

# Chapitre 6

## EFFETS DES NON-LINÉARITÉS ET STABILITÉ DE LYAPUNOV

### 6-1 INTRODUCTION

Un système est non linéaire si l'une des fonctions  $f$  et  $g$  de ses équations d'état,  $\dot{x} = f(x, u)$ ,  $y = g(x, u)$ , n'est pas linéaire. Un tel système ne jouit donc pas du principe de superposition et, contrairement aux systèmes linéaires, sa réponse à une entrée  $u$  ne peut pas se déduire de sa réponse  $g(t)$  à une impulsion de Dirac, c'est-à-dire d'une fonction de transfert  $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$ . Sa linéarisation autour d'un point de fonctionnement  $p_f = [x_d, u_d]$  n'est valable que si les fonctions  $f$  et  $g$  sont dérivables en  $p_f$  et si le point du fonctionnement réel  $[x_r, u_r]$  ne s'écarte pas trop de  $p_f$ . Hors de ces conditions, il apparaît des phénomènes que la théorie des systèmes linéaires ne peut pas prédire. Nous nous limitons dans ce chapitre à mettre en évidence ces nouveaux phénomènes et à introduire une notion générale de stabilité dite de Lyapunov. Le comportement temporel des systèmes non linéaires sera représenté par le tracé des trajectoires de l'état dans un espace dit de phase et leur comportement fréquentiel sera déduit en associant à un élément non linéaire une fonction de transfert approximative dite fonction de description. Commençons d'abord par classer les non-linéarités et en donner des exemples.

**Classification.** Un organe est dynamique si son état varie et il est statique si son état est constant c.à.d. si  $\dot{x} = f(x, u) = 0, \forall [x, u]$ . Dans ce dernier cas, l'organe sera caractérisé par une seule fonction

$$y = g(u).$$

Si la fonction  $g$  associe à  $u$  une valeur unique, on dit que l'organe est de classe A. Si  $g$  associe à  $u$  plus qu'une valeur, on dit que l'organe est de classe B. Voici des exemples.

#### Non linéarité dynamique.

La rotation  $\theta$  d'un pendule simple de longueur  $L$  et de masse  $m$  est liée au moment  $u$  appliqué à son articulation (fig. 6-1) par l'équation différentielle

$$mL^2\ddot{\theta} = -mgL \sin \theta + u.$$

En posant  $x_1 = \theta$  et  $x_2 = \dot{\theta}$  l'équation précédente se transforme en équations d'état :

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -(g/L) \sin x_1 + (1/mL^2)u,$$

$$y = x_1.$$

À cause du terme en  $\sin x_1$ , ces équations dynamiques ne sont pas linéaires et leur linéarisation n'est valable que si le fonctionnement réel  $[x_{1r}, x_{2r}, u_r]$  reste voisin d'un fonctionnement désiré  $[x_{1d}, x_{2d}, u_d]$  où  $x_{1d} = \theta_d(t)$ ,

$$x_{2d} = \dot{x}_{1d} \quad \text{et} \quad u_d = mL^2\dot{x}_{2d} + mgL \sin x_{1d}.$$

#### Non linéarités statiques de classe A.

1) Un ressort n'est considéré linéaire ( $f = kx$ ) que pour des déformations modérées. Pour des déformations  $x$  assez grandes, il est plus réaliste de lier  $x$  à la force appliquée  $f$  par la relation non linéaire  $f = k_1x + k_2x^3$  comme le montre la figure 6-2.

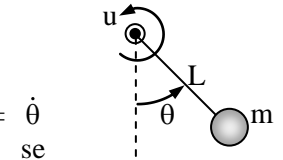


Fig. 6-1 Pendule

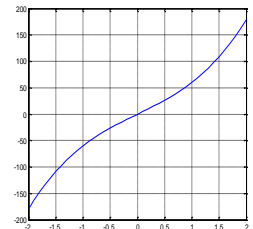


Fig. 6-2 Caractéristique d'un ressort

2) Généralement la tension à l'entrée d'un élément électronique doit dépasser une valeur de seuil pour le rendre passant et la sortie de cet élément est limitée par une valeur de saturation. La figure 6-3a représente la caractéristique d'un amplificateur qui reste bloqué dans la zone morte  $[-\delta, +\delta]$  et se sature à l'extérieur de l'intervalle  $[-u_s, +u_s]$ . La figure 6-3b représente la caractéristique d'un relais qui se sature directement à l'extérieur de la zone morte.

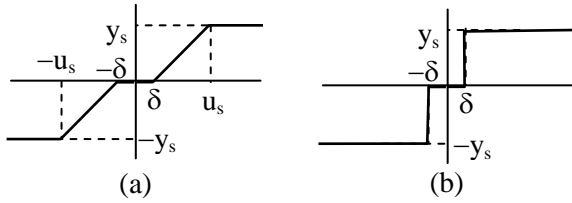


Fig. 6-3 (a) amplificateur, (b) relais.

Souvent, quand le seuil  $\delta$  est petit par rapport aux amplitudes de l'entrée, on néglige la zone morte qui se réduit à un point.

#### Non linéarités statique de classe B

1) L'hystérésis apparaît dans des circuits comportant des éléments magnétiques (électroaimant, moteur). Pour un même courant de magnétisation  $i$ , la valeur de l'induction  $B$  quand  $i$  croît est inférieure à sa valeur quand  $i$  décroît (fig. 6-4).

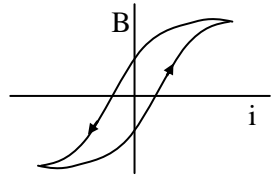


Fig. 6-4 Hystérésis

2) Par construction ou à cause des propriétés des éléments qui les constituent, certains organes électroniques ou électromagnétiques fonctionnent avec hystérésis (fig. 6-5).

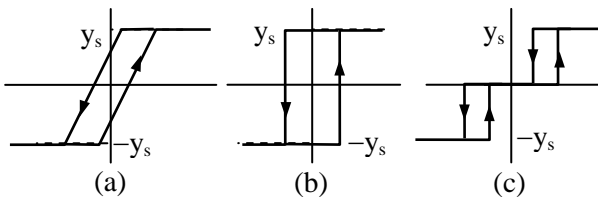


Fig. 6-5 Élément à hystérésis : (a) amplificateur, (b) relais sans zone morte, (c) relais avec zone morte

3) L'hystérésis peut aussi apparaître en transmission mécanique quand il existe un jeu entre les dents d'un engrenage. Ceci est expliqué par la figure 6-6 où, pour la clarté, les pignons sont étalés

horizontalement,  $a$  et  $b$  sont les amplitudes des déplacements respectivement du pignon moteur et du pignon de charge ;  $2\delta$  est la largeur du jeu.

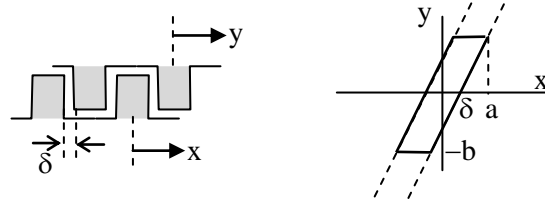


Fig. 6-6 Caractéristique d'un jeu d'engrenage

## 6-2 PLAN DE PHASE

La méthode du plan de phase n'est applicable qu'à des systèmes de second ordre dont l'état  $x$  n'a que deux composantes  $x_1$  et  $x_2$ . Malgré cette restriction elle reste utile pour les raisons suivantes :

- 1) En pratique, beaucoup de procédés sont de second ordre.
- 2) Des systèmes d'ordre supérieur à 2 peuvent être approximés par des systèmes de second ordre en éliminant leurs pôles non dominants.
- 3) La représentation des trajectoires du point  $x = [x_1, x_2]$  dans un plan permet de visualiser des phénomènes de caractère général pouvant aussi apparaître durant le fonctionnement de systèmes d'ordre supérieur.

Considérons un système invariant de second ordre dont l'entrée est nulle (système autonome ou libre). Son équation d'état est de la forme

$$\dot{x} = f(x). \quad (6-1)$$

La solution  $x(t)$  de cette équation dépend de l'état initial  $x^0$ . À partir de chaque état initial, le point  $x(t) = [x_1(t), x_2(t)]$  se déplace dans le plan en décrivant une trajectoire  $C(x^0)$ . Le vecteur  $f(x)$  étant la vitesse  $\dot{x}$  du point  $x$ , il est tangent à  $C(x^0)$  en ce point. Sa pente est

$$\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x)}{f_1(x)} \quad (6-2)$$

où  $f_1$  et  $f_2$  sont les deux composantes de  $f$ . On appelle *isocline*  $m$  l'ensemble des points où la pente des trajectoires est égale à  $m$ . C'est une courbe d'équation  $f_2(x) = mf_1(x)$ . Les extrêmes des trajectoires sont sur la courbe  $f_2(x) = 0$  et elles ont

une pente infinie sur la courbe  $f_1(x) = 0$ . En plus, en un point  $x_e$  tel que  $f_1(x_e) = f_2(x_e) = 0$ , la vitesse de  $x$  en ce point est nulle et on dit que  $x_e$  est un *état d'équilibre*. Un tel point est *singulier* car, la pente  $m$  en ce point étant indéterminée, une infinité de trajectoires peuvent y passer tandis qu'en un point régulier il ne passe qu'une seule trajectoire.

**Représentation manuelle des trajectoires.** On trace manuellement une trajectoire en suivant les étapes suivantes :

- On représente un nombre suffisant d'isoclines.
- D'un point initial  $x^0$  situé sur l'une des isoclines, on mène deux segments dont la pente du premier est celle correspondant à cette isocline et la pente du second est celle correspondant à l'isocline suivante. Ces deux segments rencontrent l'isocline suivante en  $M_1$  et  $M_2$ . Soit  $x^1$  le milieu du segment  $M_1M_2$ .
- On répète en  $x^1$  les mêmes opérations qu'en  $x^0$  ce qui donne sur la troisième isocline un point  $x^2$ . En continuant de la sorte, on obtient point par point la trajectoire à partir de l'état initial  $x^0$ . Cette trajectoire peut diverger vers l'infini ou aboutir à un point singulier où la vitesse  $x(t)$  s'annule c.à.d. où le point  $x(t)$  ne se déplace plus.

### Exemple 6-1

Considérons un corps de masse 1Kg soumis à une force égale au carré de sa position  $y$  par rapport à l'origine et à un frottement visqueux de facteur 1N/(m/s). L'équation différentielle du mouvement,  $\ddot{y} = -\dot{y} - y^2$ , se ramène aux équations d'état

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 - x_1^2.$$

où  $x_1 = y$  et  $x_2 = \dot{y}$ . En annulant les deux dérivées, on déduit que ce système a un seul point singulier (0, 0). Hors de ce point, une isocline  $m$  a pour équation

$$(m+1)x_2 = -x_1^2.$$

Les trajectoires ont des extrémums ( $m = 0$ ) sur la parabole  $x_2 = -x_1^2$ , elles sont verticales ( $m = \infty$ ) sur la droite  $x_2 = 0$  et la pente  $m = -1$  sur  $x_1 = 0$ . La figure 6-7 montre les isoclines  $-5, -3, -5/4, -1, -3/4, 0, 1, 3$  et la construction de la trajectoire d'état initial (2, 2). La force initiale négative  $-x_2 - x_1^2$  décélère le corps de la vitesse positive 2m/s à 0m/s pour le déplacer ensuite vers la gauche. Le corps

décélère dans la région où  $x_2 \geq -y^2$  puis, quand cette région est franchie, il accélère vers  $-\infty$ .

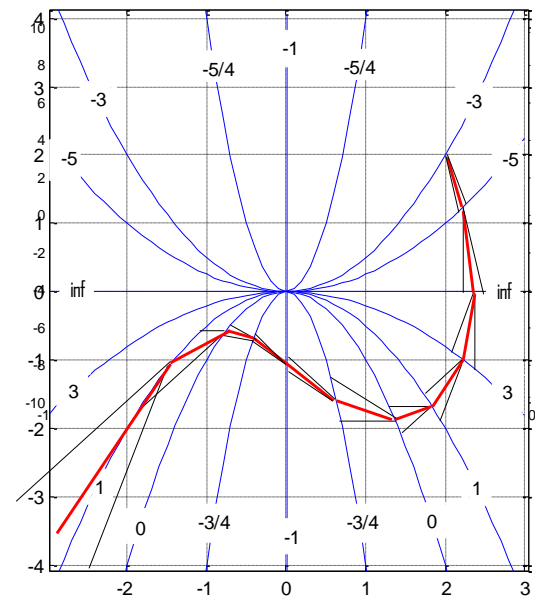


Fig. 6-7 Trajectoire de  $\ddot{y} = -\dot{y} - y^2$  à partir de (2, 2).

**Construction des trajectoires par Matlab.** La construction manuelle est longue et sert seulement à esquisser une trajectoire approximative. Le programme suivant de Matlab, dénommé «pp», résout par l'instruction «ode45» l'équation d'état «ee» qu'on définit dans un éditeur de fonction. En plus, ce programme représente rapidement et avec précision les trajectoires ainsi que la réponse  $x_1(t)$  à partir de plusieurs états initiaux.

```
function [x,t] = pp
x0 = input('matrice 2 lignes des points initiaux:');
tf = input('vecteur des durées:');
ee = input('nom des équations d'état:');

opt = odeset('RelTol',1e-5);

for i = 1 : length(tf)
    [t, x] = ode45(ee, [0 tf(i)], x0(:,i), opt);
    subplot(2,1,1), plot(x(:,1), x(:,2));
    hold on
    subplot(2,1,2), plot(t,x(:,1));
end;
```

### Exemple 6-2

Considérons le pendule de la figure 6-1 dont l'articulation est soumise à un moment de frottement visqueux  $u = c\dot{\theta}$ . Supposons qu'en remplaçant les paramètres par leurs valeurs et en posant  $x_1 = \theta$  et  $x_2 = \dot{\theta}$ , les équations d'état de ce système deviennent :

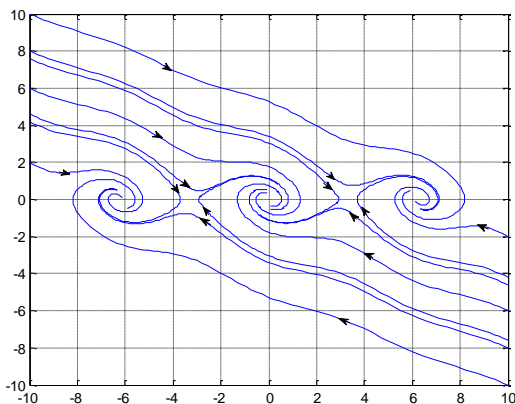
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\sin x_1 - 0.5x_2\end{aligned}$$

Ces équations sont définies par la fonction suivante dénommée «pendule»:

```
function xp = pendule(t,x)
```

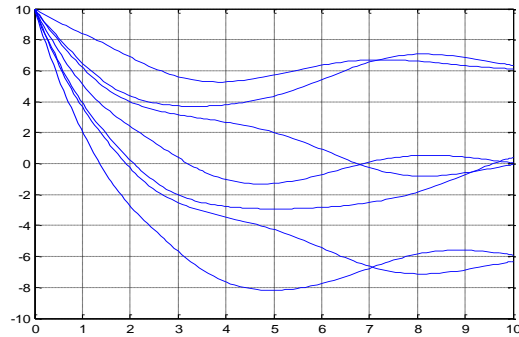
```
xp = [x(2) ; -sin(x(1)) - 0.5*x(2)];  
end
```

Les points singuliers sont ceux qui vérifient  $x_2 = 0$  et  $-\sin x_1 - 0.5x_2 = 0 \Leftrightarrow (x_{1e}, x_{2e}) = (\pm k\pi, 0)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , c.à.d. les points d'équilibre du pendule sont ses deux positions verticales. La position d'équilibre supérieure ( $k$  impair) est instable car la moindre vitesse ou déplacement éloigne la masse de cette position. Ceci peut être vu en représentant les trajectoires par le programme «pp» ci-dessus. Il suffit de taper sur la fenêtre de commande le nom de ce programme et d'introduire à sa demande les états initiaux, les durées des mouvements et le nom 'pendule' des équations d'état à résoudre. La figure suivante montre les trajectoires à partir de la position  $\pm 10\text{rad}$  avec des vitesses initiales différentes.



Le même programme fournit aussi les mouvements  $\theta(t) = x_1(t)$  du pendule en fonction du temps. La figure suivante montre ces mouvements pendant 10sec seulement à partir de la position  $+10\text{rad}$ . À

partir de  $-10\text{rad}$  le pendule a des mouvements symétriques non représentés.



### EXERCICE 6-1

Interpréter physiquement la réponse  $\theta(t)$  obtenue à la fin de l'exemple 6-2.

### EXERCICE 6-2

Construire par la méthode des isoclines et par le programme «pp» les trajectoires de l'équation de Van Der Pol,  $\ddot{y} + 0.5(y^2 - 1)\dot{y} + y = 0$ , à partir des états  $(0, 1)$  et  $(3, -3)$ . Représenter  $y(t)$ .

L'exemple et l'exercice 6-2 précédents montrent que les états d'équilibres peuvent être stables ou instables et les trajectoires au voisinage de ces singularités peuvent avoir des allures différentes.

