

Chapitre 6

COMMANDE DES SYSTÈMES NON LINÉAIRES

Les politiques de commande données aux chapitres précédents ne sont valables que si leurs équations d'état, $\dot{x} = f(x, u)$, $y = g(x, u)$, sont linéaires ou linéarisables. Elles sont linéaires si f et g le sont et elles sont linéarisables si f et g sont continument dérivables autour du point de fonctionnement (x_d, u_d) et que le point (x, u) reste voisin de (x_d, u_d) durant le fonctionnement du système. Hors de ces conditions, il est nécessaire d'employer des moyens de commande appropriés. Nous commençons ce chapitre par la commande paramétrée qui consiste à varier les paramètres de l'organe de commande en fonction du point de fonctionnement désiré. Deux autres méthodes, souvent plus efficaces, sont la linéarisation exacte et la commande par mode de glissement. La première consiste à introduire avant et autour du système commandé des organes non linéaires de sorte que l'ensemble soit linéaire puis d'appliquer sur ce nouveau système l'une des politiques linéaires. La commande par glissement amène le point représentant l'état du système à une surface sur laquelle cet état glisse selon un comportement linéaire et se dirige vers le point d'équilibre désiré. Le chapitre se termine par la notion de passivité et ses applications dans la commande des systèmes non linéaires.

6-1 COMMANDE PARAMÉTRÉE

Appliquons au système non linéaire

$$\dot{x}_r = f(x_r, u_r), \quad y_r = g(x_r), \quad (6-1)$$

$x_r \in \mathbb{R}^n$, $u_r \in \mathbb{R}^p$, $y_r \in \mathbb{R}^q$, la commande par retour d'état et intégration de l'erreur :

$$u_r = -K_c x_r + v_r \quad (6-2)$$

$$\text{avec} \quad \dot{v}_r = K_i e_r, \quad e_r = r - y_r, \quad (6-3)$$

où r est la référence. Pour alléger l'exposé, nous avons supposé dans la commande (6-2), (6-3) que toutes les variables d'état sont mesurables. En remplaçant dans (6-1) u_r par son expression donnée par (6-2) et (6-3), on obtient les équations d'état de la boucle fermée entre r et y_r :

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= f(x_r, -K_c x_r + v_r), \\ \dot{v}_r &= -K_i g(x_r) + K_i r, \\ y_r &= g(x_r). \end{aligned} \quad (6-4)$$

Pour une référence constante $r = r_0$, le point de fonctionnement $p_f = (x_d, v_d, u_d)$ se déduit en résolvant les équations

$$\begin{aligned} g(x_d) &= y_d = r_0 \\ f(x_d, -K_c x_d + v_d) &= 0 \\ u_d &= -K_c x_d + v_d. \end{aligned} \quad (6-5)$$

Remarquer que $y_d = r_0$ (erreur stationnaire nulle) grâce à l'intégration de l'erreur. En admettant que f et g sont continument dérivables et que le point (x_r, v_r, u_r) reste voisin de p_f , les matrices K_c et K_i relatives à $r = r_0$ s'obtiennent par l'une des méthodes linéaires (placement des pôles ou LQR) appliquée à la linéarisation de (6-4) autour de p_f . En posant $x = x_r - x_d$, $v = v_r - v_d$, $u = u_r - u_d$ et $\rho = r - r_0$, la linéarisation de (6-4) est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A - BK_c)x + Bv, \\ \dot{v} &= -K_i Cx + K_i \rho, \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (6-6)$$

2 Commande des systèmes non linéaires

où

$$A = \left(\frac{\delta f}{\delta x_r} \right)_{p_f}, \quad B = \left(\frac{\delta f}{\delta u_r} \right)_{p_f}, \quad C = \left(\frac{\delta g}{\delta x_r} \right)_{p_f}.$$

En posant $\xi = (x; v)$, les équations (6-6) peuvent aussi s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A_f \xi + B_f \rho, \quad y = (C \ 0) \xi \\ \text{où} \quad A_f &= \begin{pmatrix} A - BK_c & B \\ -K_i C & 0 \end{pmatrix}, \quad B_f = \begin{pmatrix} 0 \\ K_i \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6-7)$$

Maintenant, si la référence r est variable, le point de fonctionnement p_f ainsi que les jacobiens A , B et C de f et g varient avec r . Pour obtenir une bonne performance pour chaque valeur de r , les matrices de commande K_c et K_i doivent aussi varier avec r et on dit qu'elles sont paramétrées par r . Dans ce cas, la linéarisation de (6-4) autour de $r = r_0$ devient :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A - BK_c)x + Bv - BE_c x_d \rho \\ \dot{v} &= -K_i Cx + [K_i - E_i g(x_d) + E_i r_0] \rho \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (6-8)$$

où

$$E_c = \left(\frac{\delta K_c}{\delta r} \right)_{r_0}, \quad E_i = \left(\frac{\delta K_i}{\delta r} \right)_{r_0}.$$

Sachant que $g(x_d) = r_0$, les équations (6-8) peuvent se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A_p \xi + B_p \rho, \quad y = (C \ 0) \xi \\ \text{où} \quad A_p &= \begin{pmatrix} A - BK_c & B \\ -K_i C & 0 \end{pmatrix}, \quad B_p = \begin{pmatrix} -BE_c x_d \\ K_i \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6-9)$$

En comparant (6-7) et (6-9), on voit que les fonctions de transfert entre ρ et y relatives aux deux types de commande, à référence fixe et paramétrée, ont le même polynôme caractéristique, $\det(sI - A_f)$ mais, comme $B_p \neq B_f$, elles n'ont pas les mêmes zéros. Leurs réponses convergent donc vers la valeur désirée y_d avec la même rapidité mais leurs régimes transitoires sont différents. Cependant, on remarque que les équations (6-7) et (6-9) deviennent complètement identiques si l'on remplace dans B_p le

facteur x_d de E_c par sa dérivée $\dot{x}_d = 0$. Or, si on dérive puis on intègre la commande u_r définie dans (6-2) et (6-3), elle ne se modifie que par une constante. Essayons donc la commande u_r définie par :

$$\dot{\eta} = -K_c \dot{x}_r + \dot{v}_r, \quad u_r = \eta. \quad (6-10)$$

Avec cette définition de u_r , l'équation d'état du système s'écrit

$$\dot{x}_r = f(x_r, \int \dot{\eta} dt) = f(x_r, -K_c x_r + v_r]$$

dont la linéarisation autour de p_f redonne la première des équations (6-6) et les deux autres équations de (6-6) ne se modifient pas. Ainsi, par cette nouvelle manière d'obtenir u_r , la commande paramétrée devient complètement équivalente à la commande à référence fixe dans un voisinage du point de fonctionnement $p_f = (x_d, u_d)$.

Les figures 6-1a et 6-1b montrent la différence de structure entre les deux définitions (6-2) et (6-10) de la commande u_r .

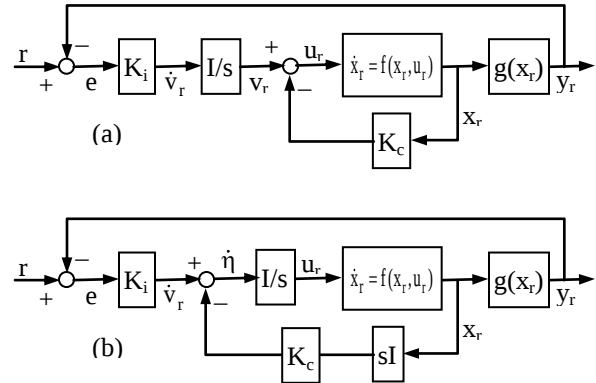


Fig. 6-1. Structures des commandes (a) (6-2) et (b) (6-9)

Le dérivateur sI de x_r n'étant pas propre, on le remplace par un quasi-dérivateur $[s/(\varepsilon s + 1)]I$ où ε est un petit réel positif.

Exemple 6-1

Le système à commander a pour équations

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1r} &= x_{1r} + x_{2r}, \\ \dot{x}_{2r} &= x_{1r}^2 x_{2r} + x_{1r} + u_r \\ y_r &= -x_{1r} x_{2r}. \end{aligned}$$

Le point de fonctionnement relatif à une référence positive r est $p_f = (x_d, u_d)$ avec

$$x_d = [\sqrt{r}; -\sqrt{r}], \quad u_d = \sqrt{r}(r-1).$$

Pour une référence constante $r = r_0$, la linéarisation des équations du système commandé autour de $p_f(r_0)$ est :

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx$$

avec $x = x_r - x_d$, $u = u_r - u_d$, $y = y_r - y_d$ et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2r_0 + 1 & r_0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (\sqrt{r_0} \quad -\sqrt{r_0}).$$

Il est facile de vérifier que (A, B) est contrôlable. En introduisant pour ce système linéarisé la commande par retour d'état et intégration :

$$\dot{v} = K_i(\rho - y) = K_i(r - y_r), \quad u = -K_c x + v,$$

on arrive aux équations (6-7) de la boucle fermée liant $\rho = r - r_0$ à y . Le polynôme caractéristique de cette boucle est $P(s) = \det(sI - A_f)$. Or, en posant $K_c = (k_1 \ k_2)$ et $K_i = k_i$, on a :

$$A_f = \begin{pmatrix} A - BK_c & B \\ -K_i C & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2r_0 + 1 - k_1 & r_0 - k_2 & 1 \\ -k_i \sqrt{r_0} & k_i \sqrt{r_0} & 0 \end{pmatrix}$$

d'où $P(s)$ est donné par

$$s^3 + (k_2 - r_0 - 1)s^2 - (-2r_0 + 1 - k_1 + k_i \sqrt{r_0})s + 2k_i \sqrt{r_0}.$$

Si l'on juge que les pôles $-1 \pm j\sqrt{3}$ et -2 sont convenables $\forall r_0$, les paramètres de la commande doivent vérifier les équations suivantes :

$$2k_i \sqrt{r_0} = 8 \Rightarrow k_i = 4 / \sqrt{r_0},$$

$$k_2 - r_0 - 1 = 4 \Rightarrow k_2 = r_0 + 5$$

$$3r_0 + k_1 - k_2 - k_i \sqrt{r_0} - 1 = 8 \Rightarrow k_1 = -2r_0 + 18.$$

Maintenant, si la référence r est variable, il suffit d'appliquer au système non linéaire la commande (6-10) en remplaçant dans les expressions de k_1 , k_2 et k_i la constante r_0 par la variable r . Nous simulons cette politique par les programmes suivants. Le premier programme, nommé «comd_param» et écrit dans l'éditeur, définit les équations d'état de la boucle fermée et le second, écrit sur le «workspace», résout ces équations et représente la réponse pour les références $r_i = i$, $i = 1, 2$ et 3 , partant d'un état initial égal à l'état stationnaire relatif à la référence r_{i-1} .

Équations d'état de la boucle fermée

```
function xip = comd_param(t,xi)
```

```
% Paramètres
```

```
global r
```

```
k1 = -2*r+18; k2 = r+5 ; ki = 4/sqrt(r);
```

```
% Équations du système
```

```
y = -xi(1)*xi(2);
```

```
xp1 = xi(1)+xi(2);
```

```
xp2 = (xi(1)^2)*xi(2)+xi(1)+xi(3);
```

```
up = -k1*xp1-k2*xp2+ki*(r-y);
```

```
xip = [xp1;xp2;up];
```

```
end
```

Résolution pour $r = 1, 2, 3$

```
>> ro = 0:1:3;
```

```
>>for i = 2:4
```

```
    global r; r = ro(i);
```

```
    x0 = [(ro(i-1))^0.5;-(ro(i-1))^0.5];
```

```
    u0 = ((ro(i-1))^0.5)*(ro(i-1)-1);
```

```
    xinit = [x0;u0]; t0 = 8*(i-2); tf = t0+8;
```

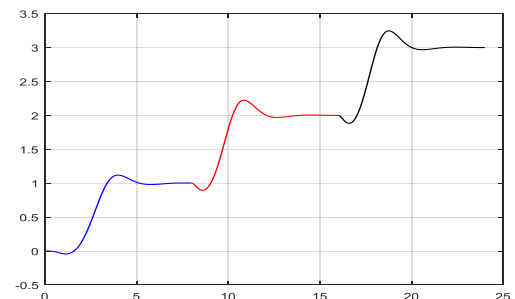
```
    [t,xi] = ode45('comd_param',[t0,tf],xinit);
```

```
    y = -xi(:,1).*xi(:,2);
```

```
    plot(t,y)
```

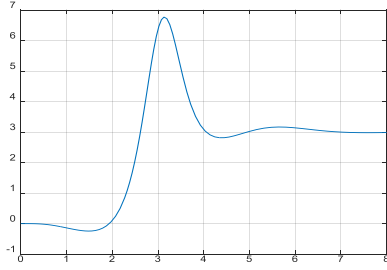
```
    hold on
```

```
end
```



On voit sur la figure précédente que la réponse y a passé de 0 à 3 en trois étapes. Ce passage par étapes est nécessaire car, pour que la linéarisation reste valable, il faut que dans chaque étape l'état du

système ne s'éloigne pas trop du point de fonctionnement c.à.d. de l'état stationnaire correspondant à cette étape. La figure suivante montre que le passage direct de $y = 0$ à $y = 3$ produit un grand dépassement qui n'est pas conforme avec le choix des pôles du système linéarisé et le lecteur peut vérifier que le passage direct de $y = 0$ à $y = 5$ conduit à l'instabilité tandis que le passage par étape l'évite.



