma Z^*(j\omega) - Z^*(j\omega)Z(j\omega) \\ = \gamma^2 I - [\gamma I - Z^*(j\omega)][\gamma I - Z(j\omega)]. \end{aligned}$$

D'où, pour toute entrée sinusoïdale caractérisée par un vecteur complexe α , on a :

$$\|G(j\omega)\alpha\|^2 = \gamma^2 \|\alpha\|^2 - \|[\gamma I - Z(j\omega)]\alpha\|^2 \quad \forall \omega.$$

Si, $\forall \omega$ et $\forall \alpha \neq 0$, $[\gamma I - Z(j\omega)]\alpha \neq 0$ c.à.d. si $\gamma I - Z$ n'a pas de zéros sur l'axe des imaginaires, l'égalité précédente implique l'inégalité stricte

$$\begin{aligned} \|G(j\omega)\alpha\|^2 &< \gamma^2 \|\alpha\|^2 \quad \forall \omega, \forall \alpha \neq 0, \\ \Leftrightarrow \|G\|_\infty &< \gamma. \end{aligned} \quad (5-52)$$

Or, d'après (5-51), la réalisation de $\gamma I - Z$ est

$$\gamma I - Z \leftarrow \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -B^T X / \gamma & \gamma I \end{array} \right)$$

et celle de son inverse est

$$(\gamma I - Z)^{-1} \leftarrow \left(\begin{array}{c|c} A + BB^T X / \gamma^2 & B / \gamma \\ \hline B^T X / \gamma^2 & I / \gamma \end{array} \right)$$

(voir formule (1-25)). Les zéros de $\gamma I - Z$ sont donc les valeurs propres de la matrice stable $A + BB^T X / \gamma^2 = A + RX$, d'où aucun de ces zéros n'appartient à l'axe des imaginaires et l'inégalité (5-52) est vraie. On a donc le lemme suivant.

Lemme 1 : $\|G\|_{\infty} < \gamma$ si et seulement s'il existe une matrice $X \geq 0$ et symétrique qui vérifie l'équation de Riccati (5-50) et telle que $A + RX$ stable.

Le dual de ce lemme s'obtient en remarquant que $\|G\|_{\infty} = \|G^*\|_{\infty}$ puisque $G(j\omega)$ et $G^*(j\omega)$ ont les mêmes valeurs singulières. Or, comme la réalisation de G^* est $(A^T, C^T, B^T, 0)$, par analogie avec (5-43), $\|G^*\|_{\infty} < \gamma$ si et seulement si la matrice

$$H_d = \left(\begin{array}{cc} A^T & C^T C / \gamma^2 \\ \hline -BB^T & -A \end{array} \right)$$

n'a pas de valeurs propres sur l'axe des imaginaires. Aussi par analogie avec (5-43) et (5-47), on déduit que l'équation de Riccati associée à $G^*(s)$ s'obtient en remplaçant dans (5-50) A par A^T et R et Q respectivement par

$$R_d = C^T C / \gamma^2 \quad \text{et} \quad Q_d = BB^T. \quad (5-53)$$

On obtient ainsi une autre équation de Riccati :

$$AY + YA^T + YR_d Y = -Q_d. \quad (5-54)$$

où Y est la matrice inconnue. D'autre part, à la place de la matrice stable $A + RX$ on a maintenant $A^T + R_d Y$ de transposée $A + YR_d$, d'où le lemme suivant :

Lemme 2 : $\|G\|_{\infty} < \gamma$ si et seulement s'il existe une matrice $Y \geq 0$ et symétrique qui vérifie l'équation de Riccati (5-54) et telle que $A + YR_d$ stable.

À partir des lemmes 1 et 2, nous allons établir les équations de la politique $\mathcal{H}_{\infty}$. Comme nous avons procédé pour la politique $\mathcal{H}_2$, nous commençons par supposer que toutes les variables d'état sont mesurables et que l'organe de commande est une matrice constante $-K_c$. Le cas le plus fréquent où l'état doit être estimé sera traité ultérieurement.

Matrice de commande K_c

En supposant que toutes les variables d'état sont mesurables, que le signal mesuré est $m = x$ et que la commande est de la forme $u = -K_c x$ avec K_c une matrice constante, les équations du système de la figure 5-1 deviennent les suivantes (voir (5-13)) :

$$\dot{x} = (A - B_2 K_c) x + B_1 w, \quad (5-55)$$

$$z = (C_1 - D_{12} K_c) x. \quad (5-56)$$

Soit $T_{zw}(s)$ la matrice de transfert entre l'entrée w et la sortie z de ce système. L'objectif est de trouver une matrice stabilisante K_c pour laquelle $\|T_{zw}\|_{\infty} < \gamma$, γ étant un nombre positif donné.

D'après le lemme 1, $\|T_{zw}\|_{\infty} < \gamma$ si et seulement s'il existe une matrice $X \geq 0$ et symétrique qui stabilise

$$A_r = A - B_2 K_c + \frac{B_1 B_1^T X}{\gamma^2} \quad (5-57)$$

et qui est solution de l'équation de Riccati

$$\begin{aligned} (A - B_2 K_c)^T X + X(A - B_2 K_c) + \frac{X B_1 B_1^T X}{\gamma^2} \\ = -(C_1 - D_{12} K_c)^T (C_1 - D_{12} K_c). \end{aligned} \quad (5-58)$$

Comme nous l'avons fait pour la politique $\mathcal{H}_2$, posons

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1^T \\ D_{12}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & D_{12} \end{bmatrix}.$$

Avec ces notations et en arrangeant ses termes, l'équation (5-58) s'écrit :

$$A^T X + XA + \frac{XB_1 B_1^T X}{\gamma^2} - (XB_2 + S)K_c \quad (5-59)$$

$$= -Q - K_c^T [RK_c - (B_2^T X + S^T)].$$

En choisissant pour K_c la même expression (5-19) que la commande $\mathcal{H}_2$:

$$K_c = R^{-1} (B_2^T X + S^T), \quad (5-60)$$

on annule le second terme du second membre de (5-59) et on obtient l'équation de Riccati suivante :

$$\boxed{A_c^T X + XA_c - X \left(B_2 R^{-1} B_2^T - \frac{B_1 B_1^T}{\gamma^2} \right) X} \quad (5-61)$$

$$= -Q + S R^{-1} S^T$$

où $A_c = A - B_2 R^{-1} S^T$.