## 6-3 TYPES DES SINGULARITÉS.

Soient

$$\dot{x}_{1r} = f_1(x_{1r}, x_{2r}), \quad \dot{x}_{2r} = f_2(x_{1r}, x_{2r}) \quad (6-3)$$

les équations d'état d'un système autonome. Au voisinage d'un point singulier  $x_e = (x_{1e}, x_{2e})$  vérifiant

$$f_1(x_{1e}, x_{2e}) = 0, \quad f_2(x_{1e}, x_{2e}) = 0$$

les équations (6-3) peuvent être approximées par leur linéarisation

$$\dot{x} = Ax \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{cases} \quad (6-4)$$

où  $x_i = x_{ir} - x_{ie}$  (le point d'équilibre devient  $(x_1, x_2) = (0, 0)$ ) et l'élément  $a_{ij}$  de la matrice  $A = \{a_{ij}\}$  est donné par

$$a_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{x_r = x_e}, i, j = 1, 2. \quad (6-5)$$

Pour simplifier la résolution des équations (6-4), nous allons les écrire dans la base  $\{v^1, v^2\}$  des vecteurs propres. Rappelons que  $v$  est un vecteur propre de la matrice carrée  $A$  s'il existe un scalaire  $\lambda$ , appelé valeur propre de  $A$ , tel que  $Av = \lambda v$ , c.à.d. si  $v$  est colinéaire avec son image par  $A$ . Si, pour  $\lambda$  réel, le vecteur  $x$  qui joint l'origine à un point de la trajectoire est propre, d'après (6-4), la vitesse  $\dot{x}$  est portée par la droite joignant ce point à l'origine.

Les valeurs propres vérifient  $\det(A - \lambda I) = 0$ , c.à.d. elles sont les racines du polynôme caractéristique

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = 0. \quad (6-6)$$

Nous verrons que souvent  $a_{11} = 0$  et  $a_{12} = 1$  ce qui réduit l'équation (6-6) à

$$\lambda^2 - a_{22}\lambda - a_{21} = 0. \quad (6-6)'$$

Les deux valeurs propres sont réelles distinctes ou réelles égales ou complexes conjuguées selon le signe du discriminant  $\Delta = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{21}a_{12}$ . À chaque valeur propre correspond un vecteur propre  $v = [v_1; v_2]$ , solution de  $(A - \lambda I)v = 0$  c.à.d. de l'une des équations dépendantes (car  $\det(A - \lambda I) = 0$ )

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)v_1 + a_{12}v_2 &= 0, \\ \text{ou} \quad a_{21}v_1 + (a_{22} - \lambda)v_2 &= 0. \end{aligned} \quad (6-7)$$

L'allure de la trajectoire au voisinage d'un point d'équilibre dépend du signe de  $\Delta$ .

### a) $\Delta > 0$

Dans ce cas, les deux valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont réelles distinctes et les vecteurs propres correspondants  $v^1$  et  $v^2$  sont réels indépendants formant une base dans  $\mathbb{R}^2$ . La matrice de passage de cette nouvelle base à l'ancienne est  $P = [v^1, v^2]$  c.à.d.  $x = Pz$  où  $z$  est l'écriture du vecteur  $x$  dans la base

$\{v^1, v^2\}$ . Par substitution dans (6-4), l'équation d'état devient  $P\dot{z} = APz$  ou

$$\dot{z} = \mathcal{A}z \quad \text{avec} \quad \mathcal{A} = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \quad (6-8)$$

Cette diagonalisation de la matrice  $A$  permet de remplacer l'écriture de l'état  $x$  par une écriture  $z$  dont les composantes  $z_1$  et  $z_2$  sont *découplées* c.à.d. l'une est indépendante de l'autre. Ceci facilite la résolution des équations d'état. En effet, de (6-8) on tire

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \lambda_1 z_1 \quad \text{et} \quad \dot{z}_2 = \lambda_2 z_2 \\ \Rightarrow z_1(t) &= z_{10} e^{\lambda_1 t} \quad \text{et} \quad z_2(t) = z_{20} e^{\lambda_2 t} \end{aligned} \quad (6-9)$$

où  $z^0 = [z_{10}, z_{20}]$  est l'état initial écrit dans  $\{v^1, v^2\}$ . Ces équations montrent que, quand  $t \rightarrow \infty$ ,

- si  $\lambda_1 < 0$  et  $\lambda_2 < 0$ ,  $z \rightarrow 0$  et on dit le point d'équilibre est un *nœud stable*.
- Si  $\lambda_1 > 0$  et  $\lambda_2 > 0$ ,  $z_1$  et  $z_2 \rightarrow \infty$  et on dit le point d'équilibre est un *nœud instable*.
- Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont de signes opposés, l'une des composantes de  $z$  tend vers 0 et l'autre vers l'infini quand  $t \rightarrow \infty$  et on dit que le point d'équilibre est un *col* ou un *point de selle*.
- Si  $\lambda_i = 0$ ,  $i = 1$  ou  $2$ , on a  $z_i(t) = z_{i0}$  et la trajectoire est une droite parallèle à l'axe de l'autre variable.

Il est important de garder à l'esprit que les propriétés précédentes sont locales, valables seulement au voisinage d'un point d'équilibre.

En éliminant le paramètre  $t$  des équations (6-9), on déduit que l'équation de la trajectoire est

$$z_2 = c(z_1)^{\lambda_2/\lambda_1}, \quad c = z_{20} / z_{10}. \quad (6-10)$$

Sa dérivée  $dz_2 / dz_1 = c(\lambda_2 / \lambda_1)(z_1)^{\lambda_2/\lambda_1 - 1}$  montre que si les deux valeurs propres sont de même signe, la trajectoire à l'origine (au nœud) est tangente à l'axe de la valeur propre ayant la plus faible valeur absolue et elle est parallèle à l'autre axe quand elle tend vers l'infini.

### Exemples 6-3

Représentons les trajectoires autour d'un certain point d'équilibre lorsque

$$1) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

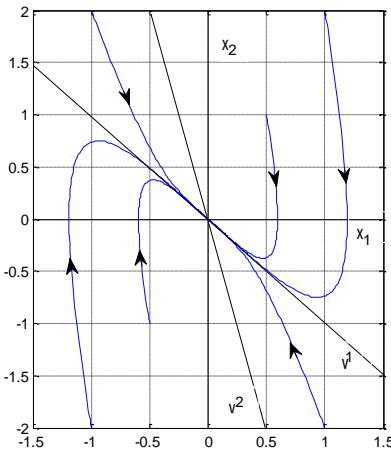
Valeurs propres :

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -4 \end{cases}$$

Vecteurs propres :

$$(6-7) \Rightarrow -\lambda v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 \rightarrow v^1 = [1; -1] \\ \lambda_2 \rightarrow v^2 = [1; -4] \end{cases}$$

L'état d'équilibre est un nœud stable. Comme prévu, les trajectoires à l'origine sont tangentes à l'axe de  $v^1$  (car  $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ ) et elles sont à l'infini parallèles à l'axe de  $v^2$ . À noter d'autre part que  $\dot{x}_1 = x_2$  implique que  $x_1$  croît si  $x_2 > 0$ , décroît si  $x_2 < 0$  et atteint un extrémum sur l'axe  $x_2 = 0$ .



$$2) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Valeurs propres :

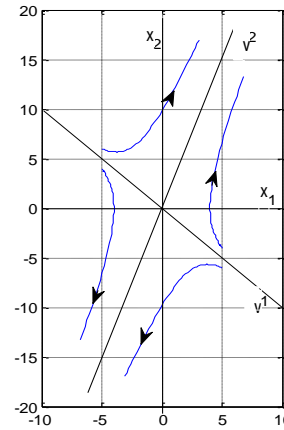
$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

Vecteurs propres :

$$(6-7) \Rightarrow -\lambda v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 \rightarrow v^1 = [1; -1] \\ \lambda_2 \rightarrow v^2 = [1; 3] \end{cases}$$

L'état d'équilibre est un col (un point de selle). Les trajectoires ont des asymptotes obliques ayant les

directions des vecteurs propres  $v^1$  et  $v^2$ . Quand  $t \rightarrow \infty$ , la composante de l'état selon  $v^1$  tend vers zéro et sa composante selon  $v^2$  tend vers l'infini.



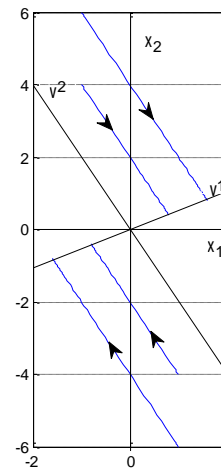
$$3) A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Valeurs propres :

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + 5\lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -5 \end{cases}$$

Vecteurs propres :

$$(6-7) \Rightarrow (-1-\lambda)v_1 + 2v_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 \rightarrow v^1 = [2; 1] \\ \lambda_2 \rightarrow v^2 = [1; -2] \end{cases}$$



Si le système est linéaire, tous les points de la droite portant  $v^1$  sont d'équilibre.

### b) $\underline{A} = 0$

La valeur propre  $\lambda$  est unique et réelle.

- Si la matrice  $(A - \lambda I) \neq 0$ , tout vecteur propre appartient à la droite définie par (6-7) et la



dimension de l'espace  $V$  engendré par les vecteurs propres n'est que 1. Dans ce cas, la matrice  $A$  n'est pas diagonalisable mais dans la base  $\{v^1, v^2\}$  où  $v^1$  est un vecteur propre et  $v^2$  le vecteur vérifie

$$Av^2 = v^1 + \lambda v^2 \Leftrightarrow (A - \lambda I)v^2 = v^1, \quad (6-11)$$

la matrice  $A$  et les équations d'état deviennent :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dot{z}_1 = \lambda z_1 + z_2, \\ \dot{z}_2 = \lambda z_2. \end{cases} \quad (6-12)$$

La solution de ces équations est

$$z_2(t) = z_{20}e^{\lambda t} \quad \text{et} \quad z_1(t) = (z_{20}t + z_{10})e^{\lambda t} \quad (6-13)$$

L'état d'équilibre est un nœud stable si  $\lambda < 0$ , instable si  $\lambda > 0$  et si  $\lambda = 0$ , les trajectoires sont parallèles à l'axe  $z_1$ .

En éliminant le paramètre  $t$  des équations (6-13), on déduit que pour  $\lambda \neq 0$  l'équation de la trajectoire est

$$z_1 = \left( \frac{1}{\lambda} \ln \frac{z_2}{z_{20}} + z_{10} \right) \frac{z_2}{z_{02}}. \quad (6-14)$$

La dérivée  $dz_1/dz_2 = [(1/\lambda)(z_2 + \ln(z_2/z_{20})) + z_{10}]/z_{20}$  montre que la trajectoire est tangente à l'axe  $z_1$  quand  $z_2 \rightarrow 0$  et elle est parallèle à cet axe quand  $z_2 \rightarrow \pm\infty$ .

• Si  $(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow A = \lambda I$ , on a :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda x_1 \quad \text{et} \quad \dot{x}_2 = \lambda x_2 \\ \Rightarrow x_1(t) &= x_{10}e^{\lambda t} \quad \text{et} \quad x_2(t) = x_{20}e^{\lambda t} \end{aligned}$$

d'où la trajectoire est la droite  $x_2 = cx_1$ ,  $c = x_{20}/x_{10}$ , joignant l'état initial à l'origine.

#### Exemple 6-4

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Valeurs propres :

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda = 3$$

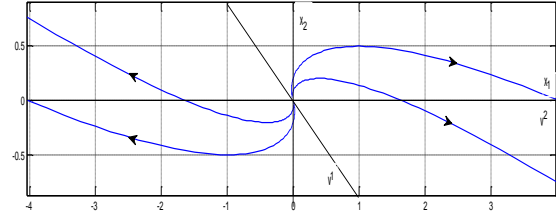
Vecteur propre :

$$(6-7) \Rightarrow (4-\lambda)v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v^1 = [1; -1]$$

Deuxième vecteur de base :

$$(A - 3I)v^2 = v^1 \Rightarrow v^2 = [1; 0].$$

Le point d'équilibre est un nœud instable ayant une seule direction propre. Les trajectoires sont tangentes à cette direction à l'origine et lui sont parallèles à l'infini.



#### c) $\Delta < 0$

Dans ce cas, les valeurs propres sont complexes conjuguées,  $\lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega$ , et il en est de même des vecteurs propres  $v^1$  et  $v^2 (= \bar{v}^1)$ . L'écriture de la matrice  $A$  et des équations d'état deviennent dans la base  $\{v^1, v^2\}$

$$A = \begin{pmatrix} \sigma + j\omega & 0 \\ 0 & \sigma - j\omega \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dot{\xi}_1 = (\sigma + j\omega)\xi_1, \\ \dot{\xi}_2 = (\sigma - j\omega)\xi_2. \end{cases}$$

Pour avoir des équations à coefficients réels, on pose  $z_1 = \xi_1 + \xi_2$  et  $z_2 = j(\xi_1 - \xi_2)$  ce qui donne

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \sigma z_1 + \omega z_2, \\ \dot{z}_2 &= -\omega z_1 + \sigma z_2. \end{aligned} \quad (6-15)$$

En posant  $v^1 = [\alpha + j\beta; \gamma + j\delta] = \bar{v}^2$ , la matrice de passage de  $z$  à  $\xi$  à  $x$  est

$$P = \begin{pmatrix} v^1 & v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}. \quad (6-16)$$

Le changement de variables  $z_1 = r\cos\theta$  et  $z_2 = r\sin\theta$ , transforme les équations (6-15) en

$$\begin{aligned} \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta &= \sigma r\cos\theta + \omega r\sin\theta \\ \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta &= -\omega r\cos\theta + \sigma r\sin\theta. \end{aligned}$$

En les multipliant par  $\cos\theta$  et  $\sin\theta$ , il est facile de déduire de ces équations que

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \sigma r \quad \text{et} \quad \dot{\theta} = -\omega \\ \Rightarrow \begin{cases} r(t) = r_0 e^{\sigma t} \\ \theta(t) = -\omega t + \theta_0 \end{cases} \end{aligned} \quad (6-17)$$

où  $r_0$  et  $\theta_0$  sont les valeurs initiales de  $r$  et  $\theta$ .

En éliminant  $t$  de (6-17), l'équation de la trajectoire s'écrit

$$r(\theta) = r_0 e^{\frac{\sigma}{\omega}(\theta_0 - \theta)}. \quad (6-18)$$

Si  $\sigma \neq 0$ , l'état décrit dans le plan une spirale et si  $\sigma = 0$ , il décrit un cercle. On dit que le point d'équilibre est un *foyer stable* si  $\sigma < 0$ , instable si  $\sigma > 0$  et un *centre* si  $\sigma = 0$ .

### Exemple 6-5

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Valeurs propres :

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 + 2j \\ \lambda_2 = -1 - 2j \end{cases}$$

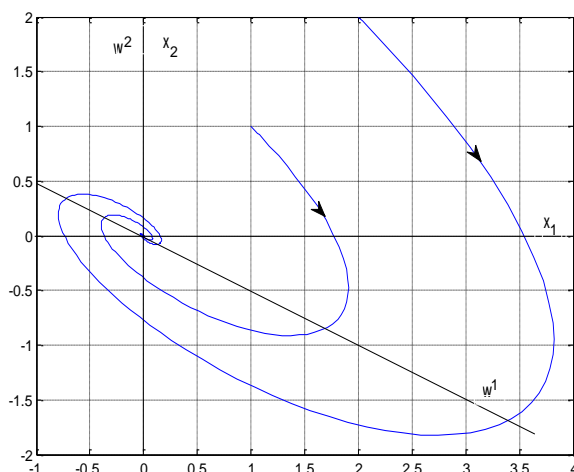
Vecteur propre :

$$(6-7) \Rightarrow (1 - \lambda)v_1 + 4v_2 = 0 \Rightarrow v^1 = [2; -1 - j]$$

Vecteurs de base :

$$(6-16) \Rightarrow w^1 = [2; -1], w^2 = [0; -1]$$

La trajectoire est une spirale et le point d'équilibre est un foyer stable.



### EXERCICE 6-3

Soit  $\dot{x} = Ax$  la linéarisation de  $\dot{x} = f(x)$  avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 2b \end{pmatrix}.$$

Donner le type de la singularité  $(0, 0)$  en fonction de la position du point  $(b, a)$  dans le plan.

**Cycle limite.** Si, à partir d'un état  $x^0$ , l'état  $x(t)$  décrit une courbe fermée  $C$  et retourne à  $x^0$  au bout d'un certain temps fini  $T$ , on dit que le système possède un cycle limite de période  $T$ . Ce cycle est dit stable si  $x(t)$  revient à  $C$  chaque fois qu'une perturbation l'écarte de cette courbe. La figure 6-8 suivante représente un cycle limite stable, un deuxième instable et un troisième semi-stable.

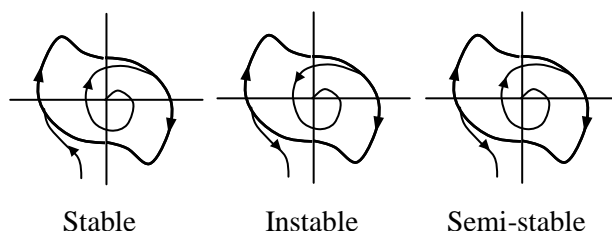


Fig. 6-8 Types de cycles limites

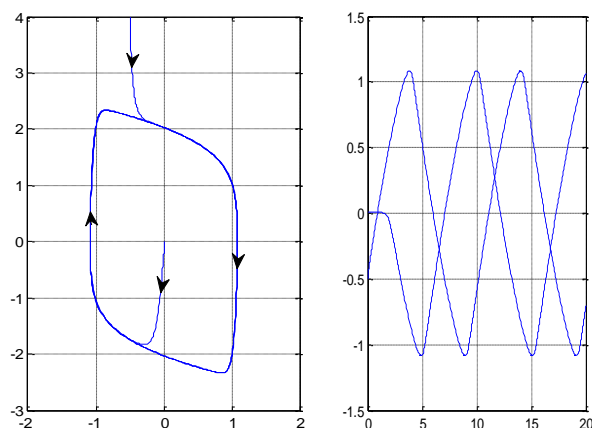
### Exemple 6-6

Quelque soit sa valeur initiale, l'état du système non linéaire

$$\dot{x}_1 = x_2 / 4$$

$$\dot{x}_2 = -4x_1 + 4x_2 - x_2^3$$

converge vers un cycle limite stable. La figure ci-dessous représente ce cycle avec les réponses  $x_1(t)$  partant de deux états initiaux différents.