Remarque. Dans ce qui précède, nous avons supposé que les variables d'état sont toutes mesurables. Si elles ne le sont pas, on remplace la commande (6-10) par

$$\dot{\eta} = -K_c \hat{x}_r + \dot{v}_r, \quad u_r = \eta.$$

où $\hat{x}_r$ est une estimation de l'état x_r fournie par un observateur linéaire d'équation

$$\dot{\hat{x}}_r = A\hat{x}_r + Bu_r + K_f(y_r - C\hat{x}_r).$$

Les matrices A , B , C sont celles des équations (6-6) et la matrice K_f est déterminée de sorte que les valeurs propres de $(A - K_f C)$ soient 3 à 5 fois plus éloignées de l'axe des imaginaires que les valeurs propres de $(A - BK_c)$. Bien que l'observateur ajoute des variables d'état supplémentaires, la démarche suivie ci-dessus reste la même.

EXERCICE 6-1

Seule la sortie y du système suivant est mesurable

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = tx_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + u \end{cases} \quad y = x_2.$$

En introduisant un observateur, déterminer une commande paramétrique avec intégration et simuler sa réponse.

6-2 LINÉARISATION EXACTE

La linéarisation exacte s'applique à des systèmes non linéaires dont les équations sont de la forme affine (linéaire en u)

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad y = h(x), \quad (6-11)$$

$x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^q$. Les fonctions vectorielles f , h et la fonction matricielle g sont *lisses* c.à.d. continues et toutes leurs dérivées sont aussi continues dans D . La méthode de la linéarisation exacte consiste à appliquer au système une entrée u liée à l'état x par une relation non linéaire de la forme

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \quad (6-12)$$

de sorte que le système d'entrée $v \in \mathbb{R}^p$ et de sortie x ou d'entrée v et de sortie y soit linéaire (fig. 6-2). Ceci permet de commander le système ainsi construit selon l'une des politiques linéaires.

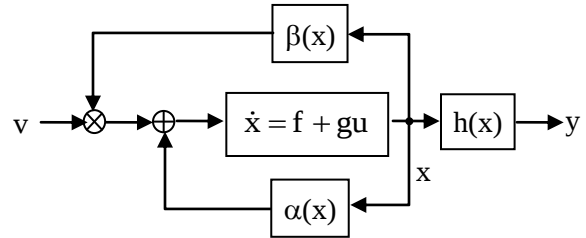


Fig. 6-2. Boucles de linéarisation d'un système non linéaire.

Nous commençons par la linéarisation de l'équation liant l'entrée v à l'état x .

6-2-1. Linéarisation entrée-état

L'entrée (6-12) linéarise l'équation d'état (6-11) si et seulement si cette dernière est de la forme :

$$\dot{x} = Ax + B\gamma(x)[u - \alpha(x)] \quad (6-13)$$

où A et B sont des matrices constantes et $\gamma(x)$ est une matrice inversible $\forall x \in D$. En effet, en posant $\beta(x) = \gamma^{-1}(x)$, on a :

$$\begin{aligned} f + g(\alpha + \beta v) &= Ax + Bv, \quad \forall v \in \mathbb{R}^p \\ \Leftrightarrow \begin{cases} f + g\alpha = Ax \\ g\beta = B \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} g = B\gamma \\ f = Ax - B\gamma\alpha \end{cases} \\ \Leftrightarrow f + gu &= Ax + B\gamma(u - \alpha), \quad \forall u \in \mathbb{R}^p. \end{aligned}$$

Ainsi, si (A, B) est stabilisable, l'entrée (6-12) avec $\beta(x) = \gamma^{-1}(x)$ transforme (6-13) en un système linéaire, $\dot{x} = Ax + Bv$, et une commande par retour d'état $v = -K_c x$ le stabilise. En plus, si $h(x)$ est linéaire c.à.d. si $y = Cx$, C étant une matrice constante, la commande par retour d'état et intégration de l'erreur, $v = -K_c x + z$ avec $\dot{z} = K_i e$, stabilise le système linéarisé par (6-12) et annule en régime stationnaire l'erreur $e = r - y$ entre la référence r et la sortie y .

Exemple 6-2

En générale, les systèmes mécaniques ont une équation de la forme

$$M(q)\ddot{q} + c(q, \dot{q}) + g(q) + b(\dot{q}) = u(t)$$

où

- q est le vecteur des coordonnées généralisées (positions et rotations des éléments).
- M est la matrice d'inertie définie positive (masses en rotation ou en translation).
- $c(q, \dot{q})$, $g(q)$, $b(\dot{q})$ sont respectivement les forces centrifuges et de Coriolis, les forces de la pesanteur et les forces de frottement.
- $u(t)$ est le vecteur des actions extérieures (forces et couples) appliquées au système.

En posant

$$x = [x^1; x^2] = [q; \dot{q}],$$

l'équation précédente s'écrit sous la forme d'équations d'état :

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= x^2 \\ \dot{x}^2 &= M^{-1}(q) \{u(t) - [c(x) + g(x^1) + b(x^2)]\}. \end{aligned}$$

Ces équations ont la même forme que (6-13) avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1} \end{pmatrix}, \quad \gamma(x) = \beta^{-1}(x) = I$$

$$\text{et } \alpha(x) = c(x) + g(x^1) + b(x^2).$$

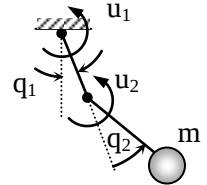
L'entrée $u = \alpha(x) + v$ linéarise donc ce système et comme (A, B) est contrôlable, on peut trouver des matrices K_c et K_i pour lesquelles la commande

$$v = -K_c x + z, \quad \dot{z} = K_i e$$

annule en régime stationnaire l'erreur e entre la référence $r = [q_d; \dot{q}_d]$ et la sortie $y = x = [q; \dot{q}]$.

EXERCICE 6-2

Appliquer les équations de Lagrange (voir chapitre 1 ou 2 de la partie modélisation) pour écrire les équations du double pendule ci-contre où les tiges de longueurs a et b sont supposées inélastiques et sans masse et les facteurs de frottement sur les articulations sont c_1 et c_2 . Déterminer une politique de commande telle que, en régime stationnaire, $q_1 = \sin \omega t$ et $q_2 = q_{2d} = c^{te}$.



Supposons maintenant que l'équation d'état du système $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ n'est pas de la forme (6-13) et cherchons une transformation $z = P(x)$ telle que l'équation du nouveau vecteur d'état z est de cette forme, c.à.d.

$$\dot{z} = Az + B\gamma(z)[u - \alpha(z)] \quad (6-14)$$

avec (A, B) contrôlable et $\gamma(z)$ inversible $\forall z$ dans $D_z = P(D)$. Si une telle transformation existe, l'entrée $u = \alpha(z) + \beta(z)v$, avec $\beta(z) = \gamma^{-1}(z)$, linéarise (6-14) qui devient $\dot{z} = Az + Bv$. D'autre part, en considérant pour simplifier des systèmes à une seule entrée ($p = 1$), nous savons qu'il existe un vecteur d'état $\xi = Qz$ dont l'équation a la forme de contrôlabilité :

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A_c \xi + B_c v, \quad A_c = Q A Q^{-1}, \quad B_c = Q B, \quad (6-15) \\ A_c &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad B_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, par le changement de variable $\xi = T(x) = QP(x)$ et pour une entrée $u = \alpha(x) + \beta(x)v$,

l'équation non linéaire affine $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ se transforme, quand T existe, en une équation linéaire qui peut s'écrire sous la forme

$$\dot{\xi} = (A_0 - B_c a)\xi + B_c v = A_0 \xi + B_c w \quad (6-16)$$

où

$$a = [a_0 \ a_2 \ \dots \ a_{n-1}],$$

$$w = v - a\xi = \gamma(x)[u - \alpha(x)] - aT(x)$$

et

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Supposons que $T(x)$ est un *difféomorphisme* c.à.d. lisse, inversible et son inverse est aussi lisse. Elle conduit avec l'entrée $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ à l'équation linéaire (6-16) si et seulement si

$$\dot{\xi} = (\delta T / \delta x) \dot{x} = \frac{\delta T}{\delta x} [f(x) + g(x)u] = A_0 T(x) + B_c w.$$

Tenant compte de l'expression de w en fonction de u et sachant que l'équation précédente doit être vraie $\forall u$, elle est équivalente au système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\begin{cases} \frac{\delta T}{\delta x} f(x) = A_0 T(x) - B_c [\gamma(x)\alpha(x) + aT(x)], \\ \frac{\delta T}{\delta x} g = B_c \gamma(x). \end{cases}$$

En posant $T = [T_1 ; T_2 ; \dots ; T_n]$ et grâce aux formes de A_0 et de B_c , le système précédent s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\delta T_i}{\delta x} f = T_{i+1}, & \frac{\delta T_i}{\delta x} g = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \frac{\delta T_n}{\delta x} f = -\zeta(x), & \frac{\delta T_n}{\delta x} g = \gamma(x) \neq 0, \end{cases} \quad (6-17)$$

$$\text{où } \zeta(x) = \gamma(x)\alpha(x) + aT(x).$$

La détermination des conditions d'existence d'un difféomorphisme T solution du système (6-17) et la résolution de ces équations sont facilitées par l'emploi de la notion de dérivée de Lie dont nous donnons d'abord la définition et les propriétés.

Dérivée de Lie. Une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définit un champ de vecteurs dans D en associant à tout point x de D un vecteur $f(x)$. Les champs de vecteurs considérés par la suite seront supposés lisses.

Soit une fonction scalaire lisse $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $x(t)$ une trajectoire dans D vérifiant $\dot{x} = f(x)$. La dérivée par rapport au temps de $h(x)$ le long de cette trajectoire est

$$\frac{dh(x)}{dt} = \frac{\delta h}{\delta x} \dot{x} = \frac{\delta h}{\delta x} f(x) \stackrel{\text{Not}}{=} L_f h. \quad (6-18)$$

La notation $L_f h$ est appelée dérivée de Lie de h par rapport au champ f . C'est donc le produit scalaire du gradient de h par la vitesse $f(x)$ de x .

Soit g un autre champ lisse de vecteurs dans D . La dérivée par rapport à g de la dérivée par rapport à f de h s'écrit :

$$L_g L_f h = \frac{\delta(L_f h)}{\delta x} g = \left(\frac{\delta^2 h}{\delta x^2} f + \frac{\delta h}{\delta x} \frac{\delta f}{\delta x} \right) g. \quad (6-19)$$

On voit que la notation de Lie simplifie considérablement l'écriture des dérivées partielles. D'autre part on pose

$$L_f^0 h = h \quad \text{et} \quad L_f^i h = L_f(L_f^{i-1} h), \quad i = 1, 2, \dots \quad (6-20)$$

Exemple 6-3

Pour le système à une seule sortie

$$\dot{x} = f(x), \quad y = h(x),$$

on a : $\dot{y} = L_f h$ et $\ddot{y} = L_f^2 h$.

On appelle *crochet de Lie* de deux champs lisses f et g , le champ lisse

$$[f, g] = L_f g - L_g f = \frac{\delta g}{\delta x} f - \frac{\delta f}{\delta x} g \quad (6-21)$$

où $\delta g / \delta x$ et $\delta f / \delta x$ sont les jacobiens de g et f . Le crochet de Lie $[f, g]$ est aussi appelé adjoint de g par rapport à f et il est désigné par $\text{ad}_f g$. On pose

$$\text{ad}_f^0 g = g \quad \text{et} \quad \text{ad}_f^i g = [f, \text{ad}_f^{i-1} g]. \quad (6-21)$$

Exemple 6-4

Pour

$$\begin{aligned} f(x) &= [-\cos x_1; x_1 x_2^2] \quad \text{et} \quad g(x) = [x_1^2; x_2], \\ [f, g] &= \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos x_1 \\ x_1 x_2^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sin x_1 & 0 \\ x_2^2 & 2x_1 x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -x_1(2\cos x_1 + x_1 \sin x_1) \\ -x_1 x_2^2(1 + x_1) \end{pmatrix} \\ \text{ad}_f^2 g &= \begin{pmatrix} -(2 + x_1^2)\cos x_1 & 0 \\ -(1 + 2x_1)x_2^2 & -2x_1 x_2(1 + x_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos x_1 \\ x_1 x_2^2 \end{pmatrix} \\ &\quad - \begin{pmatrix} \sin x_1 & 0 \\ x_2^2 & 2x_1 x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_1(2\cos x_1 + x_1 \sin x_1) \\ -x_1 x_2^2(1 + x_1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\cos^2 x_1 + x_1^2 + x_1 \sin x_1 \\ (1 + 4x_1)x_2^2 \cos x_1 + x_1^2 x_2^3 \sin x_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le lecteur peut vérifier sans peine que le crochet de Lie jouit des propriétés suivantes :

- $[f, g]$ est bilinéaire, c.à.d. pour deux scalaires quelconques a_1 et a_2 ,

$$\begin{cases} [a_1 f_1 + a_2 f_2, g] = a_1 [f_1, g] + a_2 [f_2, g] \\ [f, a_1 g_1 + a_2 g_2] = a_1 [f, g_1] + a_2 [f, g_2]. \end{cases}$$

- Commutativité opposée : $[f, g] = -[g, f]$.