Ainsi, pour la matrice de retour d'état K_c définie par (5-60), $\|T_{zw}\|_{\infty} < \gamma$ si et seulement s'il existe une matrice $X \geq 0$ et symétrique qui vérifie (5-61) et pour laquelle la matrice A_r définie par (5-57) est stable. À noter que quand $\gamma \rightarrow \infty$, (5-61) se ramène à l'équation de Riccati (5-20) de la politique $\mathcal{H}_2$.

Il est évident que pour tout $\gamma_1 > \gamma$, $\|T_{zw}\|_{\infty} < \gamma \Rightarrow \|T_{zw}\|_{\infty} < \gamma_1$ et la matrice A_r relative à γ_1 sera aussi stable. Comme $A - B_2 K_c = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} (A_r)$, la stabilité de A_r implique celle du système de commande d'équations (5-55) et (5-56).

À noter que si $S = 0$, les équations (5-60) et (5-61) se ramènent aux équations de la politique MINIMAX (2-82b) et (2-83) obtenues en minimisant l'indice de performance (2-76). De même, nous allons montrer que la matrice de retour d'état K_c définie par (5-60) minimise un indice de performance, semblable à (2-76) mais qui se déduit de l'objectif $\|T_{zw}\|_{\infty} < \gamma$. Ceci nous aidera en même temps à traiter le cas général où les variables d'état ne sont pas toutes mesurables et doivent être estimées à partir d'un signal mesurable m .

Indice de performance

Sachant que

$$\|T_{zw}\|_{\infty} = \sup_{w \neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} \quad \text{avec} \quad \|f\|_2^2 = \int_0^{\infty} f^T(t)f(t)dt$$

et $z(t)$ est la réponse de T à $w(t)$ à partir d'un état initial nul, on a l'équivalence suivante :

$$\|T_{zw}\|_{\infty} < \gamma \Leftrightarrow \int_0^{\infty} (z^T z - \gamma^2 w^T w) dt < 0. \quad (5-62)$$

On peut aussi écrire que l'inégalité $\|T_{zw}\|_{\infty} < \gamma$ est équivalente à

$$J = \int_0^{\infty} [z^T z - \gamma^2 w^T w + \frac{d}{dt} (x^T X x)] dt < 0 \quad (5-63)$$

car la stabilité de (5-55) et $w(\infty) = 0$ ($w \in \mathcal{L}_2$) impliquent $x(\infty) = 0$ et comme $x(0) = 0$, on a :

$$\int_0^{\infty} \frac{d}{dt} (x^T X x) dt = x^T X x \Big|_0^{\infty} = 0.$$

De $z = C_1 x + D_{12} u$ et $\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u$ on tire

$$z^T z = x^T Q x + 2x^T S u + u^T R u$$

et

$$\frac{d}{dt} (x^T X x) = \dot{x}^T X x + x^T X \dot{x}$$

$$= x^T (A^T X + XA)x + 2x^T X (B_1 w + B_2 u).$$

D'où, tenant compte de (5-60), $XB_2 = K_c^T R - S$ et

$$z^T z + \frac{d}{dt} (x^T X x)$$

$$= x^T (A^T X + XA + Q)x + u^T R u \quad (5-64)$$

$$+ 2x^T K_c^T R u + 2x^T X B_1 w.$$

Mais, en arrangeant les termes de (5-61) sachant que $A_c = A - B_2 R^{-1} S^T$ et $XB_2 = K_c^T R - S$, on obtient :

$$\begin{aligned}
& A^T X + XA + Q \\
&= SR^{-1}B_2^T X + SR^{-1}S^T \\
&\quad + XB_2 R^{-1}S^T + XB_2 R^{-1}B_2^T X - X \frac{B_1 B_1^T}{\gamma^2} X \\
&= SK_c + XB_2 K_c - X \frac{B_1 B_1^T}{\gamma^2} X \\
&= K_c^T R K_c - X \frac{B_1 B_1^T}{\gamma^2} X. \tag{5-65}
\end{aligned}$$

Enfin, en remplaçant cette expression dans (5-64), on arrive à l'égalité

$$\begin{aligned}
& z^T z - \gamma^2 w^T w + \frac{d}{dt} (x^T X x) \\
&= x^T K_c^T R K_c x + u^T R u + 2x^T K_c^T R u \\
&\quad - x^T X \frac{B_1 B_1^T}{\gamma^2} X x - \gamma^2 w^T w + 2x^T X B_1 w \\
&= (K_c x + u)^T R (K_c x + u) - \left\| \frac{B_1^T X}{\gamma} x - \gamma w \right\|^2. \tag{5-66}
\end{aligned}$$

Par conséquent, R étant définie positive, l'indice J donné par (5-63) est le plus négatif (le gain $\|T_{zw}\|_\infty$ est le plus petit) si, pour tout x , la commande est

$$u = -K_c x. \tag{5-67}$$

La matrice K_c définie par (5-60) est donc optimale. Sous la commande optimale (5-67), J s'annule ($\|T_{zw}\|_\infty = \gamma$) quand l'entrée est liée à l'état par la relation

$$w = \gamma^{-2} B_1^T X x = W_p x \tag{5-68}$$

et c'est donc la pire des entrées (worst case). À noter que les matrices K_c et W_p dépendent de γ car X est une solution de (5-61).