### EXERCICE 6-4

Une masse  $m = 1\text{Kg}$  est soumise à une force  $f(x) = x - x^3$  où  $x$  est le déplacement de  $m$ .

1) Déterminer les points singuliers de ce système et leurs types.

2) Représenter à l'aide de Matlab les trajectoires et le mouvement de  $m$  à partir des états initiaux

$$(\pm\sqrt{2}, 0), (\pm 1/\sqrt{2}, 0), (\pm 1.6, 0).$$

## 6-4 APPLICATIONS

### Effets des saturations et du frottement sec.

Le diagramme de la figure 6-9 représente un système de commande d'un moteur de constante de temps  $\tau$  sec. et de vitesse limite  $\Omega_L$  (rad/s)/volt. L'actionneur de gain  $A$  et la commande proportionnelle de gain  $k_p$  se saturent quand leurs entrées dépassent  $\pm u_s$  et  $\pm e_s$ . Un frottement sec s'oppose à la vitesse  $\Omega$  du moteur par un moment équivalent à une tension  $f_s = c.\text{sign}(\Omega)$ . Une tension de contre-réaction proportionnelle à la vitesse est livrée par un tachymètre pour augmenter l'amortissement du système commandé.

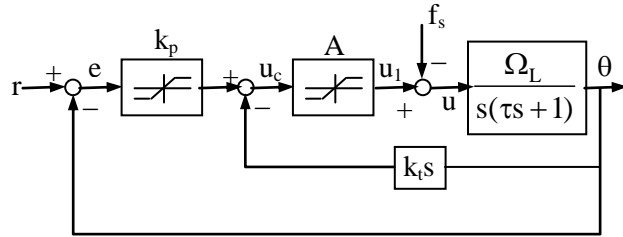


Fig. 6-9 Commande d'un moteur

Avant d'étudier les effets de ces non linéarités, nous commençons par considérer le fonctionnement linéaire de ce système, c'est-à-dire négliger le frottement sec  $f_s$  et supposer que durant ce fonctionnement  $-u_s < u_c < u_s$  et  $-e_s < e < e_s$ .

#### I- Fonctionnement linéaire.

La fonction de transfert entre la référence  $r$  et la rotation  $\theta$  est

$$T(s) = \frac{\theta(s)}{r(s)} = \frac{\frac{k_p A \Omega_L}{s(\tau s + 1)}}{1 + \frac{k_t A \Omega_L}{(\tau s + 1)} + \frac{k_p A \Omega_L}{s(\tau s + 1)}}$$

$$= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (6-19)$$

$$\text{où } \omega_n^2 = \frac{k_p A \Omega_L}{\tau} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{1}{2\tau} \left( \frac{k_t}{k_p} \omega_n + \frac{1}{\omega_n} \right).$$

En posant  $x_1 = \theta$  et  $x_2 = \dot{\theta}$ , la fonction de transfert (6-19) se réalise par les équations d'état

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega_n^2 x_1 - 2\xi\omega_n x_2 + \omega_n^2 r \end{aligned}$$

Pour rendre ces équations homogènes, on effectue le changement de variable  $x_1 \leftarrow x_1 - r$ . Si la référence  $r$  est constante, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega_n^2 x_1 - 2\xi\omega_n x_2. \end{aligned} \quad (6-20)$$

La matrice  $A$  de ce système linéaire est

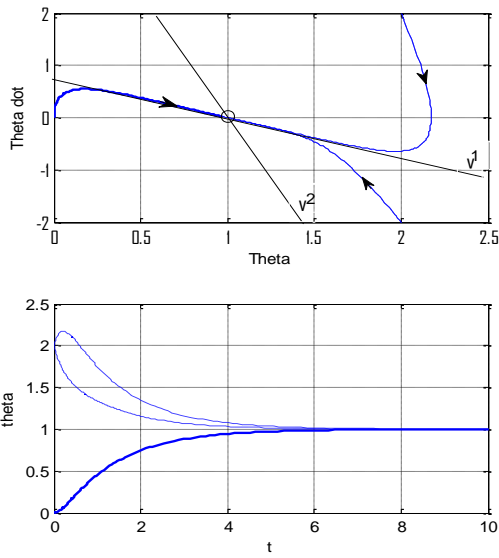
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\xi\omega_n \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est (dénominateur de (6-19))

$$\lambda^2 + 2\xi\omega_n \lambda + \omega_n^2$$

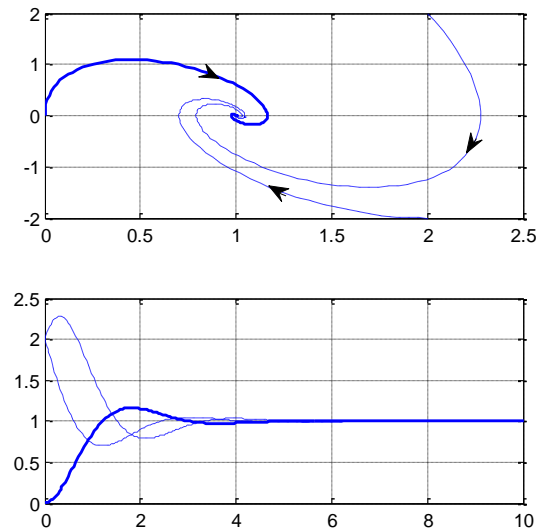
dont le discriminant est  $\Delta = \omega_n^2 (\xi^2 - 1)$ .

• Si  $\xi > 1$ , les valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont des réelles négatives distinctes de vecteurs propres  $v^1 = [1, \lambda_1]$  et  $v^2 = [1, \lambda_2]$  (on suppose  $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ ). Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, le point d'équilibre  $(x_1, x_2) = (0, 0) \Leftrightarrow (\theta, \dot{\theta}) = (r, 0)$  est un nœud stable vers lequel convergent les trajectoires tangentielllement à la direction propre relative à  $\lambda_1$ . À l'infini les trajectoires sont parallèles à l'autre direction propre. La figure 6-10 montre les trajectoires et les réponses  $\theta(t)$  à  $r = 1$  pour 3 états initiaux.



**Fig. 6-10** Trajectoires et réponses quand  $\xi > 1$ .

- Si  $\xi = 1$ , les deux valeurs propres sont confondues en  $\lambda \in \mathbb{R}$  et le vecteur propre correspondant est  $v = [1; \lambda]$ . C'est un cas particulier du précédent avec des directions propres confondues.
- Si  $\xi < 0$ , Les valeurs propres sont complexes à partie réelle négative ( $-\xi\omega_n$ ), le point d'équilibre  $(r, 0) = (1, 0)$  est un foyer stable et les trajectoires sont des spirales convergentes (fig. 6-11).



**Fig. 6-11** Trajectoires et réponses quand  $\xi < 1$ .

## II- Effet du frottement sec

D'après le diagramme 6-9, l'effet sur  $\theta$  du frottement  $f_s$  est  $-c.\text{sign}(\Omega).T(s)/k_pA$  où  $T(s)$  est donné en (6-19). En ajoutant cet effet à celui de la référence,  $r(s).T(s)$ , on obtient :

$$\theta(s) = \frac{\omega_n^2 r(s) - d\omega_n^2 \text{sign}(\dot{\theta})}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \quad d = \frac{c}{k_p A} \quad (6-21)$$

ou

$$\ddot{\theta} + 2\xi\omega_n \dot{\theta} + \omega_n^2 \theta = \omega_n^2 \theta_e, \quad \theta_e = \begin{cases} r - d & \text{si } \dot{\theta} > 0, \\ r + d & \text{si } \dot{\theta} < 0. \end{cases}$$

Pour une référence  $r$  constante, en posant  $x_1 = \theta - \theta_e$  et  $x_2 = \dot{\theta}$ , l'équation précédente se ramène aux équations d'état (6-12) du système linéaire. D'où la trajectoire de l'état  $(\theta, \dot{\theta})$  se déplace selon les mêmes règles que dans le cas linéaire mais converge vers le point d'équilibre  $(r - d, 0)$  si  $x_2 > 0$  (vitesse positive) et vers  $(r + d, 0)$  si  $x_2 < 0$ . À noter que si  $x_2 > 0$ ,  $x_1$  croît et l'état se déplace nécessairement vers la droite. Si  $x_2 < 0$ , il se déplace nécessairement vers la gauche.

L'état  $(\theta, \dot{\theta})$  se stabilise quand il arrive à l'axe  $x_2 = 0$  en un point  $m$  compris entre  $r - d$  et  $r + d$  car, à partir de ce point, il est impossible à l'état de se diriger à gauche vers  $(r - d, 0)$  dans le demi-plan supérieur ni de se diriger à droite vers  $(r + d, 0)$  dans le demi-plan inférieur.

Les figures 10-12, obtenues en appliquant le programme «pp» à la fonction

```
function xp = pphfirtsec(t,x);
xp = [x(2); -9*( (x(1)-0.8)*(x(2)>=0) ...
+ (x(1)-1.2)*(x(2)<0) ) ...
- (3/4)*x(2) ];
end
```

montrent l'effet d'un frottement sec de valeur  $d = 0.2$  sur la trajectoire et la réponse temporelle du système 6-9 à partir de l'état initial  $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$  et dans les deux cas  $\xi > 1$  et  $\xi < 1$ . En comparant avec les figures 6-10 et 6-11 (courbes grasses), on constate que le temps de stabilisation et le nombre des oscillations ont diminués mais qu'une erreur stationnaire comprise entre  $-0.2$  et  $+0.2$  s'est

apparue. Cette erreur est due à un couple de frottement supérieur ou égal au couple moteur en un moment où la vitesse (l'énergie cinétique) s'annule.

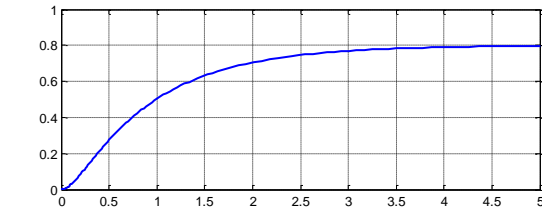
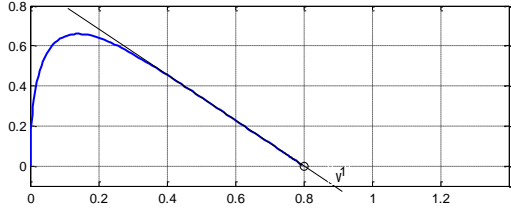


Fig. 6-12a Trajectoire et réponse quand  $\xi > 1$

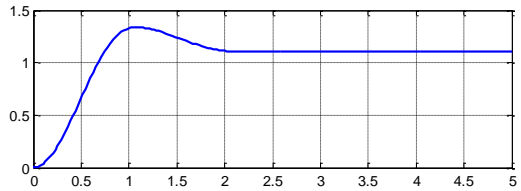
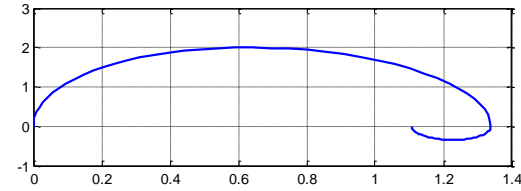


Fig. 6-12b Trajectoire et réponse quand  $\xi < 1$

### III- Effet de la saturation de l'organe P

La sortie  $f_e$  de l'organe de commande proportionnelle P est liée à l'écart  $e = r - \theta$  entre la référence et la réponse du système par la fonction

$$f_e(e) = \begin{cases} -h = -k_p e_s & \text{si } e < -e_s \\ k_p e & \text{si } -e_s \leq e \leq e_s \\ h = k_p e_s & \text{si } e > e_s \end{cases} \quad (6-22)$$

Le diagramme 6-9 montre que la relation entre le signal  $f_e$  et la réponse  $\theta$  est

$$\frac{\theta(s)}{f_e(s)} = \frac{\frac{A\Omega_L}{s(\tau s + 1)}}{1 + \frac{k_t A\Omega_L}{(\tau s + 1)}} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s}$$

$$\text{avec } \omega_n^2 = \frac{A\Omega_L}{\tau} \quad \text{et} \quad 2\xi\omega_n = \frac{1 + k_t A\Omega_L}{\tau}.$$

Pour une référence  $r$  constante, en posant  $x_1 = \theta - r$  et  $x_2 = \dot{\theta}$ , la fonction de transfert précédente se réalise par les équations d'état

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2\xi\omega_n x_2 + \omega_n^2 f_e. \end{aligned} \quad (6-23)$$

D'après (6-22) l'expression de  $f_e$  dépend de la position de l'écart  $e$  par rapport à  $-e_s$  et  $+e_s$ .

a)  $e < -e_s$

En remplaçant dans (6-23)  $f_e$  par  $-h$  et en divisant la deuxième équation par la première, on obtient :

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-2\xi\omega_n x_2 - \omega_n^2 h}{x_2}. \quad (6-24)$$

On voit que la trajectoire a une pente  $-2\sigma = -2\xi\omega_n$  quand  $x_2 \rightarrow \pm\infty$  et une pente nulle quand  $x_2 \rightarrow -a = -\omega_n h / 2\xi$ . Son allure est représentée par la figure 2-13a.

b)  $e > e_s$

La pente a la même expression que dans le cas précédent,  $h$  étant remplacé par  $-h$ . L'allure de la trajectoire est représentée par la figure 2-13b.

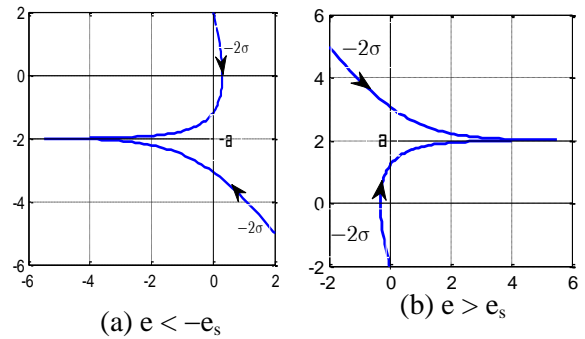


Fig. 6-13 Allure de la trajectoire pour  $e < -e_s$  et  $e > e_s$

c)  $-e_s \leq e \leq e_s$

En remplaçant  $f_e$  par  $k_p(r - \theta) = -k_p x_1$ , les équations (6-23) deviennent :

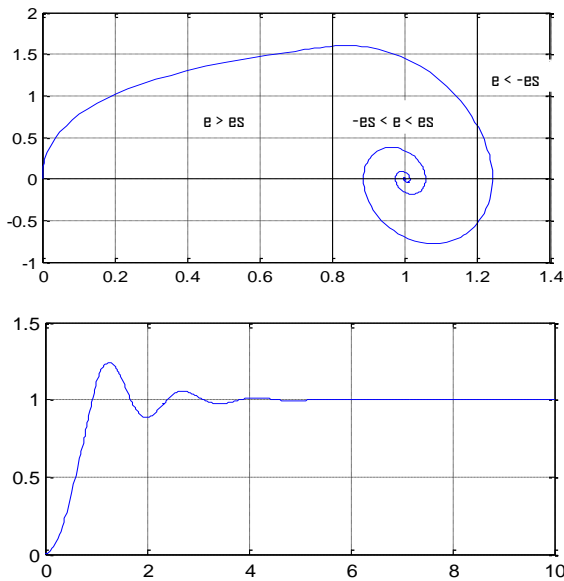
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega_n^2 k_p x_1 - 2\xi\omega_n x_2\end{aligned}\quad (6-25)$$

dont les valeurs propres sont les racines de

$$\lambda^2 + 2\xi\omega_n \lambda + \omega_n^2 k_p = 0.$$

Le point d'équilibre  $(x_1, x_2) = (0, 0) \Leftrightarrow (\theta, \dot{\theta}) = (r, 0)$  est un nœud stable si  $\xi^2 \geq k_p$  et il est un foyer stable si  $\xi^2 < k_p$ .

Les figures suivantes représentent la trajectoire de l'état  $(\theta, \dot{\theta})$  et la réponse temporelle du système représenté à la figure 6-9 lorsque  $\omega_n = 2$ ,  $\xi = 1/2$ ,  $k_p = 5$  et  $e_s = 0.2$  ( $h = 1$ ). La trajectoire est la connexion des trois types a), b) et c) décrits ci-dessus. En général, la saturation de l'organe P augmente le temps de montée et les oscillations.



**Fig. 6-14** Effet de la saturation de l'organe P du système 6-9 sur la trajectoire de l'état et la réponse temporelle.

#### IV- Effet de la saturation de l'actionneur.

La sortie  $f_u$  de l'actionneur est liée au signal de commande  $u_c$  par la fonction :

$$f_u(u_c) = \begin{cases} -h = -Au_s & \text{si } u_c \leq -u_s \\ Au_c & \text{si } -u_s < u_c < u_s \\ h = Au_s & \text{si } u_c \geq u_s \end{cases} \quad (6-26)$$

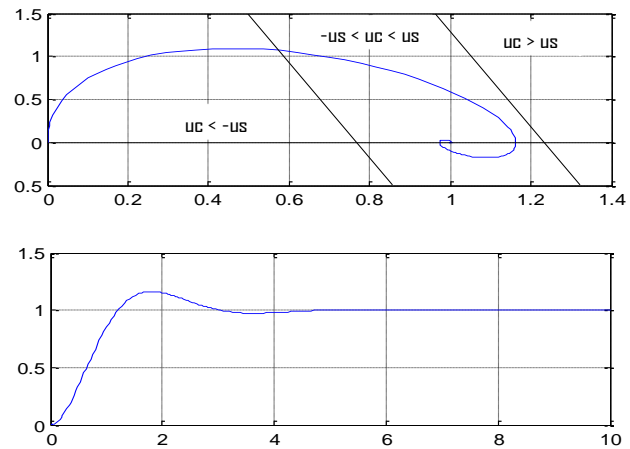
où, d'après le diagramme de la figure 6-9,

$$u_c = k_p(r - \theta) - k_t \dot{\theta} \quad (6-27)$$

et

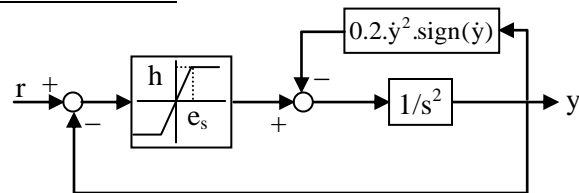
$$\tau \ddot{\theta} + \dot{\theta} = \Omega_L f_u. \quad (6-28)$$

En remplaçant dans (6-28)  $f_u$  par son expression (6-26), on obtient dans les régions  $u_c \leq -u_s$ ,  $-u_s < u_c < u_s$  et  $u_c \geq u_s$  des équations ayant les mêmes formes que dans le cas précédent à part que ces régions sont maintenant limitées par les deux droites inclinées  $k_p(r - \theta) - k_t \dot{\theta} = \pm u_s$  dans le plan  $(\theta, \dot{\theta})$ .