- Identité de Jacobi : $L_{\text{ad}_f g} h = L_f L_g h - L_g L_f h$.

- f est son propre opposé : $[f, f] = 0 \quad \forall f$.

- Si f et g sont constants, $[f, g] = 0$.

EXERCICE 6-3

Démontrer les propriétés précédentes du crochet de Lie.

Les deux définitions suivantes interviennent dans les conditions d'existence d'une solution d'un système d'équations différentielles aux dérivées partielles.

D1. On dit qu'une famille $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_m\}$ de champs de vecteurs est *involutive* si, $\forall i, j \in \{1, \dots, m\}$, le crochet de Lie $[f_i, f_j]$ est une combinaison linéaire de $f_1, \dots, f_m$ c.à.d. $[f_i, f_j]$ appartient à l'espace engendré par $\mathcal{F}$. En d'autres termes, $\{f_1, \dots, f_m\}$ est *involutive* si $\forall i, j \in \{1, \dots, m\}$,

$$\text{rang}[f_1(x); \dots; f_k(x)] = \text{rang}[f_1(x); \dots; f_k(x); [f_i, f_j]].$$

D2. Considérons le système différentiel à dérivées partielles défini par

$$\frac{\partial h}{\partial x} f_1(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f_2(x) = \dots = \frac{\partial h}{\partial x} f_m(x) = 0 \quad (6-22)$$

où les fonctions $f_i(x) : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont connues et indépendantes et $h(x)$ est une fonction de D dans $\mathbb{R}$ à déterminer. Si le système (6-22) admet $n - m$ solutions $h_1(x), \dots, h_{n-m}(x)$ dont les gradients $\partial h_k / \partial x$ sont indépendants, on dit que la famille de champs de vecteurs $\{f_1, \dots, f_m\}$ est *complètement intégrable*. On démontre dans ce cas que (6-22) admet une solution pour tout état initial $x(0)$ dans D .

Le théorème de la géométrie différentielle suivant, que nous énonçons sans démonstration, servira à établir les conditions d'existence d'une solution T aux équations (6-17).

Théorème de Frobenius. Une famille $\{f_1, \dots, f_m\}$ de champs de vecteurs indépendants est complètement intégrable si et seulement si elle est involutive.

Exemple 6-5

Les équations aux dérivées partielles (EDP)

$$\begin{aligned} 2x_2 \frac{\partial h}{\partial x_1} + x_2 x_3 \frac{\partial h}{\partial x_3} &= 0, \\ -x_2^2 \frac{\partial h}{\partial x_2} + x_1 x_3^2 \frac{\partial h}{\partial x_3} &= 0, \end{aligned}$$

sont de la forme $(\partial h / \partial x) f_1 = (\partial h / \partial x) f_2 = 0$ où

$$f_1 = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 0 \\ x_2 x_3 \end{pmatrix} \quad f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_2^2 \\ x_1 x_3^2 \end{pmatrix}.$$

Les champs f_1 et f_2 sont indépendants dans la région $D = \{x \mid x_2 \neq 0\}$. D'autre part,

$$\begin{aligned} [f_1, f_2] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2x_2 & 0 \\ x_3^2 & 0 & 2x_1 x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 0 \\ x_2 x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_3 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -x_2^2 \\ x_1 x_3^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x_2^2 \\ 0 \\ x_2 x_3(x_2 + 2x_3 + x_1 x_3) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$[f_1, f_2]$ est une combinaison linéaire de f_1 et f_2 dans la région où le déterminant suivant est nul :

$$\begin{vmatrix} 2x_2 & 0 & 2x_2^2 \\ 0 & -x_2^2 & 0 \\ x_2x_3 & x_1x_3^2 & x_2x_3(x_2 + 2x_3 + x_1x_3) \end{vmatrix} = -2x_2^4x_3^2(2 + x_1)$$

Sachant que $x_2 \neq 0$, le système EDP ci-dessus admet une solution dans la région

$$D' = \{x \mid x_2 \neq 0 \text{ et } (x_3 = 0 \text{ ou } x_1 = -2)\}.$$

EXERCICE 6-4

Montrer que le système EDP

$$x_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + \frac{\partial h}{\partial x_3} + x_3 \frac{\partial h}{\partial x_4} = 0, \quad e^{x_2} \frac{\partial h}{\partial x_1} = 0$$

est complètement intégrable dans $\mathcal{R}^4$.

Trouver deux solutions h_1 et h_2 dont les gradients sont indépendants.

Nous sommes maintenant en mesure de déterminer les conditions de la linéarisation entrée-état du système d'équation $\dot{x} = f(x) + g(x)u$. Pour établir le théorème Th1 qui donne ces conditions, nous aurons besoin des lemmes suivants où f et g sont deux champs lisses de vecteurs dans un domaine D .

L1. Soient $h_1, \dots, h_n$, $n \geq 2$, des fonctions lisses de D dans $\mathcal{R}$. On a, pour $i = 1, \dots, n-1$,

$$\begin{cases} L_g h_i = 0, \\ L_f h_i = h_{i+1}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial h_1}{\partial x} \text{ad}_f^{i-1} g = 0, \\ \frac{\partial h_1}{\partial x} \text{ad}_f^{n-1} g = (-1)^{n-1} L_g h_n \end{cases}$$

Preuve

Montrons l'implication $\Rightarrow$ pour $n = 2$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial x} \text{ad}_f^0 g &= L_g h_1 = 0 \quad \text{et, d'après Jacobi,} \\ \frac{\partial h_1}{\partial x} \text{ad}_f^1 g &= L_{\text{ad}_f g} h_1 = L_f L_g h_1 - L_g L_f h_1 = 0 - L_g h_2. \end{aligned}$$

Admettons que cette implication est vraie pour $n = 2, \dots, k-1$ et, en appliquant successivement l'identité de Jacobi, montrons qu'elle reste vraie pour $n = k$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial x} \text{ad}_f^{i-1} g &= L_{[f, \text{ad}_f^{i-2} g]} h_1 = L_f L_{\text{ad}_f^{i-2} g} h_1 - L_{\text{ad}_f^{i-2} g} L_f h_1 \\ &= 0 - L_{\text{ad}_f^{i-2} g} h_2 = +L_{\text{ad}_f^{i-3} g} h_3 = \dots = (-1)^{i-1} L_g h_i. \end{aligned}$$

$$\text{Or, } L_g h_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq n-1, \\ L_g h_n & \text{si } i = n. \end{cases}$$

$\Leftarrow$ se démontre par chemin inverse ■

L2. Soit h une fonction lisse de D dans $\mathcal{R}$. On a :

$$\begin{aligned} L_g h &= L_g L_f h = \dots = L_g L_f^k h = 0 \\ \Leftrightarrow L_g h &= L_{\text{ad}_f g} h = \dots = L_{\text{ad}_f^k g} h = 0. \end{aligned}$$

Preuve

$\Rightarrow$ est vraie pour $k = 0$. Admettons que cette implication est vraie pour $k = 0, \dots, i-1$ et, en appliquant successivement l'identité de Jacobi, montrons qu'elle reste vraie pour $k = i$:

$$\begin{aligned} L_{\text{ad}_f^i g} h &= L_{[f, \text{ad}_f^{i-1} g]} h \\ &= L_f L_{\text{ad}_f^{i-1} g} h - L_{\text{ad}_f^{i-1} g} L_f h = 0 - L_{\text{ad}_f^{i-1} g} L_f h \\ &= -L_f L_{\text{ad}_f^{i-2} g} h + L_{\text{ad}_f^{i-2} g} L_f h = 0 + L_{\text{ad}_f^{i-2} g} L_f h \\ &= \dots = \pm L_g L_f h = 0 \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ se démontre par chemin inverse ■

Nous avons vu que le système $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ est linéarisable si et seulement s'il existe une transformation T qui vérifie les équations (6-17). Cette condition est équivalente aux deux conditions du théorème suivant.

Th1. Soient f et g deux champs de vecteurs lisses dans un domaine $D \subset \mathcal{R}^n$. Le système entrée-état, $\dot{x} = f(x) + g(x)u$, est linéarisable dans D si et seulement si

1) les n champs de vecteurs

$$g, \text{ad}_f g, \text{ad}_f^2 g, \dots, \text{ad}_f^{n-1} g$$

sont indépendants dans D ,

2) La distribution des $n-1$ champs de vecteurs

$$\{g, \text{ad}_f g, \text{ad}_f^2 g, \dots, \text{ad}_f^{n-2} g\}$$

est involutive dans D .

Preuve

$\Rightarrow$ Si $T = [T_1 ; T_2 ; \dots ; T_n]$ est un difféomorphisme, solution des équations (6-17), c.à.d. si, pour $i = 1, \dots, n-1$,

$$L_g T_i = 0, \quad L_f T_i = T_{i+1} \quad \text{et} \quad L_g T_n \neq 0,$$

on déduit du lemme L1 que

$$\frac{\delta h}{\delta x} \text{ad}_f^{i-1} g = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, n-1, \quad (6-23)$$

$$\frac{\delta h}{\delta x} \text{ad}_f^{n-1} g = (-1)^{n-1} L_g T_n \neq 0 \quad (6-24)$$

où $h(x) = T_1(x)$. Si les vecteurs

$$g, \text{ad}_f g, \text{ad}_f^2 g, \dots, \text{ad}_f^{n-1} g \quad (6-25)$$

étaient dépendants, il existerait des fonctions scalaires $\alpha_i(x)$ non toutes nulles et un entier k , $0 \leq k \leq n-1$, tels que $\text{ad}_f^k g = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \text{ad}_f^i g$. D'où

$$\begin{aligned} \text{ad}_f^{k+1} g &= [f, \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \text{ad}_f^i g] = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i [f, \text{ad}_f^i g] \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \text{ad}_f^{i+1} g = \sum_{i=1}^k \alpha'_i \text{ad}_f^i g \quad (\alpha'_i = \alpha_{i-1}) \\ \Rightarrow \text{ad}_f^{k+2} g &= \sum_{i=2}^{k+1} \alpha'_i \text{ad}_f^i g \Rightarrow \dots \\ \dots \Rightarrow \text{ad}_f^{n-1} g &= \sum_{i=n-k-1}^{n-2} \alpha'_i \text{ad}_f^i g. \end{aligned}$$

Ainsi (6-23) $\Rightarrow (\delta h / \delta x) \text{ad}_f^{n-1} g = 0$ en contradiction avec (6-24). Les vecteurs (6-25) sont donc indépendants. D'autre part, la famille des champs $\{g, \text{ad}_f g, \text{ad}_f^2 g, \dots, \text{ad}_f^{n-2} g\}$ est involutive car, d'après le théorème de Frobenius, les équations (6-23) dont les vecteurs $\text{ad}_f^i g$ sont indépendants, sont par hypothèse complètement intégrables.

$\Leftarrow$) D'après le lemme L2 et le théorème de Frobenius, la famille de vecteurs indépendants

$$\{g, \text{ad}_f g, \text{ad}_f^2 g, \dots, \text{ad}_f^{n-2} g\}$$

étant involutive, les équations

$$\frac{\delta h}{\delta x} \text{ad}_f^i g = 0 \Leftrightarrow L_g L_f^i h = 0, \quad i = 0, \dots, n-2,$$

admettent une solution $h(x)$. En effectuant le changement de variables $z_i = L_f^{i-1} h$, $i = 1, \dots, n$, on a :

$$\dot{z}_1 = \frac{\delta z_1}{\delta x} (f + gu) = L_f h + (L_g h)u = L_f h = z_2,$$

$$\dot{z}_2 = L_f z_2 + L_g z_2 u = L_f^2 h + (L_g L_f h)u = z_3, \dots$$

d'où les nouvelles équations d'état sont

$$\begin{aligned} \dot{z}_k &= z_{k+1}, \quad \text{pour } k = 1, \dots, n-1, \\ \text{et} \quad \dot{z}_n &= L_f^n h + (L_g L_f^{n-1} h)u. \end{aligned} \quad (6-26)$$

Si $L_g L_f^{n-1} h \neq 0$, l'entrée $u = (L_g L_f^{n-1} h)^{-1} (v - L_f^n h)$ transforme l'équation (6-26) en $\dot{z}_n = v$ ce qui rend linéaire le système entre l'entrée v et l'état z . Or en remplaçant dans le lemme L1 les fonctions $h_1, \dots, h_n$ par $h, L_f h, \dots, L_f^{n-1} h$, on déduit que

$$L_g L_f^{n-1} h = (-1)^{n-1} \frac{\delta h}{\delta x} \text{ad}_f^{n-1} g.$$

Mais $(\delta h / \delta x) \text{ad}_f^i g = 0$ pour $i = 0, \dots, n-2$, et si en plus $(\delta h / \delta x) \text{ad}_f^{n-1} g = 0$, le vecteur $(\delta h / \delta x)$ sera orthogonal à n vecteurs indépendants dans $\mathcal{R}^n$ ce qui est impossible. Par conséquent $L_g L_f^{n-1} h \neq 0$ et le système est linéarisable ■

Remarque. Un système linéaire $\dot{x} = Ax + Bu$ est de la forme $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ avec

$$f(x) = Ax \text{ et } g(x) = B \Rightarrow \delta f / \delta x = A \text{ et } \delta g / \delta x = 0.$$

On a donc $\text{ad}_f^0 g = B$ et $\text{ad}_f^1 g = -(\delta f / \delta x)g = -AB$, $\text{ad}_f^2 g = -(\delta f / \delta x) \text{ad}_f^1 g = A^2 B, \dots$. On voit que pour un système linéaire la première condition du théorème Th1 n'est autre que la condition de contrôlabilité de (A, B) .