Il est évident que la commande (5-67) n'est valable que si l'état x est disponible. Dans la cas général où l'état doit être estimé par un observateur comportant une matrice de filtrage K_f , la commande u s'obtient en remplaçant dans (5-67) x par son estimation $\hat{x}$. Avec cette nouvelle commande, $\|T_{zw}\|_\infty$ peut

augmenter car le terme $v = K_c x + u = K_c (x - \hat{x})$ qui apparaît dans (5-66) ne sera pas nécessairement nul. Cependant un bon choix de K_f minimisera la norme de v .

Estimateur et filtrage

De (5-63) et (5-66), on tire l'équivalence

$$\|T_{zw}\|_\infty < \gamma \Leftrightarrow J = \int_0^\infty (v^T R v - \gamma^2 \|d\|_2^2) dt < 0 \tag{5-69}$$

où $d = w - \gamma^{-2} B_1^T X x$ et $v = K_c x + u$.

Posons $q = D_{12} v$. Comme $R = D_{12}^T D_{12}$, l'inégalité (5-69) se ramène à la suivante :

$$\|T_{qd}\|_\infty = \sup_{d \neq 0} \frac{\|q\|_2}{\|d\|_2} < \gamma. \tag{5-70}$$

Or, en remplaçant w par $d + \gamma^{-2} B_1^T X x$ dans les équations d'état (5-12a) et (5-12c) du système augmenté P , on obtient les équations liant les signaux u et d aux signaux v et m :

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= (A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X) x + B_1 d + B_2 u \\
v &= K_c x + u \\
m &= (C_2 + \gamma^{-2} D_{21} B_1^T X) x + D_{21} d.
\end{aligned} \tag{5-71}$$

L'équation de l'estimation $\hat{x}$ de x se déduit des équations (5-71) en annulant d , c.à.d. en supposant que l'entrée w est la pire, et en ajoutant un terme correcteur. On définit donc l'observateur par l'équation

$$\dot{\hat{x}} = (A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X) \hat{x} + B_2 u + K_f (m - \hat{m}) \tag{5-72}$$

$$\text{où } \hat{m} = (C_2 + \gamma^{-2} D_{21} B_1^T X) \hat{x}$$

et K_f est une matrice pour laquelle la condition (5-70) doit être satisfaite. Les équations d'état liant les signaux d et $q = D_{12} v$ de la condition (5-70) se déduisent de (5-71) et (5-72) en faisant intervenir un nouveau vecteur d'état $\varepsilon = x - \hat{x}$. Sachant que $u = -K_c \hat{x}$, on obtient par soustraction :

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} &= [A + \gamma^{-2}(B_1 - K_f D_{21})B_1^T X - K_f C_2] \varepsilon \\ &\quad + (B_1 - K_f D_{21})d \\ q &= D_{12} K_c \varepsilon\end{aligned}\quad (5-73)$$

D'après le lemme 2, $\|T_{qd}\|_\infty < \gamma$ si et seulement s'il existe une matrice $Y \geq 0$ et symétrique qui vérifie

$$\begin{aligned}&[A + \gamma^{-2}(B_1 - K_f D_{21})B_1^T X - K_f C_2]Y \\ &+ Y[A + \gamma^{-2}(B_1 - K_f D_{21})B_1^T X - K_f C_2]^T \\ &\quad + \gamma^{-2}YK_c^T R K_c Y \\ &= -(B_1 - K_f D_{21})(B_1 - K_f D_{21})^T\end{aligned}\quad (5-74)$$

et qui stabilise la matrice

$$A_s^1 = [A + \gamma^{-2}(B_1 - K_f D_{21})B_1^T X - K_f C_2] + \gamma^{-2}YK_c^T R K_c. \quad (5-75)$$

En arrangeant les termes de l'équation (5-74) et en posant, comme pour la commande $\mathcal{H}_2$,

$$\begin{bmatrix} W & U \\ U^T & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1^T & D_{21}^T \end{bmatrix},$$

elle devient

$$\begin{aligned}&[A + \gamma^{-2}WX]Y + Y[A + \gamma^{-2}WX]^T \\ &- K_f [C_2 Y + U^T (I + \gamma^{-2}XY)] + \gamma^{-2}YK_c^T R K_c Y \\ &= -W + [YC_2^T + (I + \gamma^{-2}XY)U - K_f V]K_f^T.\end{aligned}\quad (5-76)$$

Comme nous l'avons fait pour l'équation (5-59), choisissons K_f de sorte à annuler le second terme du second membre de (5-76) :

$$K_f = [YC_2^T + (I + \gamma^{-2}XY)U]V^{-1}. \quad (5-77)$$

En plus, d'après (5-65), on a :

$$K_c^T R K_c = A^T X + XA + C_1^T C_1 + \gamma^{-2}XWX. \quad (5-65')$$

En substituant K_f et $K_c^T R K_c$ par leurs expressions dans (5-76) on aboutit, après quelques manipulations algébriques simples, à l'équation de Riccati suivante :

$$\boxed{A_f Y_\infty + Y_\infty A_f^T - Y_\infty \left(C_2^T V^{-1} C_2 - \frac{C_1^T C_1}{\gamma^2} \right) Y_\infty = -W + UV^{-1}U^T} \quad (5-78)$$

où $A_f = A - UV^{-1}C_2$
et $Y_\infty = Y(I + \gamma^{-2}XY)^{-1}.$

Cette dernière équation est équivalente à

$$Y = (I - \gamma^{-2}Y_\infty X)^{-1} Y_\infty \quad (5-79)$$

si $(I - \gamma^{-2}Y_\infty X)$ est inversible. En plus, il faut que Y soit définie non négative (≥ 0). Ces conditions seront satisfaites si

$$Y_\infty \geq 0 \quad \text{et} \quad \rho(Y_\infty X) < \gamma^2 \quad (5-80)$$

où ρ désigne le rayon spectral.