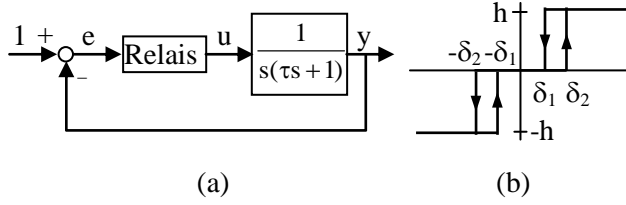
**Fig. 6-15** Effet de la saturation de l'actionneur du système 6-9 sur la trajectoire de l'état et la réponse temporelle.

#### EXERCICE 6-5



- 1) Pour  $e_s = 0.2$  et  $h = 1$ , étudier la trajectoire de l'état  $(y, \dot{y})$  dans les 6 régions du système ci-dessus.
- 2) Vérifier cette étude à l'aide de Matlab.

**Effet d'un relais.** La figure 6-16 représente un procédé de second ordre commandé par un relais à hystérésis et zone morte.



**Fig. 6-16** (a) système de commande,  
(b) caractéristique du relais.

La caractéristique du relais représentée en 6-16b montre que l'action  $u$  est liée à l'écart  $e = 1 - y$  par la relation

$$u(e) = \begin{cases} h & \text{si } e \geq \delta_2 \text{ ou } (e \geq \delta_1 \text{ et } \dot{e} < 0) \\ 0 & \text{si } \begin{cases} (-\delta_1 < e < \delta_2 \text{ et } \dot{e} > 0) \\ \text{ou } (-\delta_2 < e < \delta_1 \text{ et } \dot{e} < 0) \end{cases} \\ -h & \text{si } e \leq -\delta_2 \text{ ou } (e \leq -\delta_1 \text{ et } \dot{e} > 0) \end{cases} \quad (6-29)$$

De la fonction de transfert du procédé on tire que  $\tau \ddot{y} + \dot{y} = u$  dont la réalisation est

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= (u(e) - x_2) / \tau, \quad x_1 = y, x_2 = \dot{y}. \end{aligned} \quad (6-30)$$

Tous les points  $(e, 0)$  tels que  $-\delta_2 < e < \delta_2$  c.à.d. les points  $(x_1, 0)$  avec  $1 - \delta_2 < x_1 < 1 + \delta_2$  sont d'équilibre. Étudions les trajectoires dans chacune des régions définies dans (6-29).

a)  $e \geq \delta_2$  ou  $(e \geq \delta_1 \text{ et } \dot{e} < 0)$

En remplaçant dans (6-30)  $u(e)$  par  $h$  et en résolvant ces équations, on trouve que les équations paramétriques des trajectoires sont données par

$$\begin{aligned} x_2 &= (x_{20} - h)e^{-t/\tau} + h \\ x_1 &= (x_{20} - h)\tau(1 - e^{-t/\tau}) + ht + x_{10}. \end{aligned} \quad (6-31)$$

De l'équation (6-30) on tire que  $dx_2/dx_1$  a une expression de même forme que (6-24) d'où la trajectoire a la même allure que celle représentée sur la figure 6-13b.

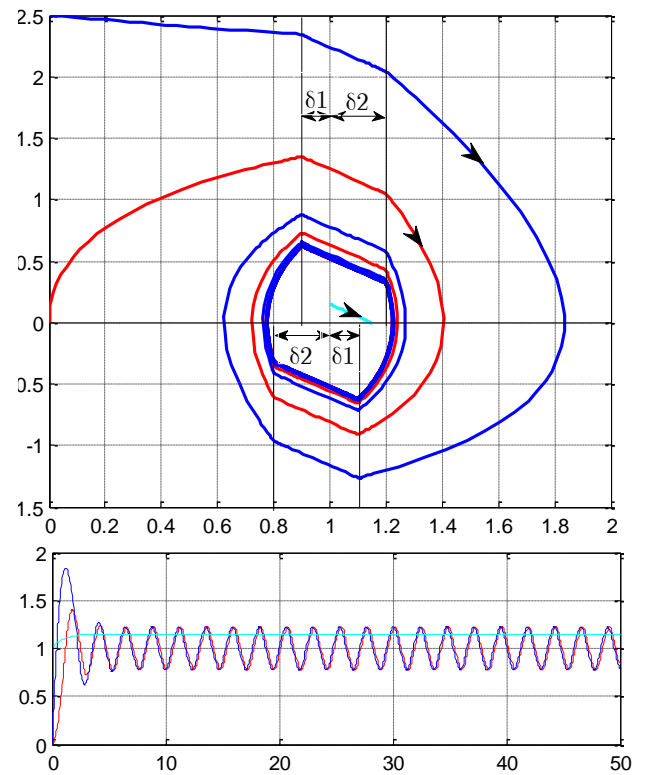
b)  $(-\delta_1 < e < \delta_2 \text{ et } \dot{e} > 0)$  ou  $(-\delta_2 < e < \delta_1 \text{ et } \dot{e} < 0)$

En remplaçant dans (6-30)  $u(e)$  par  $0$ , on trouve que  $dx_2/dx_1 = -1/\tau$ , d'où la trajectoire est une droite de pente  $-1/\tau$ .

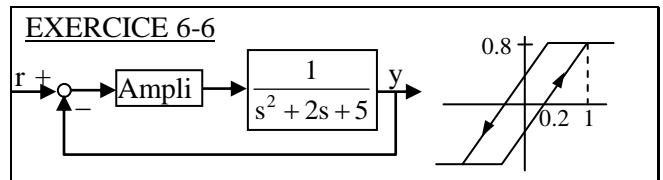
c)  $e \leq -\delta_2$  ou  $(e \leq -\delta_1 \text{ et } \dot{e} > 0)$

On a les mêmes équations que dans le cas a) à condition de remplacer  $h$  par  $-h$ . L'allure des trajectoires est celle représentée sur la figure 6-13a.

La figure 6-17 montre que les trajectoires partant des états  $(0, 0)$  et  $(0, 2.5)$  convergent vers le même cycle limite. Cependant, pour un état initial (a, b) intérieur à la région b) tel que  $|\tau b + a - 1| < \delta_2$  la trajectoire est une ligne droite de pente  $-1/\tau$  qui converge vers un point d'équilibre  $(x_1, 0)$  avec  $x_1$  compris entre  $1 - \delta_2$  et  $1 + \delta_2$ .



**Fig. 6-17** Trajectoires et réponses du système 6-16.



Le système ci-dessus est commandé à travers un amplificateur à hystérésis et saturation. Étudier l'allure des trajectoires dans les différentes régions et vérifier votre étude par Matlab.

## 6-5 PREMIER HARMONIQUE

La méthode du premier harmonique est une technique approchée qui sert à une analyse fréquentielle des systèmes comportant une non-linéarité statique. Pour introduire cette méthode, considérons le système de la figure 6-18 où l'action  $u$  sur le procédé commandé est produite par un relais idéal.

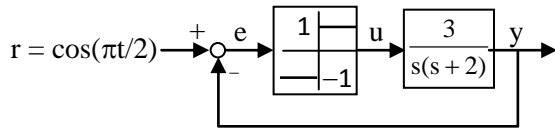
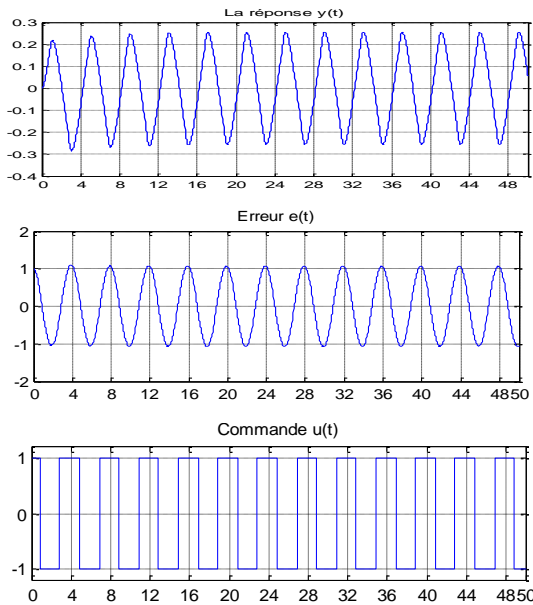


Fig. 6-18 Système commandé par un relais idéal

En introduisant dans Matlab les équations de ce système :  $e = \cos(\pi t / 2) - x_1$ ,

$$u = \begin{cases} 1 & \text{si } e > 0 \\ 0 & \text{si } e = 0 \\ -1 & \text{si } e < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 3u - 2x_2 \end{cases}$$

avec  $x_1 = y$  et  $x_2 = \dot{y}$ , on obtient les graphes suivants de la réponse  $y(t)$ , de l'erreur  $e(t)$  et de la commande  $u(t)$ .



On constate que la réponse  $y$  du procédé commandé est presque sinusoïdale tandis que l'action  $u$  qui lui est appliquée est carrée de même période. Ceci signifie que les harmoniques supérieures de  $u$  sont filtrées par le procédé et seul subsiste l'effet du premier harmonique de  $u$ . Par conséquent, rien ne change en pratique si l'on remplace le relais par une fonction de transfert  $u_1(j\omega)/e(j\omega)$  où  $u_1$  est le premier harmonique de  $u$  et  $\omega$  est la fréquence commune des signaux qui traversent le système (fréquence de  $r$ ). Il est évident que la justification de cette substitution dépend du degré de filtrage des harmoniques supérieures de  $u$  par le procédé.

**Fonction de description.** Considérons un organe statique non linéaire d'entrée  $x$ , de sortie  $y$  et de caractéristique symétrique par rapport à l'origine,  $y = f(x)$ . Pour  $x = a \cos \omega t$ , la réponse  $y(\theta) = f(a \cos \theta)$ ,  $\theta = \omega t$ , est périodique de période  $2\pi$  et elle peut donc s'écrire sous la forme d'une série de Fourier :

$$y(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{jn\theta}, \quad (6-32)$$

$$\text{avec } \alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} y(\theta) e^{-jn\theta} d\theta.$$

Il est clair que  $\alpha_{-n} = \bar{\alpha}_n$  (conjugué de  $\alpha_n$ ) et on a :  $y(\theta) = f(a \cos \theta) = -y(\theta + \pi)$ . D'où (6-32)  $\Rightarrow \alpha_0 = 0$ . En posant  $\alpha_1 = (A/2)e^{j\varphi}$ , le premier harmonique de  $y(\theta)$  est

$$y_1(\theta) = \bar{\alpha}_1 e^{-j\theta} + \alpha_1 e^{j\theta} = A \cos(\theta + \varphi).$$

Le gain et la phase d'une fonction de transfert d'entrée  $x = a \cos \omega t$  et de réponse stationnaire  $y_1 = A \cos(\omega t + \varphi)$  sont respectivement  $A/a$  et  $\varphi$ . Pour une amplitude  $a$  de l'entrée et une fréquence  $\omega$ , l'expression de cette fonction de transfert est donc

$$N(a, \omega) = \frac{A}{a} e^{j\varphi} = \frac{2\alpha_1}{a}. \quad (6-33)$$

Elle est appelée fonction de description (FD) au lieu de fonction de transfert car, contrairement à cette dernière, elle dépend de l'amplitude  $a$  de l'entrée. En remplaçant  $\alpha_1$  par son expression (6-32), on peut écrire (6-33) sous la forme :



$$N(a, \omega) = \frac{Ae^{j\varphi}}{a} = \frac{1}{a}(a_1 - jb_1)$$

avec

$$\begin{cases} a_1 = A \cos \varphi = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(\theta) \cos \theta d\theta, \\ b_1 = A \sin \varphi = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(\theta) \sin \theta d\theta. \end{cases} \quad (6-34)$$

De ces relations on tire :

$$A = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \quad \text{et} \quad \tan \varphi = b_1 / a_1. \quad (6-35)$$

**Non-linéarités de classe A.** Si  $f(x)$  est de classe A c.à.d. si à chaque  $x$  correspond une valeur et une seule,  $y(\theta)$  est pair. Dans ce cas,  $y(\theta) \cdot \cos \theta$  est pair et  $y(\theta) \cdot \sin \theta$  est impair, d'où

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} y(\theta) \cos \theta d\theta \quad \text{et} \quad b_1 = 0 \Rightarrow \varphi = 0.$$

En plus,  $f(x)$  étant symétrique par rapport à l'origine, la fonction  $y(\theta) = f(a \cdot \cos \theta)$  a, comme  $\cos \theta$ , des valeurs opposées en  $\theta$  et  $\pi - \theta$  d'où

$$a_1 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} y(\theta) \cos \theta d\theta. \quad (6-36)$$

À titre d'exemples, déterminons les fonctions de description de quelques éléments non linéaires de classe A.

#### FD d'un relais idéal.

La figure 3-19a montre la caractéristique du relais et, en pointillé, la variation de  $x = a \cdot \cos \theta$  et la figure 3-19b montre la réponse  $y(\theta)$  de ce relais.

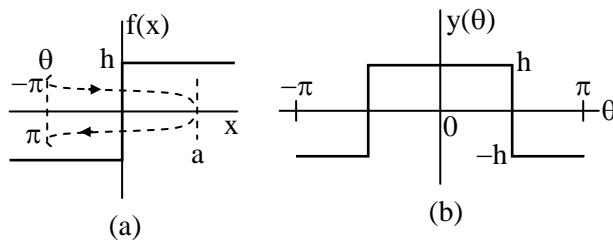


Fig. 6-19 Réponse d'un relais idéal.

Quand  $\theta$  varie de  $-\pi$  à 0,  $x$  se déplace de  $-a$  à  $a$  et  $y(\theta) = f(x)$  suit la caractéristique de gauche à droite. quand  $\theta$  varie de 0 à  $\pi$ ,  $y(\theta)$  suit le chemin inverse et elle est donc paire. Par conséquent,  $b_1 = 0$  et

$$a_1 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} h \cos \theta d\theta = \frac{4h}{\pi} \Rightarrow N(a) = \frac{4h}{\pi a}. \quad (6-37)$$

Il est normal que le gain de cette non linéarité diminue quand  $a$  croît puisque cette croissance ne modifie pas l'amplitude de la sortie.

#### FD d'un relais à zone morte.

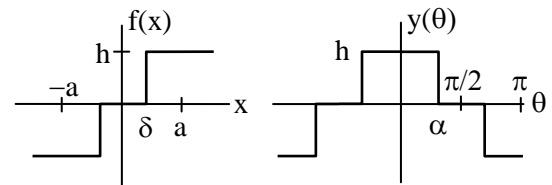


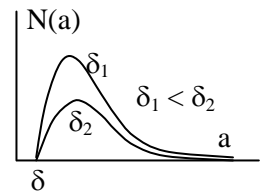
Fig. 6-20 Réponse d'un relais avec zone morte

La figure 6-20 montre la caractéristique et la réponse à  $x = a \cdot \cos \theta$  d'un relais à zone morte de largeur  $2\delta$ . En appliquant (6-36), on tire :

$$a_1 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\alpha} h \cos \theta d\theta = \frac{4h}{\pi} \sin \alpha = \frac{4h}{\pi} \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{a^2}}$$

$$\Rightarrow N(a) = \frac{4h}{\pi a^2} \sqrt{a^2 - \delta^2} \quad (6-38)$$

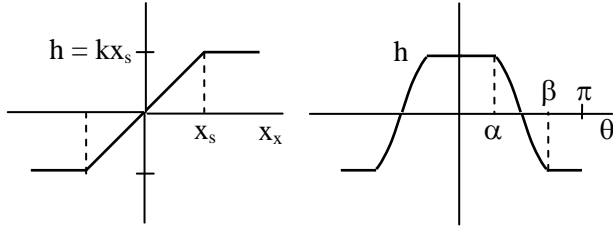
où  $a > \delta$  et  $\alpha$  est l'angle tel que  $\delta = a \cdot \cos \alpha$ . En remplaçant  $\delta$  par 0, on retrouve la FD (6-37) du relais idéal. D'autre part, on peut vérifier que la variation de  $N(a)$  a l'allure ci-contre et que sa valeur maximum est



$$N(a_{\max}) = 2h / \pi \delta \quad \text{avec} \quad a_{\max} = \delta \sqrt{2}. \quad (6-39)$$

#### FD d'une saturation.

La figure 6-21 montre la caractéristique  $f(x)$  et la réponse  $y(\theta)$  à  $x = a \cdot \cos \theta$  d'un amplificateur de gain  $k$  qui se sature à l'extérieur de  $[-x_s, x_s]$ . Sa valeur de saturation est  $\pm h = \pm kx_s$  pour  $|x| > |x_s|$ .