En définitif, pour linéariser le système entrée-état $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ où les champs f et g sont lisses, on suit la démarche suivante :

- 1) Calcul des champs $\text{ad}_f^k g = 0$, $k = 0, \dots, n-1$.
- 2) Détermination du domaine D où les conditions du théorème Th1 sont satisfaites.
- 3) Détermination d'une fonction $h(x)$ vérifiant

$$\begin{aligned} (\delta h / \delta x) \text{ad}_f^i g &= 0, \quad i = 0, \dots, n-2, \\ (\delta h / \delta x) \text{ad}_f^{n-1} g &\neq 0. \end{aligned} \quad (2-27)$$
- 4) La transformation $z = T(x)$ et l'entrée $u(x)$ s'obtiennent en appliquant les formules :

$$T(x) = [h; L_f h; L_f^2 h; \dots; L_f^{n-1} h], \quad (6-28)$$

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v = (L_g L_f^{n-1} h)^{-1} (v - L_f^n h).$$

Exemple 6-6

La vitesse Ω du moteur cc ci-contre est liée au couple $\tau = k_i a_i$ par la relation

$$k_i a_i = J \frac{d\Omega}{dt} + \kappa \Omega$$

et les courants i_f et i_a sont liées aux tensions u_f et u_a et à la vitesse Ω par les relations

$$u_f = L_f \frac{di_f}{dt} + R_f i_f \quad \text{et} \quad u_a = L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e_b$$

où $e_b = k_b i_f \Omega$ est la force contre-électromotrice de l'induit. La tension u_a est constante et la vitesse est commandée par la tension u_f .

En posant $x_1 = \Omega$, $x_2 = i_f$ et $x_3 = i_a$, les équations précédentes s'écrivent

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a x_2 x_3 - b x_1, & a &= k / J, b = \kappa / J, \\ \dot{x}_2 &= -c x_2 + u, & c &= R_f / L_f, u = u_f / L_f, \\ \dot{x}_3 &= -d x_1 x_2 - f x_3 + e, & d &= k_b / L_a, f = R_a / L_a \\ & & \text{et } e &= u_a / L_a = c^{te}. \end{aligned}$$

Ces équations sont de la forme $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ avec

$$f(x) = \begin{pmatrix} a x_2 x_3 - b x_1 \\ -c x_2 \\ -d x_1 x_2 - f x_3 + e \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Elles sont linéarisables dans le domaine D où les vecteurs g , $ad_f g$ et $ad_f^2 g$ sont indépendants et la distribution $\{g, ad_f g\}$ est involutive. Or

$$ad_f g = 0 - \frac{\partial f}{\partial x} g = \begin{pmatrix} -a x_3 \\ c \\ d x_1 \end{pmatrix},$$

$$ad_f^2 g = \frac{\partial ad_f g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} ad_f g = \begin{pmatrix} a(f - b - c)x_3 - a e \\ c^2 \\ d(c + f - b)x_1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs g , $ad_f g$ et $ad_f^2 g$ sont indépendants dans l'ensemble D_1 des états x pour lesquels le déterminant

$$\det[g \quad ad_f g \quad ad_f^2 g] = \det[2(f - b)x_3 - e]x_1.$$

est non nul.

D'autre part, la famille $\{g, ad_f g\}$ est involutive dans tout $\mathcal{R}^3$ car

$$[g, ad_f g] = \frac{\partial ad_f g}{\partial x} g = 0.$$

Ainsi les équations d'état de ce système sont linéarisables dans le domaine $D = D_1$.

Déterminons maintenant une fonction $h(x)$ qui vérifie (6-27).

$$a) \quad \frac{\partial h}{\partial x} g = \frac{\partial h}{\partial x_2} = 0$$

$\Rightarrow$ la fonction h est indépendante de x_2 .

$$b) \quad \frac{\partial h}{\partial x} ad_f g = -a x_3 \frac{\partial h}{\partial x_1} + d x_1 \frac{\partial h}{\partial x_3} = 0$$

$\Rightarrow h$ est une solution si

$$\frac{\partial h}{\partial x_1} = d x_1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial h}{\partial x_3} = a x_3.$$

$$\Rightarrow h = (d/2)x_1^2 + \lambda(x_3) \quad \text{avec} \quad (d\lambda/dx_3) = a x_3$$

$$\Rightarrow h = (d x_1^2 + a x_3^2) / 2 + c^{te}.$$

Si l'on désire que $h(0)$ soit nul, on donne à la constante c^{te} la valeur 0, d'où

$$h(x) = (d x_1^2 + a x_3^2) / 2.$$

c) La condition

$$\frac{\partial h}{\partial x} ad_f^2 g = [d x_1 \quad 0 \quad a x_3] \begin{pmatrix} a(f - b - c)x_3 - a e \\ c^2 \\ d(c + f - b)x_1 \end{pmatrix}$$

$$= \det[2(f - b)x_3 - e]x_1 \neq 0$$

est vérifiée dans D_1 .

Enfin, pour obtenir la transformation $z = T(x)$ et l'entrée $u(x)$ en appliquant (6-28), on effectue le calcul suivant :

$$h(x) = (d x_1^2 + a x_3^2) / 2,$$

$$\begin{aligned}
L_f h &= \frac{\delta h}{\delta x} f = [dx_1 \quad 0 \quad ax_3] \begin{pmatrix} ax_2x_3 - bx_1 \\ -cx_2 \\ -dx_1x_2 - fx_3 + e \end{pmatrix} \\
&= -bdx_1^2 - afx_3^2 + aex_3, \\
L_f^2 h &= \frac{\delta L_f h}{\delta x} f = [-2bdx_1 \quad 0 \quad -2afx_3 + ae] f \\
&= -2bdx_1(ax_2x_3 - bx_1) \\
&\quad + a(-2fx_3 + e)(-dx_1x_2 - fx_3 + e), \\
L_f^3 h &= \frac{\delta L_f^2 h}{\delta x} f = (\text{calcul long laissé comme exercice}), \\
L_g L_f^2 h &= \frac{\delta L_f^2 h}{\delta x_2} = ad[2(f - b)x_3 - e]x_1.
\end{aligned}$$

EXERCICE 6-5

Linéariser le système suivant en précisant le domaine de validité de cette linéarisation

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 - x_3, \\
\dot{x}_2 &= -x_1x_3 - x_2 + u, \\
\dot{x}_3 &= -x_1 + u.
\end{aligned}$$

6-2-2 Linéarisation entrée-sortie

Considérons un système mono-variable de la forme

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x) + g(x)u, \\
y &= h(x),
\end{aligned} \tag{6-29}$$

où f et g sont deux fonctions lisses d'un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ et h une fonction lisse de D dans $\mathbb{R}$. La dérivée de y par rapport au temps est

$$\dot{y} = \frac{\delta h}{\delta x} \dot{x} = \frac{\delta h}{\delta x} (f(x) + g(x)u) = L_f h + (L_g h)u.$$

Si $L_g h(x) \neq 0$ dans un domaine $D' \subset D$, l'entrée

$$u = (L_g h)^{-1}(v - L_f h)$$

transforme l'équation précédente en $\dot{y} = v$.

Si $L_g h(x) = 0$, la deuxième dérivée de y par rapport au temps sera

$$\ddot{y} = \frac{\delta(L_f h)}{\delta x} \dot{x} = L_f^2 h + (L_g L_f h)u.$$

De nouveau, si $L_g L_f h(x) \neq 0$ dans $D' \subset D$, l'entrée

$$u = (L_g L_f h)^{-1}(v - L_f^2 h)$$

transforme l'équation précédente en $\ddot{y} = v$.

En général, s'il existe un domaine $D' \subset D$ tel que

$$\begin{cases} L_g L_f^{i-1} h(x) = 0 & \text{pour } i = 1, 2, \dots, r-1, \\ L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0, \end{cases} \tag{6-30}$$

les dérivées $y^{(i)} = L_f^i h(x)$ sont indépendantes de u pour $i < r$ mais

$$y^{(r)} = L_f^r h + [L_g L_f^{r-1} h(x)]u. \tag{6-31}$$

Il est clair que l'entrée

$$u = [L_g L_f^{r-1} h]^{-1}(v - L_f^r h) = \beta(x)v + \alpha(x) \tag{6-32}$$

transforme l'équation (6-31) liant la nouvelle entrée v à la sortie y en une équation linéaire $y^{(r)} = v$. L'entier $r (\leq n)$ est appelé le *degré relatif* du système dans D' . Ce degré n'est pas bien défini si $r > n$.

Exemple 6-7

Considérons un système non linéaire d'équation

$$\ddot{z} + (z^2 - 1)\dot{z} + z = u.$$

En posant $x_1 = z$ et $x_2 = \dot{z}$, l'équation précédente se transforme en une équation d'état de la forme

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

$$y = h(x)$$

$$\text{avec } f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -(x_1^2 - 1)x_2 - x_1 \end{pmatrix}, \quad g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et $h(x)$ est une fonction qui définit la sortie.

a) Pour $h(x) = x_1$,

$$\frac{\delta h}{\delta x} = (1 \quad 0) \Rightarrow \begin{cases} L_f h = x_2, \\ L_g h = 0. \end{cases}$$

$$\frac{\delta L_f h}{\delta x} = (0 \ 1) \Rightarrow \begin{cases} L_f^2 h = -(x_1^2 - 1)x_2 - x_1, \\ L_g L_f h = 1. \end{cases}$$

Le degré relatif du système est $r = 2$ et l'entrée

$$u = v + (x_1^2 - 1)x_2 + x_1$$

le transforme en un système linéaire de second ordre d'équation $\ddot{y} = v$.

b) Pour $h(x) = x_2^2$,

$$\frac{\delta h}{\delta x} = (0 \ 2x_2) \Rightarrow \begin{cases} L_f h = -2(x_1^2 - 1)x_2^2 - 2x_1 x_2 \\ L_g h = 2x_2. \end{cases}$$

Le degré relatif du système est devenu $r = 1$ dans $D' = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \neq 0\}$ et l'entrée

$$u = \frac{v + 2x_2[(x_1^2 - 1)x_2 + x_1]}{2x_2}$$

le transforme en système linéaire de premier ordre d'équation $\dot{y} = v$.

Pour donner une interprétation de la notion du degré relatif, considérons la fonction de transfert d'un système linéaire mono-variable

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

où $b_m \neq 0$ et $m < n$. La réalisation de $G(s)$ sous la forme de contrôlabilité est $\dot{x} = Ax + bu$, $y = cx$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$c = (b_0 \ b_1 \ \dots \ b_m \ 0 \ \dots \ 0).$$

Pour ce système, $f(x) = Ax$, $g(x) = b$ et $h(x) = cx$. D'où

$$\frac{\delta h}{\delta x} = c \Rightarrow \begin{cases} L_f h = cAx \\ L_g h = \begin{cases} b_m & \text{si } m = n-1 \rightarrow r=1, \\ 0 & \text{si } m < n-1 \rightarrow r>1. \end{cases} \end{cases}$$

À remarquer que, pour $m < n-1$, le vecteur cA^i se déduit de cA^{i-1} en déplaçant les éléments de ce dernier d'une position vers la droite. Ainsi,

$$\frac{\delta L_f h}{\delta x} = cA \Rightarrow \begin{cases} L_f^2 h = cA^2 x \\ L_g L_f h = \begin{cases} b_{m-1} & \text{si } m = n-2 \rightarrow r=2, \\ 0 & \text{si } m < n-2 \rightarrow r>2. \end{cases} \end{cases}$$

En continuant de la sorte, il est facile de constater que le degré relatif r d'un système linéaire est la différence $n - m$ entre le degré n du dénominateur et le degré m du numérateur.