Maintenant, il est facile de vérifier que l'expression (5-77) de K_f peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}&\boxed{K_f = ZL} \\ \text{avec} &\quad \boxed{Z = (I - \gamma^{-2}Y_\infty X)^{-1}} \\ \text{et} &\quad \boxed{L = (Y_\infty C_2^T + U)V^{-1}}.\end{aligned}\quad (5-81)$$

Par des calculs similaires, on peut déduire de (5-75), tenant compte de (5-65'), (5-78) et (5-80), que

$$Z^{-1}A_s^1 Z = A - LC_2 + \gamma^{-2}Y_\infty C_1^T C_1 = A_s. \quad (5-82)$$

La condition de stabilité de la matrice A_s^1 se ramène donc à celle de sa semblable A_s .

Ainsi, s'il existe $X \geq 0$ et symétrique qui vérifie l'équation de Riccati (5-61) et qui stabilise la matrice A_r définie par (5-57) et s'il existe une matrice symétrique Y_∞ solution de l'équation de Riccati (5-78) qui satisfait les conditions (5-80) et stabilise la matrice A_s définie par (5-82), la commande qui assure l'inégalité $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ est donnée par

$$u = -K_c \hat{x}, \quad (5-83)$$

K_c étant la matrice de commande (5-60) et $\hat{x}$ est la solution de (5-72). Cette dernière équation peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\dot{\hat{x}} = [A + (B_1 - K_f D_{21})W_p - B_2 K_c - K_f C_2] \hat{x} + K_f m \quad (5-84)$$

où les matrices K_f et W_p sont respectivement données par (5-81) et (5-68).

En comparant (5-84) et (5-32), on constate que l'observateur de la politique $\mathcal{H}_{\infty}$ diffère de celui de la politique $\mathcal{H}_2$ par le terme $(B_1 - K_f D_{21})W_p$ qui fait intervenir dans l'estimation de l'état x l'effet de la pire entrée $W_p x$. Ceci rend $\mathcal{H}_{\infty}$ moins sensible aux variations des entrées exogènes que $\mathcal{H}_2$.

Exemple 5-5

Nous avons vu à l'exemple 5-3 que la robustesse de la politique $\mathcal{H}_2$ appliquée au système nominal défini par les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma} & 0 \\ \sqrt{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{q} & \sqrt{q} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$C_2 = (1 \ 0), \quad D_{21} = (0 \ 1)$$

est très faible quand σ et q sont grands. Par exemple, pour $\sigma = q = 60$, le système de commande par $\mathcal{H}_2$ sera instable pour toute erreur relative de modélisation $\varepsilon > 0.01$. D'autre part, bien que la technique LRT récupère la grande robustesse de la politique LQR, elle produit un organe de commande de grand gain pouvant amplifier certaines harmoniques du bruit de mesure (voir fin de l'exemple 5-4). Voyons ce que donne la politique $\mathcal{H}_{\infty}$ qui, pour un gain γ fixé, s'obtient en appliquant les équations (5-83) et (5-84). La matrice K_c de ces équations se déduit de (5-60) et (5-61), la matrice K_f des équations (5-78) et (5-79) et la matrice W_p est donnée par (5-68). En général, il existe une valeur minimum $\gamma_{\min}$ telle que pour $\gamma \geq \gamma_{\min}$ les conditions

de validité de $\mathcal{H}_{\infty}$ seront satisfaites. La politique $\mathcal{H}_{\infty}$ est d'autant plus performante que $\gamma_{\min}$ est petit et que γ est voisin de $\gamma_{\min}$. En appliquant itérativement les équations mentionnées ci-dessus, la fonction «hinfsyn(P,q,p)» de Matlab recherche pour le système augmenté P un organe de commande K à q entrées et p sorties qui correspond à un gain γ suffisamment voisin de $\gamma_{\min}$.

Pour l'exemple considéré avec $\sigma = q = 60$, les équations d'état d'un organe de commande K presque optimal et celles de la fonction de transfert correspondante T_{zw} ainsi que le gain γ de celle-ci s'obtiennent en écrivant les instructions suivantes :

```
>> r = sqrt(60);
>> A = [1 1; 0 1]; B1 = [r 0; r 0]; B2 = [0; 1];
>> C1 = [r r; 0 0]; D12 = [0; 1];
>> C2 = [1 0]; D21 = [0 1];
>> B = [B1 B2]; C = [C1; C2];
>> D = [zeros(2,2) D12; D21 0];
>> P = ss(A,B,C,D);
>> [K,T,gam,info] = hinfsyn(P,1,1);
>> Kt = tf(K)
```

$$Kt = \frac{-3.624e05 s + 9.155e04}{s^2 + 6005 s + 9.306e04} \quad \text{gam} = 60.5046.$$