**Fig. 6-21** Caractéristique et réponse d'une saturation.

Les angles  $\alpha$  et  $\beta$  sont définis par  $x_s = a \cos \alpha$  et  $-x_s = a \cos \beta$ , d'où  $\beta = \pi - \alpha$ . La réponse entre ces deux angles est  $y(\theta) = ka \cos \theta$ . Ainsi, pour  $a > x_s$ ,

$$a_1 = \frac{4k}{\pi} \left( \int_0^\alpha x_s \cos \theta d\theta + \int_\alpha^{\pi/2} a \cos^2 \theta d\theta \right)$$

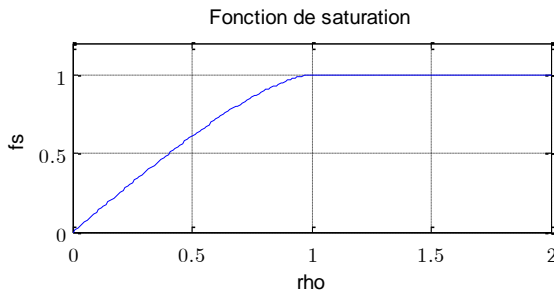
$$= \frac{4k}{\pi} \left[ x_s \sin \alpha + \frac{a}{2} \left( \theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \right]_\alpha^{\pi/2}$$

En posant  $\rho = x_s/a$  et sachant que  $\pi/2 - \alpha = \arcsin \rho$ , un calcul algébrique simple conduit à

$$N(a) = \frac{a_1}{a} = k f_s(\rho) \quad (6-40)$$

$$\text{avec } f_s(\rho) = \frac{2}{\pi} \left( \rho \sqrt{1 - \rho^2} + \arcsin \rho \right).$$

Pour  $a < x_s$  ( $\rho > 1$ ), l'amplificateur ne se sature pas et on a  $N(a) = k$  c.à.d.  $f_s(\rho) = 1$  comme le montre le graphe suivant.

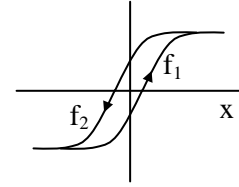


#### EXERCICE 6-7

Déterminer la fonction de description d'un amplificateur de gain  $k$  de zone morte  $[-\delta, \delta]$  et qui se sature à l'extérieur de  $[-x_s, x_s]$ .

**Non-linéarité de classe B.** Considérons une non-linéarité statique biforme, symétrique par rapport à l'origine et dont la caractéristique est constituée de

deux fonctions  $f_1(x)$  et  $f_2(x)$  (figure ci contre). Pour une entrée  $x = a \cos \theta$ ,  $\theta = \omega t$ , la réponse de cette non linéarité n'est plus paire et elle est donnée par



$$y(\theta) = \begin{cases} y_1(\theta) = f_1(a \cos \theta) & \text{si } -\pi \leq \theta < 0, \\ y_2(\theta) = f_2(a \cos \theta) & \text{si } 0 \leq \theta \leq \pi. \end{cases}$$

Tenant compte de (6-34), on a :

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 y_1(\theta) \cos \theta d\theta + \int_0^\pi y_2(\theta) \cos \theta d\theta \right].$$

Mais, comme  $y_1(\theta) \cos(\theta)$  et  $y_2(\theta) \cos(\theta)$  sont des fonctions paires, on peut écrire :

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi \frac{y_1(\theta) + y_2(\theta)}{2} \cos \theta d\theta \quad (6-41)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi y_m(\theta) \cos \theta d\theta$$

où  $y_m$  est la moyenne de  $y_1$  et  $y_2$ . D'autre part, sachant que  $x = a \cos \theta$ , on a :

$$dx = -a \sin \theta d\theta \quad \text{et} \quad y(\theta) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } -\pi \leq \theta < 0, \\ f_2(x) & \text{si } 0 \leq \theta < \pi. \end{cases}$$

D'où, la formule (6-34) donne

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 y_1(\theta) \sin \theta d\theta + \int_0^\pi y_2(\theta) \sin \theta d\theta \right]$$

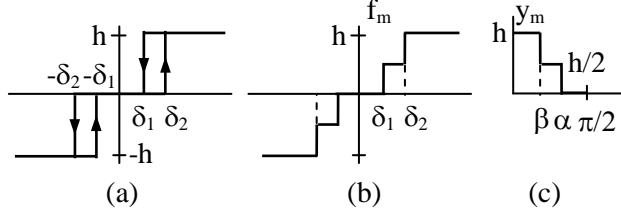
$$= -\frac{1}{\pi a} \left[ \int_{-a}^a f_1(x) dx + \int_a^{-a} f_2(x) dx \right]$$

$$\Rightarrow b_1 = \frac{S}{\pi a} \quad (6-42)$$

$S$  étant la surface comprise entre  $f_1(x)$  et  $f_2(x)$ . Comme  $b_1 \neq 0$ , la sortie d'une non-linéarité de classe B sera déphasée par rapport à l'entrée d'un angle  $\varphi$  tel que  $\tan \varphi = b_1/a_1$ . Par contre, comme nous l'avons vu, l'entrée et la sortie d'une non-linéarité de classe A sont en phase.

### Relais à hystérésis.

La figure 6-22 représente ce relais avec sa caractéristique moyenne  $f_m(x)$  et sa réponse  $y_m(\theta)$  à  $\cos\theta$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ , les angles  $\alpha$  et  $\beta$  étant définis par  $\delta_1 = a \cos \alpha$  et  $\delta_2 = a \cos \beta$ .



**Fig. 6-22** Caractéristique moyenne et réponse d'un relais à hystérésis et zone morte

$$(6-41) \Rightarrow a_1 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} y_m(\theta) \cos \theta d\theta = \frac{2h}{\pi} (\sin \alpha + \sin \beta)$$

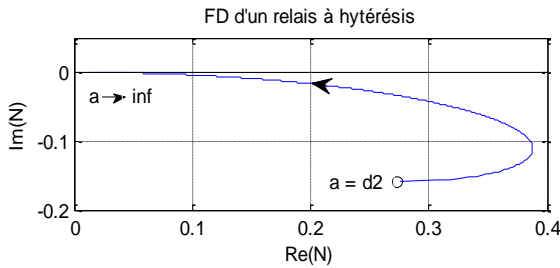
$$= \frac{2h}{\pi a} \left( \sqrt{a^2 - \delta_1^2} + \sqrt{a^2 - \delta_2^2} \right)$$

$$\text{et (6-42)} \Rightarrow b_1 = \frac{2h(\delta_2 - \delta_1)}{\pi a}.$$

Donc

$$N(a) = \frac{2h}{\pi a^2} \left[ \left( \sqrt{a^2 - \delta_1^2} + \sqrt{a^2 - \delta_2^2} \right) - j(\delta_2 - \delta_1) \right]. \quad (6-43)$$

La figure suivante montre dans le plan complexe l'allure de  $N(a)$  quand  $a$  varie de  $\delta_2$  à l'infini.

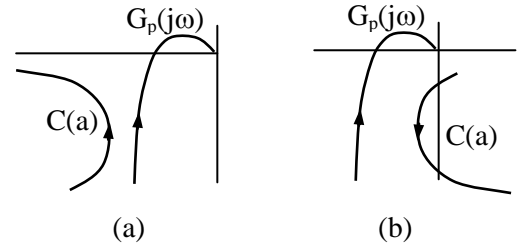


**Fig. 6-23** Système de commande avec non-linéarité

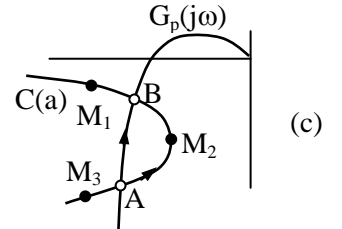
À chaque amplitude  $a$  du signal  $e$  à l'entrée de la non-linéarité correspond la fonction de sensibilité

$$S(j\omega) = \frac{1}{1 + N(a)G_p(j\omega)}.$$

D'après le théorème de Nyquist, le système tend à se stabiliser si le point  $C(a) = -1/N(a)$  est à l'extérieur de la courbe  $G_p(j\omega)$  et à diverger vers l'infini si  $C(a)$  est à l'intérieur de cette courbe. La trajectoire de  $C(a)$  quand  $a$  varie est appelée *lieu critique*. Cette courbe peut avoir, par rapport à  $G_p(j\omega)$ , l'une des trois positions représentées sur la figure 6-24.



**Fig. 6-24** Les positions de  $C(a)$  par rapport à la courbe de Nyquist.



La fonction de description d'un relais à hystérésis sans zone morte (figure ci-contre) s'obtient en faisant  $\delta_1 = -\delta_2 = \delta$ , ce qui donne

$$N(a) = \frac{4h}{\pi a^2} \left[ \left( \sqrt{a^2 - \delta^2} \right) - j\delta \right]. \quad (6-44)$$

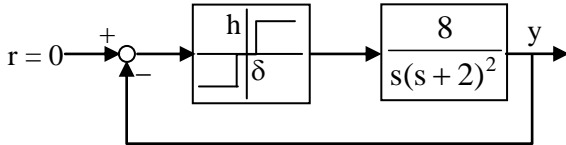
Dans le cas (a), la courbe  $C(a)$  est complètement à l'extérieur de  $G_p(j\omega)$  c.à.d. à gauche de cette courbe quand elle est parcourue dans le sens des  $\omega$  croissants. Le système est donc stable  $\forall a$  et toute excitation initiale s'atténue continuellement et finit par s'annuler.

Dans le cas (b), la courbe  $C(a)$  est complètement à l'intérieur de  $G_p(j\omega)$ . Le système est donc instable  $\forall a$  et toute excitation initiale s'amplifie continuellement et diverge vers l'infini.

Dans le cas (c),  $M_1$  se dirige vers B car, le système étant stable en ce point, l'amplitude a diminué.  $M_2$  se dirige aussi vers B car, le système étant instable en ce point, a augmente. Donc, le point B du plan complexe correspond à un cycle limite stable dont l'amplitude a et la fréquence  $\omega$  vérifient  $C(a) = B$  et  $G_p(j\omega) = B$ . Par contre, le point  $M_2$  s'éloigne de A et il en est de même de  $M_3$  car, le système étant stable en ce point, l'amplitude a diminué. Le point A correspond à un cycle limite instable. La moindre perturbation arrête le système ou le conduit au cycle limite de B.

### Exemple 6-7

Études pour le système suivant l'existence d'un cycle limite.



Nous avons vu en (6-38) et (6-39) que la fonction de description d'un relais à zone morte est

$$N(a) = \frac{4h}{\pi a^2} \sqrt{a^2 - \delta^2}$$

dont le maximum est

$$N(a_{\max}) = 2h / \pi \delta \quad \text{avec} \quad a_{\max} = \delta \sqrt{2}.$$

La fonction critique  $C(a) = -1/N(a) \in \mathcal{R}^-$  et tend vers  $-\infty$  quand  $a \rightarrow \delta$  ou quand  $a \rightarrow \infty$  et on a :

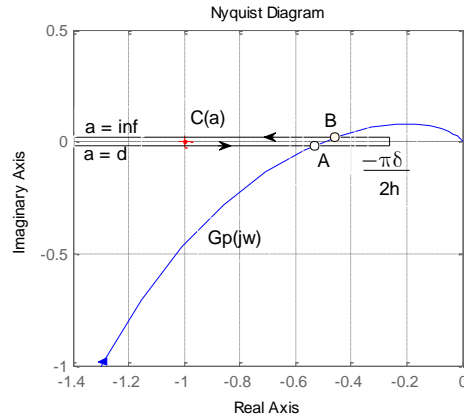
$$C(a_{\max}) = -\pi \delta / 2h.$$

D'autre part,

$$G_p(j\omega) = -\frac{32}{(\omega^2 + 4)^2} - j \frac{8(4 - \omega^2)}{\omega(\omega^2 + 4)^2}$$

Pour  $\omega = 2$ ,  $\text{Im}[G_p] = 0$  d'où la courbe de Nyquist coupe l'axe des réels au point  $\text{Re}[G_p] = -0.5$ . Sur la figure suivante nous avons écarté légèrement de l'axe des réels les parties croissante et décroissante de  $C(a)$  pour montrer que si  $\pi \delta / 2h < 0.5$ ,  $C(a)$  coupe  $G_p(j\omega)$  pour les deux valeurs de a vérifiant

$$C(a) = -0.5 \Leftrightarrow N(a) = \frac{4h}{\pi a^2} \sqrt{a^2 - \delta^2} = 2.$$



Pour  $h = \pi$  et  $\delta = 0.5$ , la solution de l'équation précédente est  $a = (2 \pm 3^{1/2})^{1/2}$ . Seul le cycle limite correspondant à point B est stable. Son amplitude est donc  $a = (2 + 3^{1/2})^{1/2} = 1.93$  et sa fréquence est  $\omega = 2$  rad/sec c.à.d. de période  $\pi$ . Ces résultats sont vérifiés par la simulation suivante.

```
function [x,t] = cyclim;

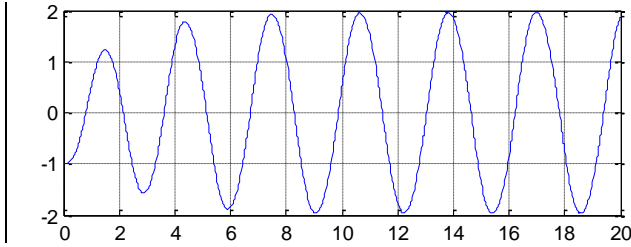
x0 = input('état initil:');
tf = input('durée:');
ee = input('nom des equations:');

opt = odeset('RelTol',1e-5);
[t,x] = ode45(ee,[0 tf],x0,opt);
plot(t,-x(:,1))
end

function xp = cyclrelais(t,x)

ar = (x(1) <= -0.5);
br = (x(1) >= 0.5);
u = pi*ar-pi*br;
xp = [x(2);x(3);-4*x(3)-4*x(2)+8*u];
end
```

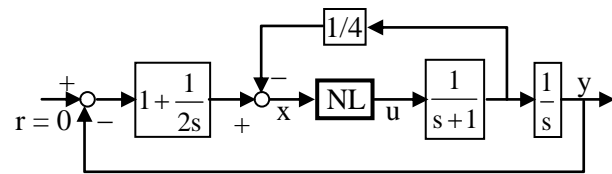
Le choix arbitraire [1 ; 0.01 ; 0.01] de l'état initial, a donné le signal e(t) ci-dessous :



### EXERCICE 6-8

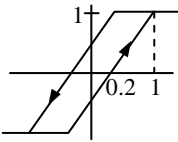
Refaire l'exemple précédent en remplaçant le relais avec zone morte par un relais à hystérésis sans zone morte avec  $\delta = 2$  et  $h = \pi$ .

### EXERCICE 6-9

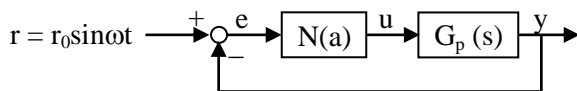


1) Pour le système ci-dessus, déterminer la fonction de transfert de  $u$  à  $x$  et déduire que ce système est équivalent à un système à retour unitaire ayant une chaîne directe constituée de l'élément non-linéaire  $NL$  et d'un organe linéaire.

2) La non-linéarité est un amplificateur à hystérésis et saturation dont la caractéristique est représentée ci-contre. Déterminer l'amplitude et la fréquence du cycle limite quand il existe et vérifier le résultat par simulation.



## 6-7 OSCILLATIONS FOCÉES



**Fig. 6-25** Système de commande comportant une non-linéarité

**Réponse synchrone.** Considérons le système à non-linéarité  $N(a)$  de la figure 6-25 et supposons qu'il est stable ( $\forall a$ ). En admettant que le procédé  $G_p(s)$  filtre suffisamment bien les harmoniques de la sortie  $u$  de  $N(a)$ , la relation entre l'entrée  $e$  de  $N(a)$  et la référence  $r$  est

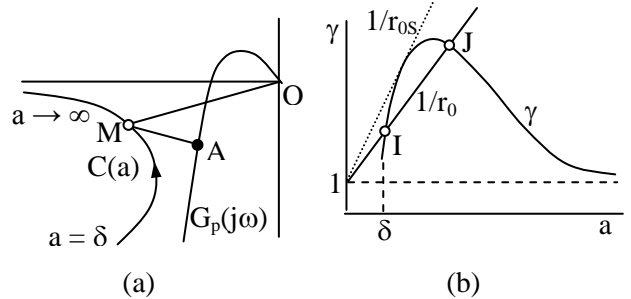
$$\frac{e(j\omega)}{r(j\omega)} = \frac{1}{1 + N(a)G_p(j\omega)} = \frac{-C(a)}{G_p(j\omega) - C(a)}. \quad (6-45)$$

Si la référence est sinusoïdale,  $r = r_0 \sin \omega t$ , et si l'équation (6-45) a une solution, l'écart  $e$  est aussi sinusoïdale de même fréquence  $\omega$  mais d'amplitude  $a$  et de déphasage  $\phi$  tels que

$$\frac{a}{r_0} = \frac{|C(a)|}{|G_p(j\omega) - C(a)|} = \gamma \quad (6-46)$$

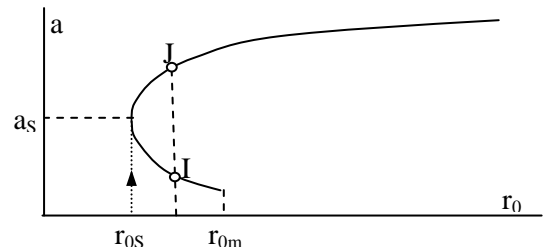
et  $\phi = \pi + \arg[C(a)] - \arg[G_p(j\omega) - C(a)]$ .

Géométriquement, le second membre de (6-46) est le rapport  $\gamma = OM/MA$  de la figure 6-26a où  $A = G_p(j\omega)$  est fixe et  $M = C(a)$  se déplace en fonction de  $a$ . La figure 6-26b montre la variation de ce rapport ainsi que la droite  $\gamma = (1/r_0)a$  quand  $a$  varie de 0 à l'infini. Pour  $r_0 < r_{0s}$  la droite ne coupe pas la courbe  $\gamma = OM/MA$ .