Forme normale. Considérons la transformation

$$z = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = T(x) = \begin{pmatrix} T_\xi(x) \\ T_\eta(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(x) \\ \vdots \\ L_f^{r-1} h(x) \\ \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_{n-r}(x) \end{pmatrix} \quad (6-33)$$

où r est le degré relatif du système

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad y = h(x),$$

et les fonctions φ_i sont choisies telles que

$$\frac{\delta \varphi_i}{\delta x} g(x) = 0 \quad \forall i \quad (6-34)$$

et que $T(x)$ soit un difféomorphisme. De telles fonctions $\varphi_i(x)$ existent au moins localement dans un domaine $D' \subset D$.

D'après (6-30), (6-31) et (6-32), on a :

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i &= y^{(i)}, \quad i=1, \dots, r-1, \quad \dot{\xi}_r = v = \gamma(x)[u - \alpha(x)] \\ \text{avec} \quad \gamma(x) &= L_g L_f^{r-1} h(x) \quad \text{et} \quad \alpha(x) = \frac{-L_f^r h(x)}{L_g L_f^{r-1} h(x)}. \end{aligned} \quad (6-35)$$

D'autre part, d'après (6-34), la dérivée

$$\dot{\eta}_i = \frac{\delta \varphi_i}{\delta x} \dot{x} = \frac{\delta \varphi_i}{\delta x} f(x) = \psi_i(x)$$

est indépendante de u .

Les équations de ces nouvelles variables d'état ξ_i et η_i sont donc

$$\dot{\xi} = A_0 \xi + B_c \gamma(x)[u - \alpha(x)], \quad y = C_c \xi, \quad (6-36)$$

$$\dot{\eta} = \phi(\xi, \eta) \quad (6-37)$$

où

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (6-36')$$

$$C_c = (1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0) \quad \text{et} \quad \phi(\xi, \eta) = \psi[T^{-1}(z)].$$

Nous n'avons pas remplacé dans (3-36) le vecteur x par $T^{-1}(z)$ afin que les fonctions $\alpha(x)$ et $\gamma(x)$ restent indépendantes du vecteur η c.à.d. du choix des fonctions $\varphi_i(x)$.

Les équations (6-36) et (6-37) sont appelées la *forme normale* des équations d'état du système. Comme la sortie y est seulement affectée par ξ et u et elle n'est pas affectée par η on dit que (6-36) est l'équation de la *dynamique externe* du système tandis que (6-37) est l'équation de sa *dynamique interne*. La dynamique externe est linéarisable par $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ et la dynamique interne est non observable par la sortie y . L'entrée de la dynamique interne est l'état ξ de la dynamique externe. Si, en tout instant t l'état $\xi(t) = 0$, l'équation de la dynamique interne devient

$$\dot{\eta} = \phi(0, \eta) \quad (6-38)$$

et son état η évolue librement à partir de sa valeur initiale. L'équation (6-38) décrit ce qu'on appelle la *dynamique-zéro* du système. À noter que, d'après (6-36) et la définition (6-33) de ξ , on a :

$$y(t) = 0 \quad \forall t \Rightarrow \xi(t) = 0 \quad \forall t \Rightarrow u = \alpha(x).$$

Comme $\xi_i = y^{(i-1)}$, on peut directement obtenir la dynamique zéro en remplaçant dans les équations

d'état et dans $u = \alpha(x)$ les valeurs des x_i qui annulent $y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)}$.

Exemple 6-8

Pour le système

$$\dot{x}_1 = -x_1 + e^{x_2} u,$$

$$\dot{x}_2 = x_1 x_2 + \sin x_2 + u, \quad y = x_3,$$

$$\dot{x}_3 = x_2,$$

$$\frac{\delta h}{\delta x} = (0 \ 0 \ 1) \Rightarrow \begin{cases} L_f h = x_2 \\ L_g h = 0, \end{cases}$$

$$\frac{\delta L_f h}{\delta x} = (0 \ 1 \ 0) \Rightarrow \begin{cases} L_f^2 h = x_1 x_2 + \sin x_2 \\ L_g L_f h = 1. \end{cases}$$

De (6-35) et $\beta(x) = \gamma^{-1}(x)$, l'entrée qui linéarise le système est

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v = -x_1 x_2 - \sin x_2 + v.$$

Le degré relatif est $r = 2$ avec

$$\xi = \begin{pmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \eta = \phi(x)$$

où $\phi(x)$ doit satisfaire la condition (6-34) c.à.d.

$$\frac{\delta \phi}{\delta x_1} e^{x_2} + \frac{\delta \phi}{\delta x_2} = 0.$$

Cette équation sera vérifiée si

$$\begin{cases} \delta \phi / \delta x_1 = 1 \Rightarrow \phi = x_1 + \lambda(x_2) \\ \delta \phi / \delta x_2 = -e^{x_2} = d\lambda / dx_2 \Rightarrow \lambda(x_2) = -e^{x_2} + c^{te} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \eta = x_1 - e^{x_2} + c^{te}.$$

Au point d'équilibre du système, c.à.d. quand $u = 0$ et x constant, $x_1 = x_2 = 0$. Si l'on veut que η soit nul en ce point, on donne à la constante c^{te} la valeur 1 et la transformation $T(x)$ sera

$$z = [\xi_1 \ \xi_2 \ \eta]^T = [x_3 \ x_2 \ x_1 - e^{x_2} + 1]^T.$$

L'inverse $x = T^{-1}(z)$ de cette transformation existe $\forall x \in \mathcal{R}^3$ et on a :

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T = [\eta + e^{\xi_2} - 1 \ \xi_2 \ \xi_1]^T.$$

Il est clair que T est un difféomorphisme global puisque T et T^{-1} sont lisses dans tout $\mathcal{R}^3$.

Enfin l'équation de la dynamique interne est

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \frac{\delta \phi}{\delta x} f(x) = -x_1 - e^{x_2} (x_1 x_2 + \sin x_2) \\ &= (1 - \eta - e^{\xi_2})(1 - \xi_2 e^{\xi_2}) - e^{\xi_2} \sin \xi_2. \end{aligned}$$

La dynamique zéro s'obtient en annulant ξ_1 et ξ_2 ce qui donne :

$$\dot{\eta} = -\eta$$

qui est asymptotiquement stable. À noter que des équations d'état on tire que y et $\dot{y}$ s'annulent quand $x_3 = x_2 = 0$ et que pour ces valeurs $u = \alpha = 0$. La dynamique du système se réduit à $\dot{x}_1 = -x_1$ qui est la dynamique zéro.

On démontre que la dynamique zéro d'un système linéaire est asymptotiquement stable si et seulement si tous les zéros de ce système ont une partie réelle négative c.à.d. s'il est à phase minimale (voir exercice 6-15). Par extension, on dit qu'un système non linéaire est à *phase minimale* si sa dynamique zéro est asymptotiquement stable.

EXERCICE 6-6

Écrire sous la forme de contrôlabilité les équations d'état du système linéaire suivant

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

puis, en appliquant (6-33) et en prenant ϕ linéaire, écrire sa forme normale. Dédurre l'entrée u qui le linéarise et montrer que sa dynamique zéro est stable si et seulement s'il est à phase minimale.

6-2-3 Stabilité

Il peut être utile à ce niveau de revoir les sections 6-8 et 6-9 de la partie III (systèmes mono-variables) relatives à la stabilité de Lyapunov.

Stabilité locale. Les équations d'un système non linéaire de la forme affine

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad y = h(x), \quad (6-39)$$

de degré relatif r dans un domaine D contenant le point d'équilibre x^e , solution de $f(x^e) = 0$, peuvent être écrites sous la forme normale (6-36) et (6-37) par la transformation $z = [\xi; \eta] = T(x) = [T_\xi; T_\eta]$ donnée en (6-33). La dynamique externe,

$$\dot{\xi} = A_0 \xi + B_c \gamma(x)[u - \alpha(x)], \quad y = C_c \xi, \quad (6-40)$$

est linéarisable par l'entrée $u = \alpha(x) + \beta(x)v$, $\beta(x) = \gamma^{-1}(x)$, et elle se stabilise par le retour d'état $v = -K\xi = -KT_\xi(x)$ où K est un vecteur tel que les valeurs propres de $(A_0 - B_c K)$ sont toutes à partie réelle

négative. Par cette commande, $\xi(t)$ converge exponentiellement vers 0 quel que soit son état initial dans $D_\xi = T_\xi^{-1}(D)$ et l'équation de la dynamique interne,

$$\dot{\eta} = \phi(\xi, \eta), \quad (6-41)$$

tend vers celle de la dynamique zéro,

$$\dot{\eta} = \phi(0, \eta). \quad (6-42)$$

Intuitivement, si le point d'équilibre $\eta^e = T_\eta(x^e) = \phi(x^e)$ de la dynamique zéro est localement asymptotiquement stable, le système total (6-39) commandé par $v = -K\xi = -KT_\xi(x)$ sera localement asymptotiquement stable et converge vers son point d'équilibre x^e . D'une manière plus précise, si, en résolvant (6-34), on choisit les constantes des fonctions ϕ_i de sorte que $\phi(x^e) = 0$, le point d'équilibre de la forme normale sera l'origine c.à.d. en $z^e = (\xi^e, \eta^e) = 0$. Dans un voisinage $D_0 \subset D_z = T(D)$ de cette origine on peut approximer la dynamique interne (6-41) par sa linéarisation

$$\tilde{\phi}(\xi, \eta) = A_1 \xi + A_2 \eta$$

$$\text{où} \quad A_1 = \delta\phi / \delta\xi|_{z^e=0} \quad \text{et} \quad A_2 = \delta\phi / \delta\eta|_{z^e=0}$$

sont les jacobiens par rapport à ξ et η à l'origine de ϕ . La forme normale dans D_0 de l'équation du système total commandé par retour d'état est donc

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 - KB_c & 0 \\ A_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Ses valeurs propres sont celles de $A_0 - KB_c$ et de A_2 . Comme il existe toujours un vecteur K qui stabilise la dynamique externe, $\dot{\xi} = (A_0 - KB_c)\xi$, le système total sera asymptotiquement stabilisable dans D_0 si la dynamique zéro, $\dot{\eta} = A_2 \eta$, est asymptotiquement stable dans D_0 (système à phase minimale dans D_0). À noter que cette stabilité est locale valable seulement dans un voisinage D_0 de l'origine c.à.d. dans un voisinage $T^{-1}(D_0)$ de x^e .

Exemple 6-9

Le système suivant a la forme normale et son degré

relatif est $r = 1$:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + (x_2 - 1)u, \\ \dot{x}_2 &= x_2(x_2 + x_1 - 1), \quad y = x_1.\end{aligned}$$

Sa dynamique externe (1^{ère} équation) se linéarise par

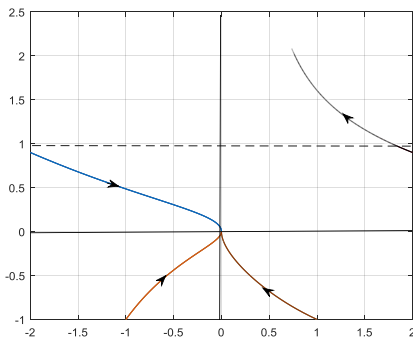
$$u = \frac{v + x_1}{x_2 - 1}$$

à condition que $x_2 \neq 1$. Le point d'équilibre du système libre est l'origine $x^e = (0, 0)$ et le jacobien en ce point par rapport à x_2 est

$$A_2 = \frac{\delta}{\delta x_2} [x_2(x_2 + x_1 - 1)] \Big|_{x^e} = -1$$

dont la valeur propre $-1 < 0$. Le système est donc asymptotiquement stabilisable dans un certain voisinage D_0 de l'origine.

À noter que la dynamique zéro, $\dot{x}_2 = x_2(x_2 - 1)$, est asymptotiquement stable dans la région D où $x_2 < 1$ car la dérivée de la fonction de Lyapunov $V = x_2^2 / 2$ est $\dot{V} = x_2 \dot{x}_2 = x_2^2(x_2 - 1)$. Ceci laisse croire que le système est stabilisable dans toute cette région. En fait, si initialement x_2 est légèrement plus petit que 1 et si $x_1 > 0$, la dynamique interne, $\dot{x}_1 = -x_1 + (x_2 - 1)u$, commence par se comporter comme $\dot{x}_2 = x_1 > 0$, d'où x_2 croît, dépasse 1 puis continue à croître indéfiniment puisque $\dot{V}$ devient positive. Le système n'est donc pas stabilisable dans toute la région $D = \{x \mid x_2 < 1\}$. La figure suivante qui représente les trajectoires de x à partir de 4 états initiaux pour la commande par retour d'état $v = -2x_1$ (qui stabilise la dynamique externe). On voit bien que la trajectoire partant de $(2, 0.9)$ diverge vers l'infini tandis que les trois autres trajectoires convergent vers le point d'équilibre $(0, 0)$.