Supposons maintenant que la fonction de transfert entre u et m du système commandé n'est pas exactement $G(s)$ mais $\tilde{G}(s) = (1 + \varepsilon)G(s)$ où ε est l'erreur relative de modélisation. Ceci revient à remplacer $C_2 = [1 \ 0]$ par $\tilde{C}_2 = [1 + \varepsilon \ 0]$. En désignant par A_f , B_f , C_f , D_f les matrices des équations d'état de K, les équations d'état de la boucle fermée s'écrivent :

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 \overbrace{[C_f \hat{x} + D_f (\tilde{C}_2 x + D_{21} w)]}^u$$

$$\dot{\hat{x}} = A_f \hat{x} + B_f \underbrace{(\tilde{C}_2 x + D_{21} w)}_m$$

Ce système est stable si les parties réelles des valeurs propres de la matrice

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A + B_2 D_f \tilde{C}_2 & B_2 C_f \\ B_f \tilde{C}_2 & A_f \end{pmatrix}$$

ont toutes des parties réelles négatives. Le résultat des instructions suivantes montrent que le système devient instable à partir de $\epsilon = 0.0165$. La marge de stabilité est encore faible mais améliorée de 65% par rapport à la politique $\mathcal{H}_2$.

```
>> [Af,Bf,Cf,Df] = ssdata(K);
>> Ct2=[1.0165 0];
>> At = A+B2*Df*Ct2; Bt = B2*Cf;
>> Ct = Bf*Ct2; Dt = Af;
>> Ach=[At,Bt;Ct,Dt];
>> lam = eig(Ach)
```

```
lam =
 1.0e+03 *
-5.989654965737141
-0.010546062770844
-0.002980426671615
-0.000000013458790
```

5-5 MODELAGE ROBUSTE

La technique de modelage robuste (loop shaping) permet souvent d'obtenir un système de commande à la fois performant et robuste. Elle consiste

- 1) à donner aux valeurs singulières de la boucle ouverte représentées dans le plan de Bode un profil assurant une bonne performance (voir section 3-4),
- 2) à stabiliser la boucle fermée par commande $\mathcal{H}_{\infty}$.

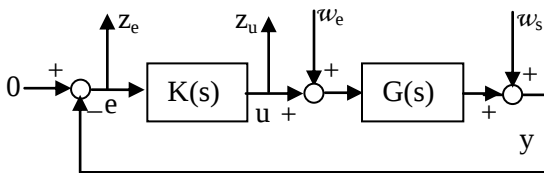


Fig. 5-7 Effet des perturbations sur l'erreur et la commande

Pour éclaircir cette technique, considérons le système de la figure 5-7 et cherchons à optimiser sa performance en minimisant l'effet des perturbations w_e et w_s sur l'erreur $e = z_e$ et la commande $u = z_u$. Ceci revient à minimiser la norme $\mathcal{H}_{\infty}$ de la matrice de transfert T_{zw} entre l'entrée $w = [w_s ; w_e]$ et la sortie $z = [z_u ; z_e]$. Or, il est facile de voir que

$$T_{zw}(s) = - \begin{pmatrix} KS & KSG \\ S & SG \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} K \\ I \end{pmatrix} S(I \ G). \quad (5-85)$$

On sait que par itération de la politique $\mathcal{H}_{\infty}$ détaillée ci-dessus, le gain $\gamma = \|T_{zw}\|_{\infty}$ tend vers un minimum $\gamma_{\min}$. Cependant McFarlan et Glover ont établi que, dans le cas considéré et pour $G = (A, B, C, 0)$, la valeur minimale exacte de $\|T_{zw}\|_{\infty}$ s'obtient sans itération en appliquant la formule

$$\gamma_{\min} = [I + \rho(YX)]^{1/2} \quad (5-86)$$

où les matrices X et Y sont les solutions définies positives des équations de Riccati

$$\begin{aligned} A^T X + AX - XBB^T X &= -C^T C, \\ AY + YA^T - YC^T CY &= -BB^T. \end{aligned}$$

Si G n'est pas strictement propre ($D \neq 0$), la formule (5-86) reste valable mais les équations de X et Y se compliquent.

McFarlan et Glover ont aussi démontré que, pour l'organe de commande $K(s)$ qui minimise $\gamma = \|T_{zw}\|_{\infty}$, l'écart entre les valeurs singulières de G et celles de $L = KG$ décroît avec $\gamma_{\min}$. Or, d'après les conditions de la section 3-4 concernant la bonne performance, $\gamma_{\min}$ sera petit et $\sigma_i(G) \approx \sigma_i(L)$ si $\underline{\sigma}(G)$ est grand à basses fréquences, $\overline{\sigma}(G)$ est petit à hautes fréquences et la fréquence de coupure est voisine de la bande passante désirée de la boucle fermée. Dans le cas où G n'a pas ces propriétés, on introduit avant G un pré-compensateur W_1 et après G un post-compensateur W_2 de sorte que le profil de $G_d = W_2 G W_1$ soit satisfaisant. En général, avec le seul pré-compensateur W_1 ($W_2 = I$), on arrive à une allure acceptable de $G_d = G W_1$. En remplaçant dans (5-85) G par G_d et en minimisant $\|T_{zw}\|_{\infty}$ par la commande $\mathcal{H}_{\infty}$, on obtient une bonne performance à condition que les compensateurs W_1 et W_2 sont bien choisis.