**Fig. 6-26** Interprétation de l'égalité (6-46)  $\gamma$

La solution de (6-46) est à l'intersection de la droite  $\gamma = (1/r_0)a$  et de la courbe  $\gamma = OM/OA$ . À chaque amplitude  $r_0$  de la référence correspond une ou plusieurs valeurs de l'amplitude  $a$  de l'écart  $e$ . La figure 6-27 montre la relation entre  $r_0$  et  $a$  quand la courbe  $OM/OA$  a l'allure de la figure 6-16b.



**Fig. 6-27** Relation entre  $r_0$  et  $a$  déduite de la figure 6-26b

Dans le cas de la figure précédente, la solution n'existe pas si  $r_0 < r_{0S}$  (pas de synchronisme) et la solution est unique si  $r_0 > r_{0m}$ . Si  $r_{0S} < r_0 < r_{0m}$  deux solutions sont possibles selon la condition initiale.

**Effet de saut.** Un phénomène intéressant peut apparaître quand la relation liant les amplitudes  $r_0$  et  $a$  est de la forme représentée sur la figure 6-28.

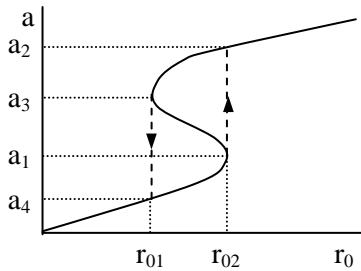
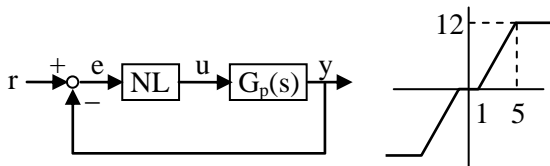


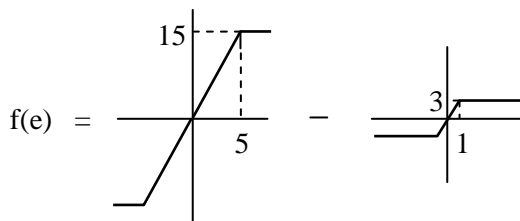
Fig. 6-28 Relation en S entre  $a$  et  $r_0$

Quand  $r_0$  croît de 0 à  $r_{02}$  l'amplitude  $a$  augmente régulièrement de 0 à  $a_1$  mais dès que  $r_0$  dépasse légèrement  $r_{02}$ , l'amplitude saute directement de  $a_1$  à  $a_2$  pour augmenter ensuite régulièrement. Quand  $r_0$  décroît d'une grande valeur, l'amplitude  $a$  diminue régulièrement jusqu'à  $a_3$  où elle saute directement à  $a_4$  dès que  $r_0$  devient inférieur à  $r_{01}$ .

### Exemple 6-8



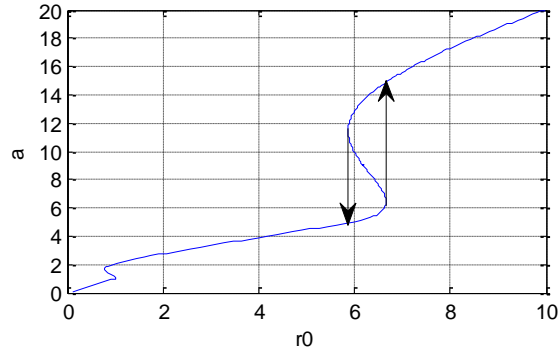
La fonction de transfert du procédé est  $G_p(s) = 4/s(s+1)$  et la non-linéarité NL est un amplificateur à saturation et zone morte. Sa caractéristique  $f(e)$ , représentée ci-dessus, est égale à la différence entre deux saturations sans zone morte définies dans la figure suivante :



La fonction de description de NL est donc

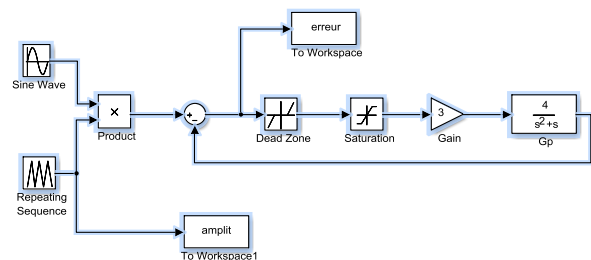
$$N(a) = k[f_s(\rho_1) - f_s(\rho_2)]$$

où  $k = 3$ ,  $\rho_1 = 5/a$ ,  $\rho_2 = 1/a$  et la fonction de saturation  $f_s(\rho)$  est donnée en (6-40). En supposant que  $r = r_0 \sin 2t$  ( $\omega = 2$ ) et sachant que  $r_0$  est liée à l'amplitude  $a$  de  $e$  par  $r_0 = a|1 + N(a)G_p(2j)|$ , on obtient à l'aide de Matlab le graphe suivant.



La courbe montre que, pour  $\omega = 2$  rd/sec et  $r_0 > 5$ , il existe 2 sauts l'un quand  $r_0$  traverse la valeur 6.7 en croissant et l'autre quand  $r_0$  traverse la valeur 5.8 en décroissant. Dans le premier cas l'amplitude  $a$  de  $e$  passe subitement de 6 à 15 et dans le second cas elle passe de 12 à 5. Il est évident que pour des fréquences autres que 2 rad/sec ces sauts se modifient comme ils peuvent disparaître.

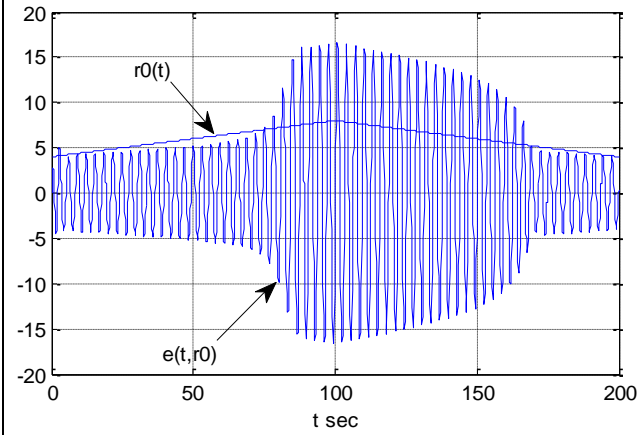
À l'aide du logiciel Simulink de Matlab, nous avons vérifié les résultats précédents en construisant le diagramme suivant.



En modifiant linéairement l'amplitude  $r_0(t)$  de 4 à 8 puis de 8 à 4 durant 200 secondes, nous avons obtenu le graphe ci-dessus qui montre une croissance rapide de l'amplitude  $a$  de l'erreur  $e$  quand  $r_0$  arrive à environ 7 en croissant et une décroissance rapide quand  $r_0$  arrive à environ 5 en décroissant. Les deux sauts de  $a$  deviennent plus nets quand  $r_0$  varie plus lentement (par exemple sur 1000 sec. au lieu de 200) laissant ainsi au système le

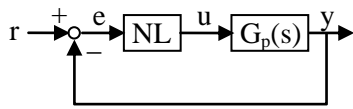


temps d'atteindre son régime quasi-stationnaire à chaque pas de  $r_0$ .



### EXERCICE 6-10

La caractéristique de NL est  $f(x) = x^3$  et  $G_p(s) = 10/s$ . Montrer que le système est stable mais que, pour certaines fréquences, il peut effectuer un saut d'amplitude. Vérifier par simulation.



## 6-8. STABILITÉ DE LYAPUNOV

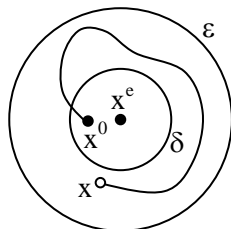
Soit  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  l'équation d'un système autonome et désignons par  $x^0$  l'état initial et par  $x^e$  un point d'équilibre vérifiant  $f(x^e) = 0$ .

### Définitions.

- Le point d'équilibre  $x^e$  est stable si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un  $\delta > 0$  tel que

$$\|x^0 - x^e\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x^e\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0. \quad (6-47)$$

En mots, la distance entre l'état  $x(t)$  et  $x^e$  reste inférieure à  $\varepsilon \forall t$  si initialement cette distance est suffisamment petite, (fig. 6-29).



**Fig. 6-29** Point d'équilibre stable

- Le point d'équilibre  $x^e$  est *asymptotiquement stable* s'il est stable et s'il existe un  $\delta_a > 0$  tel que

$$\|x^0 - x^e\| < \delta_a \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^e. \quad (6-48)$$

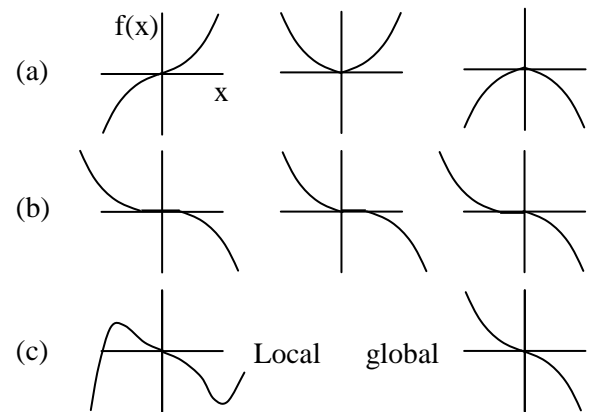
À l'extérieur de la boule  $B(x^e, \delta_a)$ , il peut exister des points à une distance finie de  $x^e$  à partir desquels la trajectoire ne diverge pas vers l'infini mais ne converge pas vers  $x^e$ .

- L'ensemble D des états initiaux à partir desquels la trajectoire converge vers  $x^e$  est appelé *domaine d'attraction* de  $x^e$ .
- Un état d'équilibre  $x^e$  est *asymptotiquement stable au sens large (global)* si la trajectoire  $x(t)$  converge vers  $x^e$  à partir de tout état initial c.à.d. si son domaine d'attraction  $D = \mathbb{R}^n$ . Dans ce cas,  $x^e$  est le seul point d'équilibre asymptotiquement stable.

Dans la suite nous effectuons le changement de variable  $x = x - x^e$  de sorte à placer l'origine de l'espace en un point d'équilibre  $x^e$ .

### Exemple 6-9

Pour  $n = 1$  ( $x$  scalaire) et  $f(0) = 0$ , le 0 est un point d'équilibre instable si, pour  $x > 0$  ou  $x < 0$ , la dérivée  $\dot{x}$  est de même signe que  $x$ , c.à.d. si,  $\forall x > 0$  ou  $\forall x < 0$ ,  $xf(x) > 0$  (fig. 6-30a). Il est stable si et seulement s'il appartient à un voisinage où  $xf(x) \leq 0$  (fig. 6-30b) et il est asymptotiquement stable si et seulement s'il appartient à un voisinage où, pour  $x \neq 0$ ,  $xf(x) < 0$  (fig. 6-30c).



**Fig. 6-30** Types du point d'équilibre 0 : (a) instable, (b) stable, (c) asymptotiquement stable

- Soient  $D \subset \mathbb{R}^n$  un domaine contenant l'origine 0 et  $V(x)$  une fonction de  $D$  dans  $\mathbb{R}$ . On dit que  $V(x)$  est définie positive (dp) dans  $D$  si  $V(0) = 0$  et si,  $\forall x \in D - \{0\}$ ,  $V(x) > 0$ .
- Si  $V(0) = 0$  et  $V(x) \geq 0 \forall x \in D$ , on dit que  $V(x)$  est semi-définie positive (sdp) dans  $D$ .
- Si dans les définitions précédentes l'inégalité  $>$  (resp.  $\geq$ ) est remplacée par  $<$  (resp.  $\leq$ ), on dit que  $V(x)$  est définie négative (dn) dans  $D$  (resp. semi-définie négative (sdn) dans  $D$ ).
- Si  $V(x)$  ne vérifie aucun des cas précédents, on dit que la fonction  $V(x)$  est indéfinie dans  $D$ .

**Exemple 6-10**

La fonction

$$V(x) = x^T Q x, \quad x = (x_1, x_2)$$

où  $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ , symétrique,

est appelée forme quadratique de dimension  $n = 2$ .

Les valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  de  $Q$  sont les zéros du polynôme caractéristique  $\lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2$  dont le discriminant est  $(a-c)^2 + 4b^2 \geq 0$ . Elles sont donc des réelles distinctes si  $a \neq c$  ou  $b \neq 0$  ou elles sont confondues si  $a = c$  et  $b = 0$ . Dans ce dernier cas,  $Q$  est diagonale et  $V(x) = a(x_1^2 + x_2^2)$  d'où, pour  $a \neq 0$ ,  $V(x)$  est dp si  $a > 0$  et dn si  $a < 0$  et ses courbes de niveau sont des cercles centrés à l'origine. Quand les valeurs propres sont distinctes les vecteurs propres  $v^1$  et  $v^2$  constituent une base et, par la transformation  $x = Pz$  où  $P$  est la matrice  $[v^1 \ v^2]$ , la fonction  $V(x)$  prend la forme :

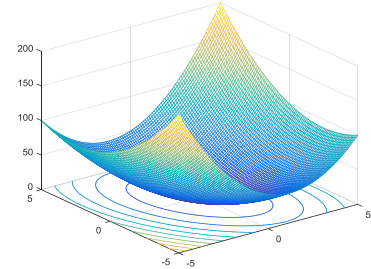
$$V(z) = z^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} z = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2.$$

- $\lambda_1 > 0$  et  $\lambda_2 > 0 \Rightarrow V$  ellipsoïde dp,
- $\lambda_1 < 0$  et  $\lambda_2 < 0 \Rightarrow V$  ellipsoïde dn,
- $\lambda_1 = 0$  ou  $\lambda_2 = 0 \Rightarrow V$  paraboloïde sdp ou sdn,
- $\lambda_1 > 0$  et  $\lambda_2 < 0 \Rightarrow V$  hyperboloïde indéfinie.

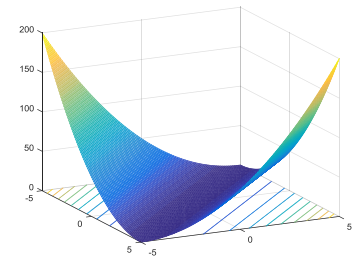
Les figures suivantes représentent, avec leurs courbes de niveau, 3 types de formes quadratiques dont la première est obtenue en écrivant :

```
>> x = -5 : 0.1 : 5;
>> y = -5 : 0.1 : 5;
>> [X,Y] = meshgrid(x,y);
>> Z = 4*X.^2+2*Y.^2+2*X.*Y;
>> meshc(X,Y,Z)
```

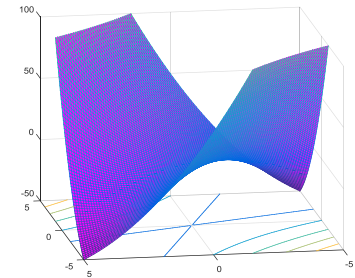
Ellipsoïde dp



Paraboloïde sdp



Hyperboloïde indéfinie



L'exemple précédent se généralise à des formes quadratiques de dimension  $n$  quelconque. Soit  $Q$  une matrice symétrique ( $n \times n$ ) de valeurs propres  $\lambda_i$ . La forme quadratique  $V(x) = x^T Q x$  est dp (resp. dn) si  $\lambda_i > 0 \forall i$  (resp.  $\lambda_i < 0 \forall i$ ), sdp (resp. sdn) si  $\lambda_i \geq 0$  (resp.  $\lambda_i \leq 0$ )  $\forall i$  et indéfinie si les  $\lambda_i$  ne sont pas toutes de même signe. L'exercice suivant donne un exemple d'une fonction dp qui n'est pas de la forme quadratique.

**EXERCICE 6-11**

Montrer que  $V(x) = x_1^2 + x_2^2 / (1 + x_2^2)$  est définie positive et que ses courbes de niveau  $V(x) = c$  sont fermées si  $c < 1$  et tendent vers les asymptotes  $x_1 = \pm\sqrt{c-1}$  si  $c \geq 1$ . Vérifier ces résultats à l'aide de Matlab.

**Théorèmes de Lyapunov.** Considérons un système invariant autonome d'équation  $\dot{x} = f(x)$  avec  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $f(0) = 0$  et désignons par  $D$  un domaine contenant 0 et qui ne contient aucun autre point d'équilibre. Soient  $V(x)$  une fonction de  $D$  dans  $\mathbb{R}$  continument dérivable et  $x(t)$  une trajectoire, solution de  $\dot{x} = f(x)$ . La dérivée de  $V[x(t)]$  par rapport au temps le long de cette trajectoire est

$$\dot{V}[x(t)] = \sum_{i=1}^n \frac{\delta V}{\delta x_i} \dot{x}_i = [\nabla V(x)]^T f(x) \quad (6-49)$$

où  $\nabla V(x)$  est le gradient de  $V$  au point  $x$ . On voit que la fonction  $\dot{V}[x(t)]$  ne dépend que du point  $x$  de la trajectoire et ne dépend pas du temps. Elle est égale au produit scalaire du vecteur  $\nabla V$  par la vitesse  $\dot{x} = f(x)$  et on a  $\dot{V}(0) = 0$ .

**Th-1.** Si  $V(x)$  est dp et  $\dot{V}(x)$  est sdn dans  $D$ , l'origine 0 est un point d'équilibre stable. En plus, si  $V(x)$  est dp et  $\dot{V}(x)$  est dn dans  $D$ , le point d'équilibre 0 est asymptotiquement stable.