EXERCICE 6-7

Montrer que la forme normale du système

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_3^2 u, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = x_1 x_3 + u, \quad y = x_2$$

$$\text{est} \quad \begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \quad \dot{\xi}_2 = \left(-\eta + \frac{\xi_2^3}{3} \right) \xi_2 + u, \quad y = \xi_1 \\ \dot{\eta} &= \left(-\eta + \frac{\xi_2^3}{3} \right) (1 + \xi_2^3). \end{aligned}$$

Est ce que ce système est stabilisable en $(0, 0)$?

Stabilité globale. Il s'agit maintenant de stabiliser globalement (au sens large) un système dont les équations sont de la forme

$$\dot{\xi} = f_e(\xi, \eta) + g_e(\xi, \eta)u, \quad (6-43)$$

$$\dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)\xi. \quad (6-44)$$

où l'entrée u a la même dimension que le vecteur d'état ξ , $g_e(\xi, \eta)$ est une matrice carrée inversible dans le domaine D de définition de f_e et g_e et les deux équations (6-43) et (6-44) sont affines en u et ξ . La dynamique externe (6-43) peut être linéarisée par l'entrée

$$u = [g_e(\xi, \eta)]^{-1} [v - f_e(\xi, \eta)] \quad (6-45)$$

ce qui nous amène à stabiliser le système

$$\dot{\xi} = v, \quad (6-46)$$

$$\dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)\xi. \quad (6-47)$$

En considérant que l'entrée de la dynamique interne (6-47) est ξ , on commence par chercher une commande par retour d'état $\xi = k(\eta)$ pour laquelle l'équation

$$\dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)k(\eta) \quad (6-48)$$

est asymptotiquement stable au point d'équilibre η^e , solution de $f(\eta^e) = 0$. Prenons l'origine des η en η^e c.à.d supposons que $\eta^e = 0$. D'après Lyapunov, il existe alors une fonction $V(\eta)$ définie positive (dp) telle que sa dérivée par rapport au temps le long de la trajectoire de η vérifiant l'équation (6-48) est définie négative. En d'autres termes :

$$W(\eta) = \frac{\delta V}{\delta \eta} [f(\eta) + g(\eta)k(\eta)] \quad \text{dn.} \quad (6-49)$$

Une fois la dynamique interne est stabilisée par le retour d'état $\xi = k(\eta)$, il reste à déterminer une entrée v qui stabilise tout le système en son point d'équilibre $(0,0)$. En ce point, $k(\eta)$ tend vers 0 et pour qu'en même temps ξ tende vers 0, on choisit v de sorte que $z = \xi - k(\eta)$ tende vers 0 quand $\eta \rightarrow 0$. Dans ce but, modifions l'écriture des équations d'état du système en effectuant dans (6-46) et (6-47) le changement de variable $\xi \rightarrow z$. On obtient :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \dot{\xi} - \dot{k}(\eta) = v - \dot{k}(\eta), \\ \dot{\eta} &= f(\eta) + g(\eta)k(\eta) + g(\eta)z. \end{aligned} \quad (6-50)$$

Ce système doit être asymptotiquement stable en $(z, \eta) = (0,0)$. Or la fonction $V_t(\eta, z) = V(\eta) + z^T z/2$ est définie positive puisque $V(\eta)$ l'est et sa dérivée par rapport au temps s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{V}_t &= \dot{V}(\eta) + z^T \dot{z} \\ &= \frac{\delta V}{\delta \eta} [f(\eta) + g(\eta)k(\eta) + g(\eta)z] + z^T [v - \dot{k}(\eta)] \\ &= W(\eta) + z^T \left[\frac{\delta V}{\delta \eta} g(\eta) + v - \dot{k}(\eta) \right]. \end{aligned}$$

Sachant que $W(\eta)$ est définie négative, $\dot{V}_t$ sera définie négative si

$$\begin{aligned} v &= \dot{k}(\eta) - \frac{\delta V}{\delta \eta} g(\eta) - cz, \quad (c > 0), \\ &= \frac{\delta k}{\delta \eta} [f(\eta) + g(\eta)\xi] - \frac{\delta V}{\delta \eta} g(\eta) - c[\xi - k(\eta)]. \end{aligned} \quad (6-51)$$

Ceci implique la stabilité asymptotique du système total. Ainsi la commande qui stabilise un système non linéaire de la forme (6-43), (6-44) est la combinaison de (6-45) et (6-51).

Exemple 6-10

La dynamique externe (1^{ère} équation) du système

$$\dot{x}_1 = -x_1 + (x_2 - 1)u, \quad \dot{x}_2 = x_2(x_2 + x_1 - 1) \quad (1)$$

considéré à l'exemple 6-9 se linéarise par l'entrée $u = (v + x_1)/(x_2 - 1)$ qui la réduit à $\dot{x}_1 = v$ à

condition que $x_2 \neq 1$. Pour le retour d'état $x_1 = -x_2$, la dynamique interne (2^{ème} équation) devient $\dot{x}_2 = -x_2$ qui est stable puisque $V = x_2^2/2$ est dp et $\dot{V} = x_2 \dot{x}_2 = -x_2^2$ est dn.

En effectuant maintenant le changement de variable $z = x_1 - (-x_2)$, les équations du système total s'écrivent

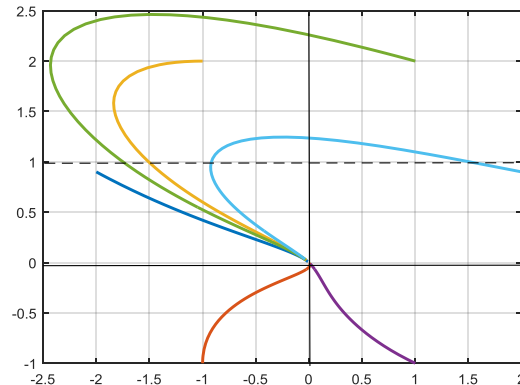
$$\begin{aligned} \dot{z} &= \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = v + \dot{x}_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_2 z. \end{aligned}$$

Pour déterminer l'entrée v qui le stabilise, on dérive la fonction définie positive $V_t = V + z^2/2$:

$$\begin{aligned} \dot{V}_t &= \frac{\delta V}{\delta x_2} \dot{x}_2 + z \dot{z} \\ &= x_2(-x_2 + x_2 z) + z(v + \dot{x}_2) \\ &= -x_2^2 + z(x_2^2 + v + \dot{x}_2). \end{aligned}$$

Cette dérivée sera définie négative si l'entrée est

$$\begin{aligned} v &= -cz - x_2^2 - \dot{x}_2, \quad c > 0, \\ &= -c(x_1 + x_2) - x_2(2x_2 + x_1 - 1). \end{aligned}$$



Les équations de la boucle fermée du système (1) s'obtiennent en remplaçant v par son expression dans l'équation $\dot{x}_1 = v$ de la dynamique externe linéarisée par $u = (v + x_1)/(x_2 - 1)$. Comme le montre la figure ci-dessus, ces équations sont globalement stables c.à.d. la trajectoire de leur état converge vers le point d'équilibre $(0,0)$ quel que soit l'état initial. Cependant, l'entrée u diverge vers l'infini à l'instant où une trajectoire traverse l'horizontale $x_2 = 1$.

EXERCICE 6-8

Les équations d'état d'un système dont la dynamique externe est linéarisée sont

$$\dot{\xi} = v, \quad \dot{\eta}_1 = \eta_2, \quad \dot{\eta}_2 = -\eta_2^3 - \eta_1 \xi.$$

En prenant $V = \eta_1^{2p} / 2p + \eta_2^{2q} / 2q$, déterminer les entiers p et q pour montrer que $\xi = \eta_1^2$ stabilise la dynamique interne. Que sera la commande v qui stabilise globalement le système total ?

Poursuite. Soit un système mono-variable non-linéaire de la forme affine de degré relatif r :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad y = h(x),$$

Nous savons que s'il est linéarisable, il existe un difféomorphisme $(\xi, \eta) = T(x)$ qui le transforme en une forme normale :

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A_0 \xi + B_c \gamma(x)[u - \alpha(x)], \quad y = C_c \xi, \\ \dot{\eta} &= \phi(\xi, \eta), \end{aligned}$$

où $\alpha(x)$ et $\gamma(x)$ sont définies en (6-35), les matrices A_0 , B_c et C_c sont données en (3-36') et

$$\xi = [y; \dot{y}; \ddot{y}; \dots; y^{(r-1)}].$$

Déterminons une commande pour laquelle $y(t)$ et ses $(r-1)$ premières dérivées $\dot{y}(t), \ddot{y}(t), \dots, y^{(r-1)}(t)$ suivent une référence $y_d(t)$ et ses $(r-1)$ premières dérivées $\dot{y}_d(t), \ddot{y}_d(t), \dots, y_d^{(r-1)}(t)$. Posons

$$\xi_d = [y_d; \dot{y}_d; \ddot{y}_d; \dots; y_d^{(r-1)}]$$

et $e = \xi - \xi_d.$

En remarquant que

$$\dot{\xi}_d = [\dot{y}_d; \ddot{y}_d; \dots; y_d^{(r)}] = A_0 \xi_d + B_c y_d^{(r)},$$

les équations du système s'écrivent :

$$\dot{e} = A_0 e + B_c \left\{ \gamma(x)[u - \alpha(x)] - y_d^{(r)} \right\}, \quad (6-52)$$

$$\dot{\eta} = \phi(e + \xi_d, \eta). \quad (6-53)$$

Si $\gamma(x)$ est inversible, l'entrée

$$u = \alpha(x) + \beta(x)(v + y_d^{(r)}), \quad \beta(x) = \gamma^{-1}(x), \quad (6-54)$$

et la commande $v = -Ke$ transforment l'équation de la dynamique externe (6-52) en

$$\dot{e} = (A_0 - B_c K)e.$$

Pour que cette équation soit stable et que $e \rightarrow 0$ c.à.d. $\xi \rightarrow \xi_d$, il suffit de choisir le vecteur K de sorte que les pôles de $A_0 - B_c K$ soient toute à partie réelle négative. Cependant, pour la stabilité globale, il faut s'assurer que la dynamique interne (6-53) soit stable et bornée pour toute solution e de la dynamique externe. Par contre, pour la stabilité locale, il suffit que la dynamique zéro soit stable.

Exemple 6-11

On veut amener un pendule, de longueur L , de masse m et de facteur de frottement f sur l'articulation, de la position verticale à la position horizontale. Entre ces deux positions, on a la liberté de choisir le mouvement désiré $y_d(t)$ de la rotation. Le plus naturel est le mouvement exponentiel

$$y_d(t) = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-t/\tau}).$$

Cette rotation est d'autant plus rapide que la constante de temps τ est petite mais une grande rapidité nécessite sur l'articulation un grand couple $u(t)$ qui peut saturer l'actionneur.

L'équation de la rotation effective $y(t)$ est

$$mL^2 \ddot{y} = -mg \sin y - f \dot{y} + u.$$

dont les équations d'état sont

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -a \sin x_1 - b x_2 + cu, \end{cases} \quad y = x_1$$

où

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}, \quad a = g/L^2, \quad b = f/(mL^2) \text{ et } c = 1/(mL^2).$$

Ce système est de degré relatif $r = 2 = n$ et ne possède donc pas une dynamique interne.

Les composantes de l'écart

$$e = x - x_d, \quad x_d = [y_d; \dot{y}_d]$$

vérifient

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= x_2 - \dot{y}_d = x_2 - x_{2d} = e_2 \\ \dot{e}_2 &= -a \sin x_1 - b x_2 + cu - \ddot{y}_d. \end{aligned}$$

L'entrée

$$u = \frac{1}{c}(v + \ddot{y}_d + a \sin x_1 + b x_2)$$

et la commande $v = -K e$ transforment les équations précédentes en

$$\dot{e} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v = (A_0 - B_c K) e, \quad K = [k_1 \quad k_2],$$

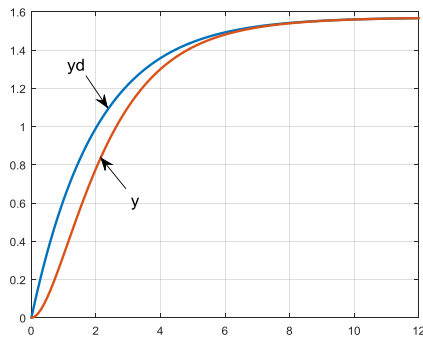
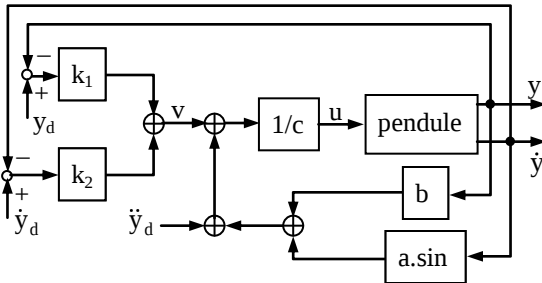
$$\Rightarrow \ddot{e}_1 + k_2 \dot{e}_1 + k_1 e_1 = 0, \quad e_1 = y - y_d.$$

$$\Rightarrow (s^2 + k_2 s + k_1) e_1(s) = s e(0) + \dot{e}(0).$$

Si $y(0) = \dot{y}(0) = 0$, on a $e(0) = 0$, $\dot{e}(0) = -\pi / 2\tau$ et si l'on veut que l'amortissement de e_1 soit critique et que sa constante de temps soit égale à la moitié de celle de y_d , on prend $k_1 = 4/\tau^2$ et $k_2 = 4/\tau$. La réponse sera donc

$$y(t) = y_d(t) - \frac{\pi}{2\tau} t e^{-2t/\tau}.$$

Les figures suivantes montrent le schéma de la commande et la manière dont la réponse y suit la référence y_d pour $\tau = 2$ sec.