Pour montrer que la technique de modelage précédente conduit en même temps à une stabilité robuste, remplaçons dans (5-85) G par la factorisation première normalisée $M^{-1}N$ de G_d . On obtient :

$$T_{zw}(s) = \begin{pmatrix} K \\ I \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} I & M^{-1}N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K \\ I \end{pmatrix} S M^{-1} \begin{pmatrix} M & N \end{pmatrix}$$

Comme $NN^* + MM^* = I$, on a :

$$T_{zw}(s) \cdot T_{zw}^*(s) = \begin{pmatrix} KSM^{-1} \\ SM^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} KSM^{-1} \\ SM^{-1} \end{pmatrix}^*$$

d'où $\|T_{zw}(s)\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} KSM^{-1} \\ SM^{-1} \end{pmatrix} \right\|_\infty$.

En se référant aux équations (4-38) et (4-39) de la section 4-3, on déduit que la marge de stabilité est d'autant plus grande que $\gamma_{\min}$ est petit. En général, $\gamma_{\min} \leq 3$ est jugée satisfaisante.

Pour une fonction de transfert G_d d'allure désirée (choisie souvent de la forme ω_c/s), la fonction «loopsyn(G, G_d)» de Matlab produit une matrice de transfert W telle que les valeurs singulières de $G_s = GW$ soient voisines de celles de G_d (sauf pour des fréquences $\omega \gg \omega_c$) et un organe de commande K_s qui minimise $\|T_{zw}\|_\infty$ quand G est remplacé par G_s . L'organe de commande de G sera donc $K = K_s W$. La matrice de modelage W est ajustée par Matlab de sorte que les inégalités suivantes soient vérifiées :

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}(GK) &\geq \sigma(G_d) / \gamma_{\min} & \text{pour } \omega < \omega_c, \\ \overline{\sigma}(GK) &\leq \sigma(G_d) \cdot \gamma_{\min} & \text{pour } \omega > \omega_c, \end{aligned}$$

ω_c étant la fréquence de coupure de G_d . Correspondant à l'organe de commande K , la fonction «loopsyn» fournit en plus le minimum $\gamma_{\min}$ de $\|T_{zw}\|_\infty$ ainsi que la fonction de transfert $T = (I + GK)^{-1} GK$ de la boucle fermée. L'ordre de K_s est égal à celui de G_s d'où l'ordre de K est égal à l'ordre de G plus 2 fois l'ordre de W . Comme ce dernier est généralement grand, il en est de même de l'ordre de K qu'on peut réduire par la fonction «reduce».

Exemple 5-6.

Pour commander par modelage robuste le système suivant :

$$G(s) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-s^2 + 3}{(s+1)^2(s+2)} \\ \frac{3s+1}{(s+2)(s-1)} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

il suffit d'écrire :

```
>> s = tf('s');
>> G=[0 (-s^2+3)/((s+1)^2*(s+2))
      (3*s+1)/((s+2)*(s-1)) 1/(s+2)];
>> [K,T,gg,info]=loopsyn(G,2/s); % G_d = 2/s
>> Krd=reduce(K,6);
>> gg
```

$$\gamma_{\min} = gg = 2.7857.$$

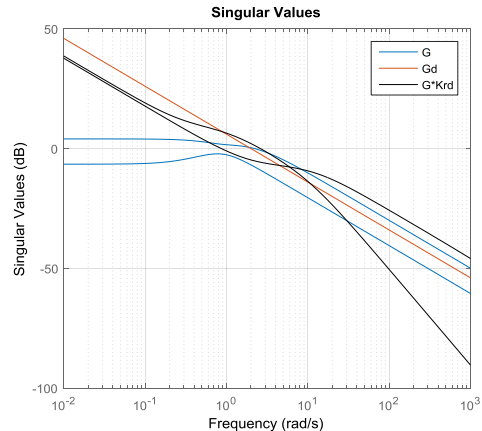
La marge de stabilité est donc $\varepsilon = 1/\gamma_{\min} = 0.35$ c.à.d. la boucle fermée reste stable tant que l'erreur relative de modélisation ne dépasse pas 35 %. Dans cet exemple, la fréquence de coupure ω_c de G_d est choisie égale à 2 rd/sec. En augmentant ω_c la performance peut s'améliorer mais la robustesse diminue. D'autre part, pour simplifier l'implémentation de l'organe de commande nous avons réduit son ordre de $n(K) = 13$ à $n(K_{rd}) = 6$ (celui de G). La figure suivante obtenue par

```
>> sigma(G,'c',2/s,'r',G*Krd,'k')
```

montre en décibels que

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}(GK_{rd}) &\geq \sigma(G_d) / \gamma_{\min} & \text{pour } \omega < \omega_c, \\ \overline{\sigma}(GK_{rd}) &\leq \sigma(G_d) \cdot \gamma_{\min} & \text{pour } \omega > \omega_c. \end{aligned}$$

Ceci justifie la réduction de $n(K) = 13$ à $n(K_{rd}) = 6$.



5-6 RÉDUCTION D'ODRE

Les politiques $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_{\infty}$ et la méthode de modelage robuste conduisent à un organe de commande dont l'ordre est égal à l'ordre du procédé plus les ordres des filtres d'entrées et de sorties ou ceux des compensateurs de modelage. Ceci peut aboutir à un organe de commande d'ordre élevé ce qui complique l'implémentation de cet organe et retarde sa réponse. Il importe donc de diminuer l'ordre d'un système sans trop modifier son comportement. La méthode la plus employée pour atteindre ce but, commence par transformer les équations d'état du système sous une forme dite balancée.

Réalisation balancée. On dit qu'une réalisation $\Gamma_b = (A_b, B_b, C_b, D_b)$ est balancée si ses grammiens de contrôlabilité P_b et d'observabilité Q_b sont égaux à une même matrice diagonale Σ .