#### Justification

a)  $V(x)$  étant continue et dp dans  $D$ , pour tout  $\varepsilon > 0$  tel que  $B(0, \varepsilon) \subset D$ , il existe à l'intérieur de cette boule un domaine limitée par une surface de niveau  $S$  définie par  $V(x) = c > 0$  telle que,  $\forall x \neq 0$  intérieur à  $S$ ,  $0 < V(x) < c$  (fig. 6-31a). Soit  $B(0, \delta)$  une boule intérieure à  $S$ .  $\forall x^0 \in B(0, \delta)$ ,  $V(x^0) < c$  et comme  $\dot{V}(x) \leq 0$  sur la trajectoire  $x(t)$  partant de  $x^0$ , on a  $V[x(t)] < c$  d'où cette trajectoire ne traverse jamais la surface de niveau  $S$  et  $x(t)$  reste donc à l'intérieur de  $B(0, \varepsilon)$  (fig. 6-31b). Ainsi,  $\forall B(0, \varepsilon) \subset D$ ,  $\exists \delta$  tel que  $\forall x^0 \in B(0, \delta)$ ,  $x(t) \in B(0, \varepsilon) \forall t$ . Donc 0 est stable.

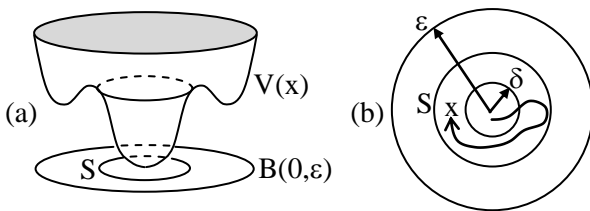
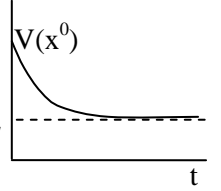


Fig. 6-31 Interprétation du th. 1

b) Si  $\dot{V}(x) < 0$  pour  $x \neq 0$ , la décroissance de  $V(x)$  le long de la trajectoire est monotone. Comme  $V(x)$  est continue et inférieurement bornée par 0, elle tend vers une limite  $L$  et sa dérivée  $\dot{V}(x)$  tend vers 0 (fig. ci-contre). Or, étant définie négative,  $\dot{V}(x)$  ne peut tendre vers 0 que si  $x$  tend vers 0. Le point d'équilibre 0 est donc asymptotiquement stable ■



**Th-2.** Si  $V(x)$  est dp et  $\dot{V}(x)$  est sdn dans  $D$  et s'il n'existe aucune trajectoire complètement incluse dans l'ensemble  $\mathcal{N} = \{x \in D \mid \dot{V}(x) = 0\}$ , le point d'équilibre 0 est asymptotiquement stable.

#### Justification

$\dot{V}(x)$  sdn  $\Rightarrow V(x)$  est non croissante le long d'une trajectoire dans  $D$ . Si l'état  $x(t)$  arrive à l'ensemble  $\mathcal{N}$  en un point  $x^1$ ,  $\dot{V}$  s'annule et  $x(t)$  décrit une courbe de niveau  $C$  sur laquelle  $V(x) = V(x^1)$ . Mais  $x(t)$  ne peut pas rester sur  $C$  sinon  $\dot{V}$  restera nulle et la trajectoire à partir de  $x^1$  sera complètement incluse dans  $\mathcal{N}$ .  $V(x)$  doit donc continuer sa décroissance et, pour les mêmes raisons que th-1, l'état tend vers le point d'équilibre 0 ■

Par des arguments semblables, le théorème de LaSalle ci-dessous généralise th-2 aux ensembles invariants dont la définition est la suivante.

*Un ensemble  $I$  est (positivement) invariant si, pour tout état initial  $x^0 \in I$ , la trajectoire  $x(t)$ ,  $t \geq 0$ , est complètement incluse dans  $I$ .*

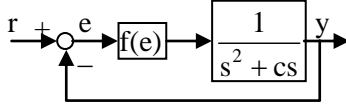
$\Omega = \{x \mid V(x) \leq c \text{ et } \dot{V}(x) \leq 0\}$ , un point d'équilibre et un cycle limite sont des ensembles invariants.

**Th-3 (de La Salle).** Si, pour une fonction  $V(x)$  continue et dérivable dans  $D$ , les trois conditions suivantes sont satisfaites

- $D$  un ensemble borné, fermé et invariant,
- $\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in D$ ,
- $\mathcal{N} = \{x \mid \dot{V}(x) = 0\} \subset D$ ,

toute trajectoire d'état initial  $x^0 \in D$  converge vers le plus grand ensemble invariant  $I \subset \mathcal{N}$ .

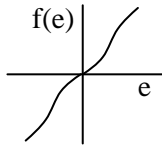
### Exemple 6-11



La figure représente le diagramme bloc d'une masse  $m = 1$  Kg soumise à un frottement visqueux de facteur  $c$  N/(m/s) et à une force  $f(e)$  N dépendante de l'écart  $e$  entre une référence constante  $r$  et le déplacement  $y$  de la masse. Ce dernier a pour équation  $\ddot{y} + c\dot{y} = -\ddot{e} - c\dot{e} = f(e)$  ou, en posant  $x_1 = e$  et  $x_2 = \dot{e}$ , on a :

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -cx_2 - f(x_1).$$

Nous supposons que la force  $f(x_1)$  est continue telle que  $x_1 f(x_1) \geq 0$  comme le montre la figure ci-contre. L'énergie totale, égale à la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle, est donnée par



$$V(x) = \frac{x_2^2}{2} + \int_0^{x_1} f(\xi) d\xi.$$

Cette fonction est dp si  $f(x_1) \neq 0 \forall x_1 \neq 0$  et elle peut être sdp dans le cas contraire. Sa dérivée par rapport au temps est  $\dot{V}(x) = x_2 \cdot \dot{x}_2 + f(x_1) \cdot x_2$  et en remplaçant  $\dot{x}_2$  par son expression, on obtient :

$$\dot{V}(x) = -cx_2^2.$$

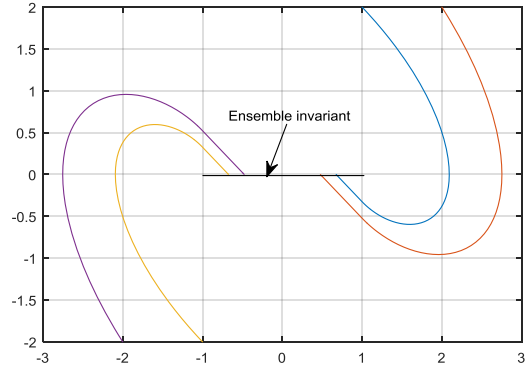
$\dot{V}(x)$  est donc sdn avec

$$\mathcal{N} = \{x \mid x_2 = 0\} \text{ (axe horizontal).}$$

Un ensemble  $I \subset \mathcal{N}$  est invariant si  $\forall x^0 \in I$ , la trajectoire à partir de  $x^0$  reste dans  $I$  (où  $x_2 = 0 \forall t$ ). Sur cette trajectoire les équations du mouvement deviennent

$$\dot{x}_1 = 0 \text{ et } \dot{x}_2 = 0 = -f(x_1).$$

L'ensemble  $I$  est donc constitué par les points d'équilibres  $(x_1, 0)$  où  $x_1$  vérifie  $f(x_1) = 0$ . Ceci est évident puisque la masse ne se déplace plus quand la force s'annule en un moment où la vitesse (l'énergie cinétique) s'annule. Par exemple, si  $f(e)$  est un ampli de gain 1 ayant une zone morte de largeur 2 et si le facteur de frottement est  $c = 1$  N/(m/s), les trajectoires à partir des états initiaux  $(1, 2)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(-1, -2)$  et  $(-2, -2)$  sont celles représentées sur la figure suivante. On voit que la valeur absolue de l'erreur stationnaire est toujours inférieure à 1.



### Exemple 6-12

Soit le système autonome d'équations

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2).$$

Pour appliquer le théorème de LaSalle, essayons la fonction définie positive

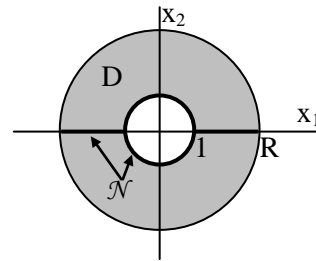
$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2).$$

- Sa dérivée par rapport au temps est

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 \\ &= x_1 x_2 + x_2 [-x_1 + x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2)] \\ &= -x_2^2[(x_1^2 + x_2^2) - 1]. \end{aligned}$$

-  $\dot{V}(x) \leq 0$  dans l'ensemble borné fermé  $D$  limité par les deux cercles  $C_1(O, 1)$  et  $C_2(O, R)$ ,  $R \geq 1$ .

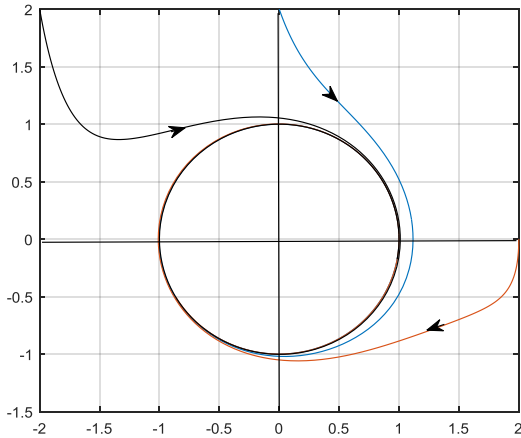
-  $\mathcal{N} = C_1(O, 1) \cup [-R, -1] \cup [1, R] \subset D$  (fig. suivante)



- L'ensemble  $A = [-R, -1] \cup [1, R]$  n'est pas invariant car si  $x_2(t) = 0 \forall t$ , on déduit des équations du système que  $x_1 = 0$ . Or le point  $(0, 0) \notin A$ . Par contre,  $C_1(O, 1)$  est invariant puisque, en effectuant la substitution  $x_1^2 + x_2^2 = 1$  dans les équations du système, on obtient  $\dot{x}_1 = x_2$  et  $\dot{x}_2 = -x_1$  d'où

$$x_1 dx_1 + x_2 dx_2 = 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = k$$

où  $k$  est une constante dépendante des conditions initiales. Si l'état initial est sur  $C_1(O, 1)$ ,  $k = 1$  et l'état reste toujours sur ce cercle. Ainsi, le plus grand ensemble invariant dans  $\mathcal{N}$  est  $I = C_1(O, 1)$  et, comme  $D$  est invariant (justifier), toute trajectoire partant d'un état initial  $x^0 \in D$  converge vers  $I$  et effectue un cycle limite. La figure suivante est une vérification de ce résultat.



#### EXERCICE 6-12

Vérifier par Matlab que le cycle limite de l'exemple 6-12 précédent est stable et donner une justification à cette constatation.

### 6-9 CONSTRUCTION DE LA FONCTION DE LYAPUNOV

Les conditions des théorèmes de Lyapunov ne sont que suffisantes. Par exemple, si une fonction  $V(x)$  est dp sans que  $\dot{V}(x)$  soit dn ou sdn cela ne veut pas dire que l'origine est nécessairement instable. Il est possible qu'une autre fonction  $V(x)$  satisfasse ces conditions, ce qui rend délicat le choix de cette fonction. Nous donnerons dans ce paragraphe des méthodes qui facilitent l'investigation de la stabilité d'un état d'équilibre. Commençons par le cas des systèmes linéaires.

**Stabilité des systèmes linéaires.** L'équation d'état d'un système linéaire est de la forme :

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

où  $A$  est une matrice  $(n \times n)$ .

Soit  $P$  une matrice réelle symétrique et  $V(x) = x^T P x$  la forme quadratique associée à  $P$ . On a :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T (A^T P + P A) x \\ &= -x^T Q x. \end{aligned} \quad (6-50)$$

Si la matrice symétrique  $Q$  est dp et la matrice  $P$ , solution de

$$A^T P + P A = -Q, \quad (6-51)$$

est dp, l'origine est asymptotiquement stable.

Inversement, si l'origine est asymptotiquement stable, pour toute matrice  $Q$  dp, la solution  $P$  de (6-51) est dp. En effet,  $P$  étant réelle et symétrique, on démontre que ses vecteurs propres unitaires  $v^1, \dots, v^n$  constituent une base orthonormée dans  $\mathbb{R}^n$ . D'où, par la transformation  $x = Tz$  où  $T = [v^1 \dots v^n]$ , l'équation (6-50) devient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(z) &= \dot{z}^T \Lambda z + z^T \Lambda \dot{z}, \quad \Lambda = T^T P T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \\ \Rightarrow \dot{V}(z) &= 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i \dot{z}_i < 0 \quad \forall z \neq 0 \quad \text{car } Q < 0. \end{aligned}$$

Par intégration, on déduit que  $\forall t$

$$V(t) = 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_{z_i(0)}^{z_i(t)} z_i dz_i = 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i [z_i^2(t) - z_i^2(0)] < 0.$$

Comme l'origine est asymptotiquement stable,  $z(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$  et

$$V(t) \rightarrow -2 \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i^2(0) < 0 \quad \forall z(0) \neq 0$$

ce qui implique que  $\lambda_i > 0 \quad \forall i$  d'où  $P$  dp.

Ainsi, un système linéaire est asymptotiquement stable si et seulement si, pour toute matrice symétrique  $Q$  dp, la solution  $P$  de l'équation de Lyapunov (6-51) est dp.

Tenant compte du théorème th.2 et de (6-50), la stabilité asymptotique est aussi assurée si  $Q$  sd,  $P$  dp et aucune trajectoire de  $x$ , autre que  $x(t) = 0 \forall t$ , n'est complètement incluse dans  $\mathcal{N} = \{x \mid x^T Q x = 0\}$ .

### Exemple 6-13

Les valeurs propres  $-1$  et  $-2$  de la matrice  $A$  du système linéaire

$$\dot{x} = Ax = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x$$

étant négative, il est asymptotiquement stable. Il admet donc une fonction de Lyapunov  $V(x)$  vérifiant les conditions du théorème th-1 ou th-2. Une candidate est la forme quadratique  $V(x) = x^T P x$  où  $P$  est la solution de l'équation de Lyapunov (6-51) avec  $Q$  une matrice définie positive quelconque. En choisissant  $Q = I$ , les éléments  $p_{ij}$  de  $P$  vérifient

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$-2p_{11} = -1 \Rightarrow p_{11} = 1/2$$

$$-3p_{12} + p_{11} = 0 \Rightarrow p_{12} = 1/6 = p_{21}$$

$$2p_{12} - 4p_{22} = -1 \Rightarrow p_{22} = 1/3$$

$$\begin{aligned} \text{et } V(x) &= \frac{1}{6}(3x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2) \\ &= \frac{1}{6}[2x_1^2 + x_2^2 + (x_1 + x_2)^2]. \end{aligned}$$

Il est facile de voir que  $V(x)$  est dp. D'autre part, en substituant  $\dot{x}_1 = -x_1 + x_2$  et  $\dot{x}_2 = -2x_2$  dans

$$\dot{V}(x) = \frac{1}{6}(6x_1\dot{x}_1 + 4x_2\dot{x}_2 + 2\dot{x}_1x_2 + 2x_1\dot{x}_2),$$

on vérifie bien que  $\dot{V}(x) = -(x_1^2 + x_2^2) \text{ dn}$ .

### EXERCICE 6-13

Soit le système  $\dot{x} = Ax = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x$ .

En choisissant  $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ , montrer que ce système est asymptotiquement stable et que les matrices  $P$  et  $Q$  vérifient l'équation de Lyapunov.

Passons maintenant à la construction d'une fonction de Lyapunov pour des systèmes non-linéaires. Nous donnons deux méthodes, celles de Krasovsky et du gradient variable.

**Méthode de Krasovsky.** Soit  $\dot{x} = f(x)$  avec  $f(0) = 0$  les équations d'état d'un système autonome et posons  $A(x) = \delta f / \delta x$  le jacobien de  $f(x)$ . Admettons que la fonction  $V(x) = f^T(x)f(x) = \|f(x)\|^2$  est dp dans un domaine  $D$  contenant  $0$ . On a :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T A^T(x)f(x) + f^T(x)A(x)\dot{x} \\ &= \dot{x}^T [A^T(x) + A(x)]\dot{x}. \end{aligned}$$

Or,  $\dot{V}(x) \text{ dn} \Leftrightarrow [A^T(x) + A(x)] \text{ dn}.$

Donc, si la fonction  $V(x) = f^T(x)f(x)$  est dp dans un domaine  $D$  contenant l'origine et si la matrice symétrique  $F(x) = A^T(x) + A(x)$  est dn dans un domaine  $D'$  contenant l'origine, le système est asymptotiquement stable dans  $D \cap D'$ .

Cette condition de stabilité n'est que suffisante. Son application est facilitée par le théorème de Sylvester suivant.

Une matrice réelle symétrique  $M = \{a_{ij}\}$  est dp si ces mineurs principaux c.à.d. les déterminants

$$a_{11}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots, M$$

sont tous positifs.

### Exemple 6-14

Les points d'équilibre du système autonome

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1x_2 - x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_1x_2 - x_2 \end{aligned} \quad (1)$$

sont  $(0, 0)$  et  $(1, 1)$ .

a) Stabilité de  $(0, 0)$

La fonction

$$V(x) = (x_1x_2 - x_1)^2 + (x_1x_2 - x_2)^2$$

est dp dans tout le plan à part le point  $(1, 1)$ .

Le jacobien du second membre de (1) est

$$A(x) = \begin{pmatrix} x_2 - 1 & x_1 \\ x_2 & x_1 - 1 \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème de Sylvester, la matrice



$$F(x) = A(x) + A^T(x) = \begin{pmatrix} 2(x_2 - 1) & x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 & 2(x_1 - 1) \end{pmatrix}$$

est dn  $(-F(x))$  dp dans l'ensemble  $D_1'$  des points  $x$  vérifiant les deux inégalités

$$2(x_2 - 1) < 0, \quad (x_1 + x_2)^2 - 4(x_2 - 1)(x_1 - 1) < 0.$$

L'état  $(0, 0) \in D_1'$  et il est stable dans ce domaine.