EXERCICE 6-9

Écrire le système suivant sous la forme normale

$$\dot{x}_1 = x_2 + 2x_1^2, \quad \dot{x}_2 = x_3 + u, \quad \dot{x}_3 = x_1 - x_3, \quad y = x_1.$$

Déterminer une commande de poursuite de la référence $y_d = \sin t$ et vérifier si la dynamique interne est stable et bornée.

6-3. MODE DE GLISSEMENT

La commande de poursuite établie à la section précédente exige une connaissance suffisamment précise des fonctions f , g et h du système

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad y = h(x).$$

Nous supposons maintenant qu'à l'entrée u se superpose un bruit b et que $f(x)$ et $g(x)$ ne sont qu'un modèle nominal approximant des fonctions réelles lisses inconnues $f_r(x)$ et $g_r(x)$. L'incertitude sur $f(x)$ et $g(x)$ provient des paramètres imprécis ou des dynamiques de hautes fréquences souvent négligées en modélisant l'actionneur ou certaines parties du système commandé. Les équations réelles de ce dernier sont donc

$$\dot{x} = f_r(x) + g_r(x)(u + b), \quad y = h(x) \quad (6-55)$$

où la fonction h est connue mais f_r , g_r et b sont inconnues. Malgré ces incertitudes, il s'agit, comme dans la section précédente, de minimiser l'écart entre les deux vecteurs

$$\xi = [y; \dot{y}; \ddot{y}; \dots; y^{(r-1)}]$$

et
$$\xi_d = [y_d; \dot{y}_d; \ddot{y}_d; \dots; y_d^{(r-1)}]$$

où y_d est la réponse désirée supposée lisse et r est le degré relatif de (6-55) supposé le même pour toutes les fonctions possibles $g_r(x)$. En posant

$$e = \xi - \xi_d = [e_1 \quad e_2 \quad \dots \quad e_r]^T,$$

nous avons vu, sous les conditions (6-30), qu'il existe un difféomorphisme T telle que la transformation $(\xi, \eta) = T(x)$ ramène les équations du système à la forme normale (6-52), (6-53) à condition de remplacer u par $u + b$, f par f_r et g par g_r . On obtient (voir (6-35) et (6-36)) :

$$\begin{aligned}\dot{e} &= A_0 e + B_c \left\{ \gamma(x)[u + b - \alpha(x)] - y_d^{(r)} \right\}, \\ \dot{\eta} &= \phi(e + \xi_d, \eta), \\ \text{où } \gamma(x) &= L_{g_r} L_{f_r}^{r-1} h(x) \quad \text{et} \quad \gamma(x)\alpha(x) = -L_{f_r}^r h(x)\end{aligned}$$

Principe. Admettons pour simplifier que l'état η de la dynamique interne $\dot{\eta} = \phi(e + \xi_d, \eta)$ est borné pour toute entrée bornée $\xi = e + \xi_d$. D'un autre côté, tenant compte des expressions de A_0 et B_c données en (6-36'), l'équation de la dynamique externe (1^{ère} équation) peut s'écrire sous la forme :

$$\dot{e}_i = e_{i+1}, \quad i = 1, \dots, r-1, \quad (6-56)$$

$$\dot{e}_r = \gamma(x)[u + b - \alpha(x)] - y_d^{(r)}. \quad (6-57)$$

Les équations (6-56) constituent un système linéaire contrôlable d'entrée e_r . Par le retour d'état

$$e_r = -(k_1 e_1 + k_2 e_2 + \dots + k_{r-1} e_{r-1}), \quad (6-58)$$

ce système se stabilise et $e \rightarrow 0$ si les k_i sont choisis de sorte que le polynôme caractéristique

$$s^{r-1} + k_{r-1} s^{r-2} + \dots + k_2 s + k_1 \quad (5-59)$$

soit de Hurwitz. Par conséquent, la convergence de e vers 0 sera assurée si, pour tout état initial $e(0)$, la trajectoire de l'état $e(t)$ converge, en un temps fini, vers l'hyperplan S défini par

$$\sigma(e) = k_1 e_1 + k_2 e_2 + \dots + k_{r-1} e_{r-1} + e_r = 0 \quad (6-60)$$

et y reste. En glissant sur S , l'état e vérifie (6-58) et tend par conséquent vers l'origine. L'hyperplan S est appelé *surface de glissement* et la fonction scalaire $\sigma(e)$, appelée *fonction de glissement*, est une mesure algébrique de la distance entre le point représentant l'état e et cet hyperplan. Il s'agit donc de déterminer une commande u qui annule $\sigma(e)$ en un temps fini à partir de tout état dans D extérieur à S . D'après Lyapunov, cette convergence sera garantie si la dérivée par rapport au temps de la fonction définie positive $V(e) = \sigma^2/2$ est négative. Or, $\dot{V} = \sigma \dot{\sigma}$ et d'après les équations du système (6-56) et (6-57) et de l'expression (6-60) de $\sigma(e)$, on a :

$$\begin{aligned}\dot{\sigma} &= \frac{\delta \sigma}{\delta e} \dot{e} = [k_1 \quad \dots \quad k_{r-1} \quad 1] \dot{e} = \sum_{i=1}^{r-1} k_i e_{i+1} + \dot{e}_r \\ &= \Delta(x) + \gamma(x)u.\end{aligned}$$

$$\text{où } \Delta(x) = \sum_{i=1}^{r-1} k_i e_{i+1} - \gamma(x)[\alpha(x) - b] - y_d^{(r)}. \quad (6-61)$$

$$\text{Donc } \dot{V} = \sigma \dot{\sigma} \leq |\sigma| |\Delta(x)| + \gamma(x)u\sigma.$$

Cette dérivée sera négative si la commande est

$$u = -\beta(x) \text{sgn}(\sigma) \quad (6-62)$$

avec $\beta(x)$ suffisamment positive $\forall x \in D$. En effet, sous cette commande, on a :

$$\dot{V} \leq |\sigma| |\Delta(x)| - |\sigma| |\gamma(x)| \beta(x). \quad (6-63)$$

En admettant que, pour toutes les fonctions possibles f_r et g_r , le rapport $|\Delta(x)|/|\gamma(x)|$ est borné par une fonction positive connue $\rho(x)$, l'inégalité (6-63) montre que $\dot{V} < 0$ si, $\forall x \in D$,

$$\beta(x) \geq \rho(x) + \beta_0, \quad \beta_0 > 0. \quad (6-64)$$

Souvent, quand la fonction $\rho(x)$ est bornée, on simplifie la commande en remplaçant $\beta(x)$ par une constante $\beta \geq \rho(x) + \beta_0 \forall x \in D$, c.à.d. on prend

$$u = -\beta \text{sgn}(\sigma). \quad (6-62')$$

Sous l'action de la commande (6-62) ou (6-62'), $\sigma(e)$ converge asymptotiquement vers 0 c.à.d., à partir de tout état $e(0) \in D$, l'état $e(t)$ arrive à l'hyperplan S et y reste.

Le temps t_s pour passer de $e(0)$ à S est égal au temps d'annuler V . Or $|\Delta(x)| \leq |\gamma(x)|\rho(x)$ et tenant compte de (6-64), on déduit de (6-63) que

$$\dot{V} \leq -|\sigma| |\gamma(x)| \beta_0 = -\sqrt{2V} |\gamma(x)| \beta_0.$$

Généralement, la fonction $|\gamma(x)|$ est bornée par un nombre positif γ_0 . D'où

$$\int_{V[e(0)]}^0 \frac{dV}{\sqrt{V}} \leq -\int_0^{t_s} \sqrt{2} \gamma_0 \beta_0 dt \Rightarrow \sqrt{V[e(0)]} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma_0 \beta_0 t_s$$

et la durée de transition de $e(0)$ à S est

$$t_s \leq \frac{\sigma[e(0)]}{\gamma_0 \beta_0}. \quad (6-65)$$

Elle est finie si la distance de l'erreur initiale $e(0)$ à l'hyperplan S est finie.

Après l'instant t_s , l'état e glisse sur S et vérifie les équations d'état (6-56) avec une entrée e_r définie en (6-58). En d'autres termes, $\dot{e} = A_r e$ où

$$A_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & \cdots & -k_{r-1} & 0 \end{pmatrix}$$

est stable puisque son polynôme caractéristique n'est autre que le polynôme de Hurwitz (6-59). Ainsi, pour $t \geq t_s$,

$$e(t) = e(t_s) \exp(A_r t) \rightarrow 0. \quad (6-66)$$

On voit que la politique (6-62') est très robuste puisque, sans tenir compte du modèle défini par f , g et h , il suffit que β soit suffisamment grand pour stabiliser le système et annuler l'erreur. Cependant, à cause du bruit b et du petit retard de commutation du relais $\text{sgn}(\sigma)$ de la commande (6-62') ou à cause de son hystérésis, l'état e peut quitter l'hyperplan S . Mais dès qu'il s'en écarte légèrement, le relais rentre en action et la commande ramène e vers S . Ceci produit des petites oscillations autour du mouvement moyen (6-66) de e et le relais bascule entre $+1$ et -1 à très haute fréquence. Ce phénomène, appelé *broutement* (*chattering*), est évidemment nuisible surtout pour des systèmes mécaniques. Donnons deux remèdes à cet inconvénient.

Réduction du broutement. Un premier moyen consiste à remplacer le relais $\text{sgn}(\sigma)$ par une saturation $\text{sat}(\sigma/\varepsilon)$ comme le montre la figure 6-3. Parfois, à la place de la saturation, on emploie la fonction lisse $\tanh(\sigma/\varepsilon)$ ou $(2/\pi)\arctg(\sigma/\varepsilon)$.

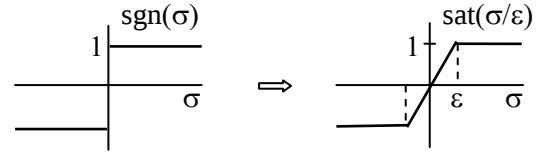


Fig. 6-3. Relais idéal remplacé par une saturation

Quand $|\sigma(e)| > \varepsilon$, la saturation agit comme le relais et l'état e se dirige vers l'hyperplan $\sigma(e) = 0$. Quand $|\sigma(e)|$ devient inférieur à ε , au lieu que l'amplitude de la commande u soit $\beta(x)$, elle devient $\beta(x)|\sigma(e)|/\varepsilon < \beta(x)$. Ceci amortit la décroissance de $V = \sigma^2/2$, ralentit la traversée de l'hyperplan S et diminue la fréquence des oscillations autour de cet hyperplan. Cependant, la convergence de e vers l'origine cesse d'être parfaite car elle continue à osciller autour de ce point avec une amplitude d'autant plus petite que ε est petit. D'autre part, cette méthode n'est efficace que lorsque le bruit b est assez faible et que le modèle $g(x)$ de $g_r(x)$ est suffisamment précis.

La méthode 2-SMC (second order sliding mode control) réussit beaucoup mieux. C'est une version non linéaire de la commande PI dont la relation $u = -(k_p \sigma + k_i \int \sigma dt)$ est remplacée par

$$u = -(k_p \sqrt{|\sigma|} \text{sgn}(\sigma) + k_i \int \text{sgn}(\sigma) dt). \quad (6-67)$$

En pratique, il est recommandé de prendre $k_p = \beta$ et $k_i = 1.1\beta^2$ où β est une constante qu'on augmente progressivement jusqu'à l'arrivée à une bonne performance.

Pour la même valeur $\beta = 50$, nous comparons dans l'exemple suivant, les 3 politiques : à relais, à saturation et 2-SMC.

Exemple 6-12

Reprenons les équations du pendule de l'exemple (6-11) en ajoutant au couple u un bruit b_r :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -a \sin x_1 - b x_2 + c(u + b_r), \end{cases}, y = x_1$$

et déterminons une commande par mode de glissement qui le fait osciller une fois par seconde avec une amplitude de 1 rad. c.à.d. $y_d = \cos 2\pi t$.

Le degré relatif de ce système étant $r = 2$, il ne comporte pas une dynamique interne. Les équations du vecteur d'erreur $e = [y - y_d; \dot{y} - \dot{y}_d]$ sont

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2, \\ \dot{e}_2 &= c \left[u + b_r - \frac{a \sin x_1 + b x_2}{c} \right] - \ddot{y}_d. \end{aligned}$$

Le retour d'état $e_2 = -ke_1$, $k > 0$, stabilise la première équation, d'où la droite de glissement est

$$\sigma(e) = ke_1 + e_2 = 0.$$

Le programme suivant simule la politique à relais :

$$u = -\beta \cdot \text{sgn}(\sigma),$$

en supposant que $a = 10$, $b = 5$, $c = 1$, $k = 2$, et que l'expression du bruit est $b_r = 10\sin(30t) + 2\sin(60t)$.