Rappelons que les grammiens de contrôlabilité et d'observabilité d'une réalisation $\Gamma = (A, B, C, D)$ sont respectivement définis par

$$P = \int_0^{\infty} e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau, \quad Q = \int_0^{\infty} e^{A^T \tau} C^T C e^{A \tau} d\tau \quad (5-87)$$

(voir sections 1-4 et 1-5). Si A est stable et Γ est minimale, P et Q sont les solutions définies positives des équations de Liapunov

$$AP + PA^T = -BB^T, \quad (5-88)$$

$$A^T Q + QA = -C^T C. \quad (5-89)$$

Montrons que la réalisation Γ est équivalente à une réalisation balancée Γ_b c.à.d. qu'il existe une matrice de transformation T entre Γ et Γ_b telle que

$$A_b = T^{-1}AT, \quad B_b = T^{-1}B \quad \text{et} \quad C_b = CT.$$

Sachant que $e^{A\tau} = \sum (t^k / k!) A^k$, on déduit des définitions (5-87) les relations suivantes :

$$P_b = T^{-1}P(T^T)^{-1} \quad \text{et} \quad Q_b = T^T Q T \quad (5-90)$$

$$\text{et puisque} \quad P_b = Q_b = \Sigma, \quad (5-91)$$

$$\text{on a :} \quad P_b Q_b = \Sigma^2 = T^{-1} P Q T. \quad (5-92)$$

L'égalité (5-92) montre que les colonnes de la matrice T sont des vecteurs propres de PQ dont les modules doivent être choisis de sorte à satisfaire les égalités (5-91). Dans ce but, écrivons la matrice symétrique définie positive Q sous la forme $R^T R$ (décomposition de Cholesky), R étant une matrice triangulaire inversible. L'égalité (5-92) devient :

$$T^{-1} P R^T R T = (R T)^{-1} R P R^T (R T) = \Sigma^2. \quad (5-93)$$

Cette équation signifie que la matrice $R P R^T$ est équivalente à la matrice diagonale Σ^2 et comme elle est symétrique et définie positive, il existe une transformation orthonormée U telle que

$$U^T R P R^T U = \Sigma^2 \quad \text{avec} \quad U^T U = I. \quad (5-94)$$

Mais, d'après (5-90) et (5-91), $P = T \Sigma T^T$, d'où l'équation (5-94) peut s'écrire sous la forme :

$$(U^T R T \Sigma^{1/2})(\Sigma^{1/2} T^T R^T U) = \Sigma^2.$$

Cette égalité sera vérifiée si $U^T R T \Sigma^{1/2} = \Sigma$ c.à.d. si

$$T = R^{-1} U \Sigma^{1/2} \quad \text{ou} \quad T^{-1} = \Sigma^{-1/2} U^T R. \quad (5-95)$$

Avec cette transformation et tenant compte de (5-94) et de $Q = R^T R$, il est facile de vérifier les égalités (5-91).

Les éléments σ_i de $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ sont appelés les *valeurs singulières de Hankel* (vsh). Si la réalisation Γ est stable et minimale et en supposant que les variables d'état de Γ_b sont ordonnées selon le sens décroissant des σ_i , on a :

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0.$$

La fonction «balreal» de Matlab produit la réalisation balancée d'un système et donne ses valeurs singulières de Hankel.

Exemple 5-7

Pour déterminer une réalisation balancée et obtenir les valeurs singulières de Hankel de

$$G(s) = \frac{25(s-2)}{(s+1)^2(s+5)(s^2+2s+5)}$$

et puis calculer les gramiens P_b et Q_b , on écrit les instructions suivantes :

```
>> G = zpk(2,[-1 -1 -5 -1+2*j -1-2*j],25);
>> [Gb,vsh] = balreal(G);
>> [Ab,Bb,Cb,Db] = ssdata(Gb);
>> Pb = lyap(Ab,Bb*Bb');
>> Qb = lyap(Ab',Cb'*Cb)
```

où vsh est le vecteur des valeurs singulières de Hankel du système $G(s)$ c.à.d. les éléments diagonaux de P_b et de Q_b .

Interprétation des vsh . Soit P le gramien de contrôlabilité d'un système contrôlable défini par

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

et calculons la dérivée de $V(x) = x^T P^{-1} x$. On a :

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \dot{x}^T P^{-1} x + x^T P^{-1} \dot{x} \\ &= (x^T A^T + u^T B^T) P^{-1} x + x^T P^{-1} (Ax + Bu) \\ &= x^T (A^T P^{-1} + P^{-1} A) x + u^T B^T P^{-1} x + x^T P^{-1} Bu.\end{aligned}$$

Or, tenant compte de l'équation de Lyapunov (5-88),

$$A^T P^{-1} + P^{-1} A = P^{-1} (AP + PA^T) P^{-1} = -P^{-1} BB^T P^{-1}.$$

D'où

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -(u^T - x^T P^{-1} B)(u - B^T P^{-1} x) + u^T u \\ &= -\|u - B^T P^{-1} x\|^2 + \|u\|^2\end{aligned}$$

Par conséquent, l'énergie fournie au système pour l'amener d'un état nul à l'instant $t = -\infty$ à un état x^0 à l'instant $t = 0$ est :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 \|u\|^2 dt &= V(x^0) - V(0) + \int_{-\infty}^0 \|u - B^T P^{-1} x\|^2 dt \\ &\geq x^{0T} P^{-1} x^0.\end{aligned}$$