À noter qu'en posant  $y_1 = x_1 - x_2$  et  $y_2 = x_1 + x_2$ , les inégalités précédentes s'écrivent :

$$y_2 - y_1 - 2 < 0, \quad y_1^2 + 4y_2 - 4 < 0.$$

#### b) Stabilité de $(1, 1)$

En effectuant le changement de variables  $z_1 = x_1 - 1$  et  $z_2 = x_2 - 1$ , les équations (1) du système s'écrivent

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_1 z_2 + z_2, \\ \dot{z}_2 &= z_1 z_2 + z_1. \end{aligned} \quad (2)$$

La fonction

$$V(z) = (z_1 z_2 + z_2)^2 + (z_1 z_2 + z_1)^2$$

est dp dans tout le plan à part  $(z_1, z_2) = (-1, -1)$  c.à.d.  $(x_1, x_2) = (0, 0)$ .

Le jacobien du second membre de (2) est

$$A(z) = \begin{pmatrix} z_2 & z_1 + 1 \\ z_2 + 1 & z_1 \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème de Sylvester, la matrice

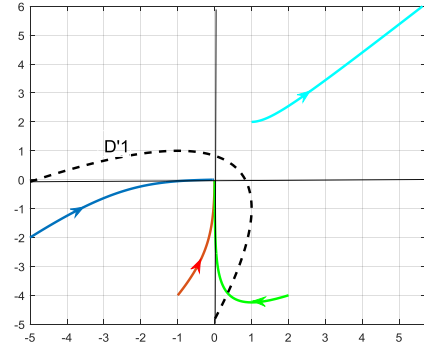
$$F(z) = A(z) + A^T(z) = \begin{pmatrix} 2z_2 & z_1 + z_2 + 2 \\ z_1 + z_2 + 2 & 2z_1 \end{pmatrix}$$

est dn dans l'ensemble  $D_2'$  des points  $z$  vérifiant

$$z_2 < 0, \quad (z_1 + z_2 + 2)^2 - 4z_1 z_2 < 0$$

mais comme l'origine du plan  $(z_1, z_2)$  n'appartient pas à  $D_2'$ , on ne peut pas conclure qu'il existe une région où le point d'équilibre  $(x_1, x_2) = (1, 1)$  est

stable. D'autre part, la condition de Krasovsky n'étant que suffisante, on peut seulement affirmer que toute trajectoire partant d'un état initial intérieur à  $D_1'$  converge vers l'origine mais, comme le montre la figure suivante, si l'état initial est extérieur à  $D_1'$  la trajectoire peut converger vers l'origine ou diverger vers l'infini.



#### EXERCICE 6-14

a) Déterminer les points d'équilibre du système

$$\dot{x}_1 = -x_1^2 + 2x_2$$

$$\dot{x}_2 = 2x_1 - x_2^2$$

et étudier leur stabilité locale.

b) Déterminer par Krasovsky une région d'attraction du point d'équilibre stable.

c) Vérifier par Matlab

**Méthode du gradient variable.** On construit une fonction de Lyapunov  $V(x)$  à partir de sa dérivée

$$\dot{V}(x) = [\nabla V]^T \dot{x} = [\nabla V]^T f(x) \quad (6-52)$$

où l'on écrit le gradient sous la forme

$$\nabla V = \begin{pmatrix} \nabla_1 V \\ \vdots \\ \nabla_n V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}, \quad \nabla_i V = \frac{\partial V}{\partial x_i}.$$

Les facteurs  $a_{ij}$  ci-dessus peuvent dépendre de l'état  $x$  et seront choisis de sorte à satisfaire les conditions suivantes :

1)  $\nabla V$  est le gradient d'une fonction scalaire  $V(x)$ .

2)  $\dot{V}(x) = [\nabla V]^T f(x)$  est dn ou sdn.

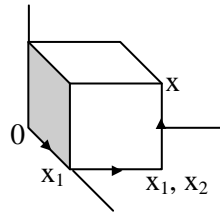
3)  $V(x)$  est dp.

Comme  $\frac{\delta \nabla_i V}{\delta x_j} = \frac{\delta^2 V}{\delta x_j \delta x_i}$  et  $\frac{\delta \nabla_j V}{\delta x_i} = \frac{\delta^2 V}{\delta x_i \delta x_j}$ ,

la condition 1 sera assurée si les  $n(n-1)/2$  équations en  $a_{ij}$  suivantes sont satisfaites :

$$\frac{\delta \nabla_i V}{\delta x_j} = \frac{\delta \nabla_j V}{\delta x_i} \quad i \neq j. \quad (6-53)$$

Il reste  $n(n+1)/2$  facteurs  $a_{ij}$  libres qu'on choisit de sorte à satisfaire la condition 2. Enfin, on vérifie la condition 3 ( $V(x)$  dp), en intégrant  $dV = (\nabla V)dx$  le long d'un chemin quelconque. Par exemple, le long du chemin ci-



$$V(x) = \int_0^{x_1} \nabla_1 V(\xi, 0, 0) d\xi + \int_0^{x_2} \nabla_2 V(x_1, \xi, 0) d\xi + \int_0^{x_3} \nabla_3 V(x_1, x_2, \xi) d\xi.$$

### Exemple 6-15

Considérons le système

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 + x_2^3 \end{aligned}$$

dont le seul point d'équilibre est l'origine (0, 0). D'après (6-52), la dérivée de la fonction de Lyapunov recherchée est de la forme

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)x_2 \\ &\quad + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)(-x_1 - x_2 + x_2^3) \\ &= -a_{21}x_1^2 - [a_{22}(1-x_2^2) - a_{12}]x_2^2 \\ &\quad + [a_{11} - a_{22} - a_{21}(1-x_2^2)]x_1x_2. \end{aligned}$$

$\dot{V}(x)$  sera dn ou sdn si

$$a_{21} \geq 0, a_{22}(1-x_2^2) \geq a_{12} \text{ et } a_{11} = a_{22} + a_{21}(1-x_2^2) \quad (1)$$

En choisissant  $a_{12}$ ,  $a_{21}$  et  $a_{22}$  des constantes, tenant compte de (1), la condition de symétrie (6-53) s'écrit

$$x_1 \frac{\delta a_{11}}{\delta x_2} + a_{12} = a_{21} \Leftrightarrow a_{21}(2x_1x_2 + 1) = a_{12}.$$

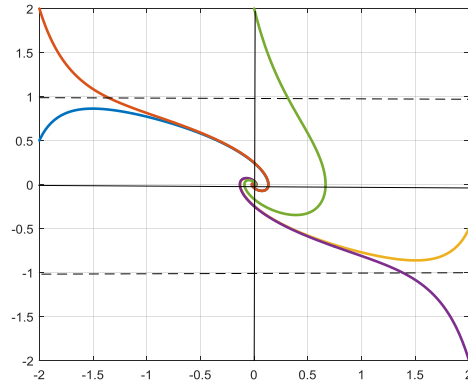
Si  $a_{21} = a_{12} = 0$ , l'égalité précédente sera vraie quels que soient  $x_1$  et  $x_2$  et les conditions (1) deviennent  $a_{22}(1-x_2^2) \geq 0$  et  $a_{11} = a_{22}$ . Ainsi, pour  $a_{22} > 0$  et dans le domaine  $|x_2| < 1$  qui contient le point d'équilibre (0, 0), la fonction  $\dot{V}(x) = -a_{22}(1-x_2^2)x_2^2$  est sdn. Comme, d'après les équations du système,

$$x_2(t) = 0 \quad \forall t \Rightarrow x = (0, 0),$$

et que

$$V(x) = \int_0^{x_1} a_{11} \xi d\xi + \int_0^{x_2} a_{22} \xi d\xi = \frac{a_{22}}{2} (x_1^2 + x_2^2)$$

est dp, l'origine est stable dans la bande  $|x_2| < 1$ . Cependant, la figure suivante montre que la région d'attraction est plus large que cette bande et qu'un autre choix des facteurs  $a_{ij}$  peut conduire à un autre domaine de convergence vers l'origine.



### EXERCICE 6-15

Montrer par la méthode du gradient variable que l'origine du système

$$\dot{x}_1 = -2x_1^3 - x_1^2x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1x_2^2 - x_2^3$$

est asymptotiquement stable dans le sens large.

**Instabilité.** Si, dans un domaine contenant l'origine, une fonction  $V(x)$  est dp sans que  $\dot{V}(x)$  soit dn ou sdn cela ne veut pas dire que l'origine est nécessairement instable. Le théorème suivant donne une condition suffisante de l'instabilité.

**Th-4.** Soit  $V(x)$  une fonction continue et dérivable dans un domaine  $D$  et  $D^+ = \{x \in D \mid V(x) > 0\}$ . Si  $\dot{V}(x) > 0$  dans  $D^+$  et si l'origine  $0$  est un point d'équilibre qui appartient à  $D^+$  ou à sa frontière  $\delta D^+$ , ce point d'équilibre est instable.

#### Justification

Il s'agit de démontrer qu'il existe dans  $D$  une boule fermée  $B(0, \varepsilon)$  telle que  $\forall \delta < \varepsilon$ , il existe un état initial  $x^0 \in B(0, \delta)$  et un instant  $t$  tel que  $\|x(t)\| > \varepsilon$ . La fonction  $V(x)$  étant continue elle admet un maximum  $V_m$  dans  $B(0, \varepsilon)$  et comme  $0 \in D^+ \cup \delta D^+$ ,  $\forall \delta < \varepsilon$ ,  $\exists x^0 \in B(0, \delta)$  tel que  $V(x^0) > 0$ . Sachant que  $\dot{V}(x) > 0$  dans  $D^+$ ,  $V(x)$  reste dans  $D^+$  en croissant strictement à partir de  $V(x^0)$ . Il dépasse donc  $V_m$  c.à.d.  $x(t)$  sort de  $B(0, \varepsilon)$  ■

#### Exemple 6-16

Considérons le système

$$\dot{x}_1 = x_1, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - x_2$$

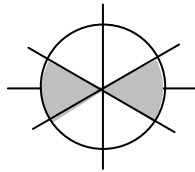
et la fonction continue et dérivable  $V(x) = x_1^2 - 2x_2^2$  qui s'annule au point d'équilibre  $0$ . Sa dérivée par rapport au temps est

$$\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 - 4x_2\dot{x}_2 = 2(x_1 + x_2)^2 + 2x_2^2.$$

Cette fonction étant dp et  $0 \in \delta D^+$

où  $D^+ = \{x \mid 2x_2^2 < x_1^2\}$

est l'ensemble représenté en gris ci-contre, le point d'équilibre  $0$  est instable. Ceci est évident puisque le système a une valeur propre positive.

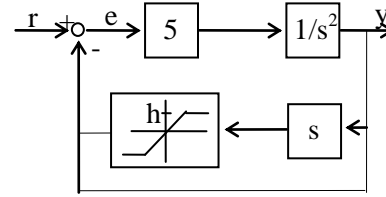


#### AUTRES EXERCICES ET COMPLÉMENTS

**6-16.** Étudier selon la valeur de  $a$  la nature des points d'équilibre du système suivant.

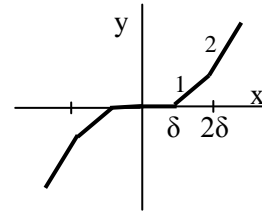
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1 - x_1^3, \\ \dot{x}_2 &= -x_2. \end{aligned}$$

**6-17.** Pour le système suivant, la saturation a une pente  $k = 1$  et un niveau  $h = 1$  et la référence  $r = 1$  est appliquée à partir d'un instant où le système est inerte.



Écrire les expressions de  $x_1(t) = y(t)$  et de  $x_2(t) = dy(t)/dt$  pour  $0 \leq t < \infty$ . Représenter la trajectoire et vérifier le résultat par Matlab.

**6-18.** La non-linéarité polygonale symétrique suivante est formée d'un segment horizontal, de deux segments de pente 1 et de deux demi-droites de pente 2.

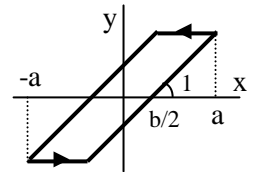


Montrer que sa fonction de description est

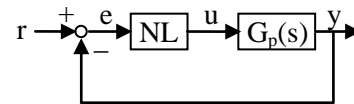
$$N(a) = -f_s(\delta/a) - f_s(2\delta/a) + 2$$

où  $f_s$  est la fonction de saturation définie en (6-40).

**6-19.** La figure ci-contre est la caractéristique d'un jeu d'engrenage (backlash) de largeur  $b$ . Déterminer sa fonction de description et représenter son gain  $M$  et sa phase  $\varphi$ .



**6-20.** On considère le système suivant



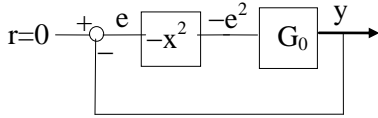
où NL est un relais idéal de valeurs  $\pm 1$  et

$$G_p(s) = \frac{e^{-ds}}{s(s+1)}.$$

1) Écrire en fonction de  $u$  et des conditions initiales l'équation de la trajectoire de  $(e, \dot{e})$ . dans les deux cas  $d = 0$  et  $d = 0.5$  sec. Montrer que si  $d = 0$ ,  $e \rightarrow 0$  et si  $d = 0.5$ ,  $e$  rentre dans un cycle limite dont l'amplitude et la fréquence sont à déterminer.

2) Pour  $r = 0$  et  $d = 0.5$  sec, déterminer l'amplitude et la fréquence du cycle limite par la méthode du premier harmonique et pour  $r = R \sin t$ , déterminer la plus faible valeur de  $R$  qui produit des oscillations synchrones avec l'entrée  $r$ .

### 6-21.



Pour le système représenté ci-dessus où

$$G_0(s) = \frac{1}{s^2 + 0.5s + 2}$$

déterminer par la méthode du gradient variable une région dans le plan  $(e, \dot{e})$  dans laquelle le point  $(0,0)$  est asymptotiquement stable. Représenter les courbes de niveaux de  $V(x)$  et indiquer la région d'attraction de  $(0, 0)$ .

**6-22 Méthode de Krsovsky généralisée.** Soit  $\dot{x} = f(x)$  un système autonome pour lequel l'origine 0 est le seul point d'équilibre dans un domaine  $D$  et  $P$  une matrice symétrique dp. Montrer que 0 est asymptotiquement stable si

$$A^T(x)P + PA(x) \text{ dn dans } D,$$

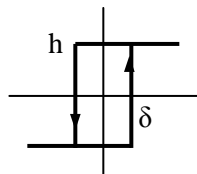
$A(x)$  étant le jacobien  $\delta f / \delta x$  de  $f$ . Démontrer par cette méthode que pour

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

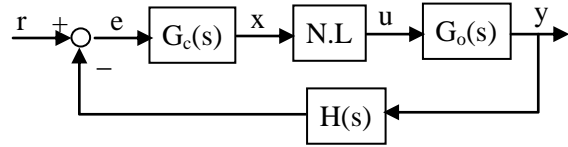
$$\dot{x}_2 = -x_1^3 - x_2^3,$$

l'origine est asymptotiquement stable au sens large.

**6-23.** Sous quelle condition le système ci-dessous produit un cycle limite si N.L est le relais à hystérésis représenté ci-contre et



$$G_c(s) = \frac{1+s}{s}, \quad G_0(s) = \frac{k}{s^2}, \quad H(s) = 1 + \tau s$$



Pour  $r = 0$ ,  $\tau = 1/4$ ,  $k = 10$ ,  $h = 4$  et  $\delta = 1$ , estimer l'amplitude et la fréquence de la sortie  $y$ . Simuler ce système et expliquer la cause de l'imprécision des résultats théoriques.

**6-24.** Considérons le schéma bloc de l'exercice précédent avec  $G_c(s) = 1$ ,  $G_0(s) = 3/[2s(s+1)]$ ,  $H(s) = e^{-sd}$  et N.L un relais à zone morte sans hystérésis ayant  $\delta = h = 1$ . Déterminer la valeur maximum  $d_m$  de  $d$  pour laquelle le système est stable. Quelles sont l'amplitude et la fréquence du cycle limite si  $d = (3/2)d_m$ ? Construire un compensateur qui stabilise le système pour  $d = 1.5$  sec avec une marge de phase  $> 20^\circ$ . Étudier les possibilités d'apparition du phénomène de saut. Vérifier les résultats précédents par simulation.

**6-25.** Soit le système

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - 4),$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 4).$$

a) Montrer que le cercle  $C(0, 2)$  est invariant.

b) En considérant la fonction  $V(x) = (x_1^2 + x_2^2 - 4)^2$ , montrer que  $C(0, 2)$  est un cycle limite stable et que l'origine est un état d'équilibre instable.

**6-26 Introduction à la commande par glissement** Considérons le système

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = f(x) + u$$

où  $f(x)$  est une fonction inconnue (comportant des perturbations ou des incertitudes) et  $u$  le signal de commande à déterminer. Ce signal doit amener le système de son état initial  $x^0$  en un état  $x^a$  situé sur la droite  $D$  d'équation  $ax_1 + x_2 = 0$  en un temps fini  $t_a$  puis maintenir l'état sur cette droite.

1) En admettant qu'un tel signal de commande existe, écrire l'expression de  $x_1(t)$  à partir de l'instant  $t_a$  et déduire que l'origine sera asymptotiquement stable quelle que soit la fonction  $f(x)$ .

- 2) La position de l'état  $x = [x_1 ; x_2]$  par rapport à la droite  $D$  est définie par la fonction  $\sigma = ax_1 + x_2$  (expliquer). En considérant la fonction  $V(x) = \sigma^2/2$ , montrer que si  $u = -[b + h(x)]\text{sgn}(\sigma)$  où  $b > 0$  et  $h(x) \geq |ax_2 + f(x)|$ , l'état converge vers  $D$  et y reste.
- 3) Sachant que  $dt = dV / \dot{V}$ , montrer que la durée pour passer de l'état initial  $x^0$  à l'état  $x^a$  est  $t_a \leq |\sigma|/b$ .