L'énergie fournie à ce système sera minimum et vaut $x^{0T} P^{-1} x^0$, quand le système est entraîné par la commande $u = B^T P^{-1} x$ (retour d'état). En passant à

la réalisation balancée par le changement de variable $x = Tz$, T étant la transformation (5-95), cette énergie minimum s'écrit :

$$z^{0T} \Sigma^{-1} z^0 = \sum_0^n \frac{1}{\sigma_k} (z_k^0)^2. \quad (5-96)$$

Supposons maintenant qu'à partir de l'état x^0 à l'instant $t = 0$ on laisse le système fonctionner librement ($u = 0$). Sa réponse y évolue selon les équations

$$\dot{x} = Ax, \quad y = Cx.$$

Tenant compte de l'équation de Lyapunov (5-89), la dérivée de la fonction $V(x) = x^T Q x$ est

$$\begin{aligned}\dot{V} &= x^T A^T Q x + x^T Q A x = -x^T C^T C x \\ &= -y^T y = -\|y\|^2.\end{aligned}$$

Par conséquent, si le système est stable, l'énergie qu'il délivre à sa sortie sous le seul effet de l'état initial x^0 est

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \|y\|^2 dt &= -\int_0^\infty \dot{V}(x) dt = V(x^0) - V[x(\infty)] \\ &= x^{0T} Q x^0.\end{aligned}$$

En passant à la réalisation balancée, cette énergie s'écrit :

$$z^{0T} \Sigma z^0 = \sum_0^n \sigma_k (z_k^0)^2. \quad (5-97)$$

De (5-96) et (5-97), on déduit que le gain en énergie pour un état initial x^0 est

$$\eta = \frac{\sum_0^n \sigma_k (z_k^0)^2}{\sum_0^n \frac{1}{\sigma_k} (z_k^0)^2}. \quad (5-98)$$

Si $z^0 = e^k$ ($z_k^0 = 1$ et toutes les autres composantes de z^0 sont nulles), c.à.d. si $x^0 = T e^k = v^k$, v^k étant le $k^{\text{ème}}$ vecteur propre de PQ , le gain en énergie est σ_k^2 . À noter que

$$\eta \leq [\sigma_1 \sum_0^n (z_k^0)^2] / [\sigma_1^{-1} \sum_0^n (z_k^0)^2] = \sigma_1^2$$

et l'égalité s'obtient pour $x^0 = v^1$. Ainsi, le gain maximum en énergie est

$$\eta_{\max} = \sigma_1^2 = \max_{u(t)|t \in (-\infty, 0]} \frac{\int_0^\infty \|y(t)\|^2 dt}{\int_{-\infty}^0 \|u(t)\|^2 dt}. \quad (5-99)$$

Le réel positif σ_1 , désignée par $\|G(s)\|_H$, est appelé la *norme de Hankel* du système $G(s)$.

Réduction par troncation. Elle consiste à éliminer de la réalisation balancée d'un système les variables d'état dont le gain en énergie est le plus faible, c.à.d. celles qui correspondent à des vsh de petites valeurs.

Soit $\Gamma_b = (A_b, B_b, C_b, D)$ la réalisation balancée d'un système $G(s)$ stable et posons $\Sigma = \text{diag}(\Sigma_1, \Sigma_2)$ son gramien de contrôlabilité et d'observabilité. Les matrices Σ_1 et Σ_2 sont diagonales et le plus petit élément de la diagonale de Σ_1 et supérieur au plus grand élément de la diagonale de Σ_2 . Soit $z = [z^1, z^2]$ le vecteur d'état de Γ_b où le sous vecteur z^1 correspond à Σ_1 et le sous vecteur z^2 correspond à Σ_2 . Avec cette subdivision, la réalisation Γ_b se met sous la forme :

$$\Gamma_b \leftarrow \left(\begin{array}{cc|c} A_b^{11} & A_b^{12} & B_b^1 \\ A_b^{21} & A_b^{22} & B_b^2 \\ \hline C_b^1 & C_b^2 & D \end{array} \right).$$

Le gramien Σ vérifie les équations de Lyapunov

$$\begin{aligned} A_b \Sigma + \Sigma A_b^T &= -B_b B_b^T, \\ A_b^T \Sigma + \Sigma A_b &= -C_b^T C_b. \end{aligned}$$

Elle est définie positive, d'où il en est de même de Σ_1 et Σ_2 . Si, pour éliminer z^2 , on annule Σ_2 , on déduit des équations précédentes que Σ_1 vérifie les équations de Lyapunov

$$\begin{aligned} A_b^{11} \Sigma_1 + \Sigma_1 A_b^{11T} &= -B_b^1 B_b^{1T}, \\ A_b^{11T} \Sigma_1 + \Sigma_1 A_b^{11} &= -C_b^{1T} C_b^1, \end{aligned}$$

ce qui montre que $\Gamma_r = (A_b^{11}, B_b^1, C_b^1, D)$ est la réalisation balancée stable de la fonction de transfert

$$G_r(s) = C_b^1 (sI - A_b^{11})^{-1} B_b^1 + D.$$

On démontre que si z^1 a r composantes et z^2 a $n-r$ composantes, l'écart entre $G(s)$ et $G_r(s)$ est

$$\|G(s) - G_r(s)\|_\infty \leq 2 \sum_{k=r+1}^n \sigma_k.$$

En modifiant la matrice D , on peut réduire encore plus cet écart et on démontre que

$$\sigma_{r+1} \leq \min_D \|G(s) - G_r(s)\|_\infty \leq \sum_{k=r+1}^n \sigma_k$$

Ainsi l'écart entre G et G_r sera petit si z^2 correspond à des vsh de faibles valeurs et on dit que $G_r(s)$ est une approximation d'ordre réduit de $G(s)$ (voir exemple 5-6). À côté de la méthode précédente qui est souvent suffisante, la fonction «reduce» applique d'autres méthodes basées sur des critères et des algorithmes différents.