Définition des équations d'état de l'erreur

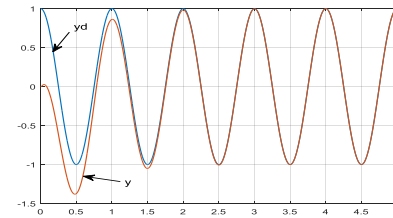
function xp = pendnl(t,x)

```
yd = cos(2*pi*t);
ypd = -2*pi*sin(2*pi*t);
yppd = -4*(pi^2)*cos(2*pi*t);
s = 2*x(1) + x(2);
bet = 50;
u = -bet*sign(s); %commande
br = 10*sin(30*t) + 2*sin(60*t);
x1 = x(1) + yd; x2 = x(2) + ypd;
xp = [x(2);
      u + br - (10*sin(x1) + 5*x2) - yppd];
end
```

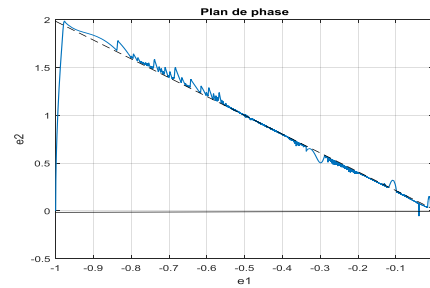
Résolution et représentation graphique

```
>> x0 = [-1;0];
>> t0 = 0 ; tf = 5;
>> [t,x] = ode45(@pendnl,[t0,tf],x0);
>> yd = cos(2*pi*t);
>> y = x(:,1) + yd;
>> plot(t,[yd,y])
>> plot(x(:,1),x(:,2))
>> u = -50*sign(2*x(:,1) + x(:,2));
>> plot(t,u)
```

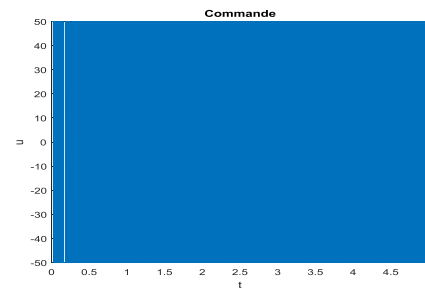
Les graphes suivants montrent que la réponse y se confond avec la réponse désirée y_d après une période transitoire d'environ 2 secondes.



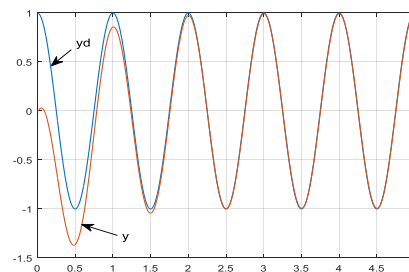
À partir de sa position initiale $(-1,0)$, l'état de l'erreur $e = (e_1, e_2)$ se dirige vers la droite de glissement $2e_1 + e_2 = 0$ sur laquelle le mouvement moyen de e est un glissement vers l'origine.

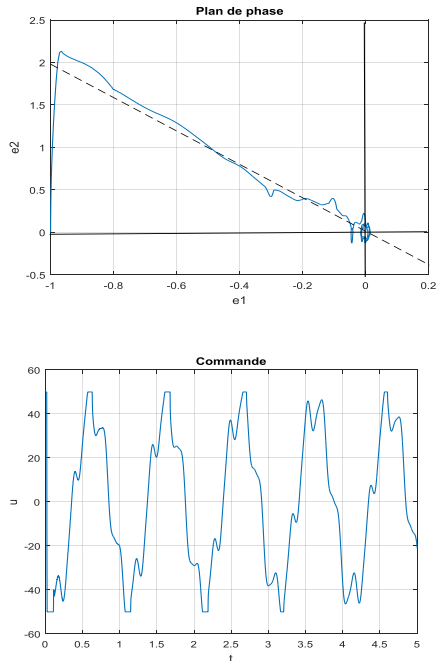


Pour éliminer l'effet du bruit, le relais de la commande commute entre -1 et $+1$ à très haute fréquence.



Maintenant, en remplaçant dans le programme précédent la commande à relais, $u = -\beta \text{sgn}(\sigma)$, par la commande à saturation, $u = -\beta \cdot \text{sat}(\sigma/\varepsilon)$ avec $\varepsilon = 0.1$, on obtient les résultats suivants.





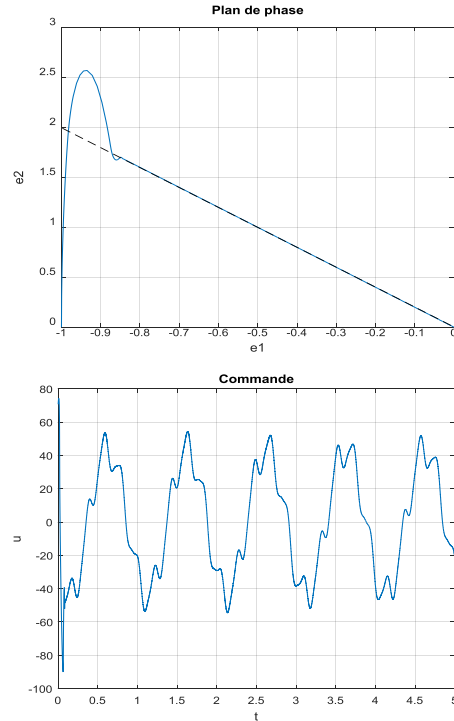
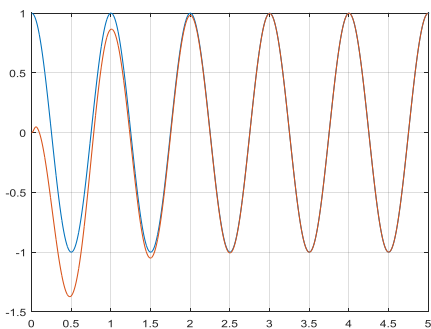
- La poursuite est presque la même que dans le cas précédent.
- Le broutement a presque disparu.
- Bien que l'état ne glisse plus sur la droite de glissement $2e_1 + e_2 = 0$, il s'en écarte peu.
- L'erreur e ne converge plus vers l'origine mais vers un petit voisinage de ce point.
- La commande est assez lisse et sa fréquence fondamentale, beaucoup plus faible que celle de la commande à relais, est égale à la fréquence de la réponse y_d .

Pour terminer, simulons la commande 2-SMC dont l'expression s'écrit sous la forme

$$u = -(\beta\sqrt{|\sigma|} \operatorname{sgn}(\sigma) + v,$$

$$\dot{v} = -1.1\beta^2 \operatorname{sgn}(\sigma)$$

qui introduit une nouvelle variable d'état v . Les résultats obtenus sont les suivants.



- La poursuite est presque la même que dans les cas précédents.
- Le broutement a complètement disparu.
- Après une oscillation transitoire, l'état glisse exactement sur la droite de glissement $2e_1 + e_2 = 0$.
- L'erreur e converge vers l'origine et l'effet du bruit est éliminé en régime permanent.
- Comme dans le cas précédent, la commande est assez lisse et sa fréquence fondamentale, est égale à la fréquence de la réponse y_d . En plus cette commande a complètement filtré le bruit grâce à l'intégration et parce que la saturation à ± 50 n'existe plus.

EXERCICE 6-10

Reprendre l'exemple 6-12 pour le système

$$\dot{x}_1 = x_2 + \sin x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1^2 + u/2, \quad y = x_1$$

quand la réponse désirée est $y_d(t) = 1 - e^{-t}/2$.

Généralisation aux systèmes MIMO.

Supposons maintenant que le système

$$\dot{x} = f_r(x) + g_r(x)(u + b), \quad y = h(x)$$

a p entrées $u_1, u_2, \dots, u_p$ et q sorties $y_1, y_2, \dots, y_q$ avec $p \geq q$. La fonction incertaine $g_r(x)$ est une matrice $n \times p$ et la fonction h de sortie est un vecteur

à q composantes $h_1, h_2, \dots, h_q$. On admet que f_r, g_r et h sont lisses et que, pour $k = 1, \dots, q$,

$$\begin{cases} L_{g_r} L_{f_r}^{i-1} h_k(x) = (0, 0, \dots, 0) & \text{pour } i = 1, 2, \dots, r_k - 1, \\ L_{g_r} L_{f_r}^{r_k-1} h_k(x) \neq (0, 0, \dots, 0), \end{cases}$$

ce qui implique que les dérivées de y_k ont pour expressions

$$\begin{cases} y_k^{(i)} = L_{f_r}^i h_k(x) & \text{pour } i = 0, 1, \dots, r_k - 1, \\ y_k^{(r_k)} = L_{f_r}^{r_k} h_k(x) + L_{g_r} L_{f_r}^{r_k-1} h_k(x)(u + b). \end{cases} \quad (6-68)$$

L'entier r_k est le degré relatif partiel correspondant à la sortie y_k et $r = r_1 + r_2 + \dots + r_q$ est le degré relatif du système. Posons

$$\xi = \begin{bmatrix} y_1 & \dots & y_1^{(r_1-1)} & y_2 & \dots & y_2^{(r_2-1)} & \dots & y_q & \dots & y_q^{(r_q-1)} \end{bmatrix}^T$$

et soit

$$\eta = \varphi(x) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_{n-r}(x) \end{bmatrix}^T \quad (6-69)$$

où les fonctions φ_i sont choisies de sorte que

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} g_r(x) = (0, 0, \dots, 0)$$

et que la transformation

$$T(x) = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

soit un difféomorphisme.

Soit y_{kd} la réponse désirée à la sortie $k = 1, \dots, q$ et posons

$$\xi_d = \begin{bmatrix} y_{1d} & \dots & y_{1d}^{(r_1-1)} & y_{2d} & \dots & y_{2d}^{(r_2-1)} & \dots & y_{qd} & \dots & y_{qd}^{(r_q-1)} \end{bmatrix}^T$$

L'écart entre ξ et ξ_d est

$$e = \begin{bmatrix} e^1 & e^2 & \dots & e^q \end{bmatrix}^T$$

où

$$e^k = \begin{bmatrix} y_k - y_{kd} & y_k^{(1)} - y_{kd}^{(1)} & \dots & y_k^{(r_k-1)} - y_{kd}^{(r_k-1)} \end{bmatrix}.$$

Des relations (6-68) et (6-69) on déduit que la transformation T ramène les équations du système à la forme normale :

$$\dot{e}_i^k = e_{i+1}^k, \quad i = 1, \dots, r_k - 1, \quad (6-70)$$

$$\dot{e}_{r_k}^k = \gamma_k(x)[u + b - \alpha_k(x)] - y_{dk}^{(r)}, \quad (6-71)$$

pour $k = 1, \dots, q$

et

$$\dot{\eta} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} f(x) \quad (6-72)$$

$$= \phi(\xi, \eta) = \phi(e + \xi_d, \eta)$$

où

$$\gamma_k(x) = L_{g_r} L_{f_r}^{r_k-1} h_k(x), \quad \gamma_k(x) \alpha_k(x) = -L_{f_r}^{r_k} h_k(x)$$

et

$$\partial \varphi / \partial x \text{ est le jacobien de } \varphi = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \dots \ \varphi_{n-r}]^T.$$

Si la solution de la dynamique interne (6-72) est bornée pour toute entrée bornée $\xi = e + \xi_d$, il suffit de stabiliser chacune des équations linéaires (6-70) par le retour d'état

$$e_{r_k}^k = -(k_{k1} e_1^k + k_{k2} e_2^k + \dots + k_{k(r_k-1)} e_{r_k-1}^k) \quad (6-73)$$

pour que $e \rightarrow 0$. Dans ce but, on choisit une commande u qui entraîne l'état e vers chacun des hyperplans S_k définis par $\sigma_k(e^k) = 0$ avec

$$\sigma_k(e^k) = k_{k1} e_1^k + \dots + k_{k(r_k-1)} e_{r_k-1}^k + e_{r_k}^k. \quad (6-74)$$

La surface de glissement est l'intersection de ces hyperplans et, en s'inspirant de l'exemple 6-12, on choisit la commande u de sorte à satisfaire la condition

$$\dot{V}_k = \sigma_k \dot{\sigma}_k < 0 \quad \forall k = 1, \dots, q$$

et à supprimer autant que possible le broutement.

6-4. SYSTÈMES PASSIFS

Un système à p entrées et p sorties, défini par ses équations d'état

$$\dot{x} = f(x, u), \quad y = h(x, u) \quad (6-75)$$

est passif s'il existe une fonction $V(x)$ définie positive ou semi-définie positive telle que $\forall t$

$$V[x(t)] - V[x(0)] \leq \int_0^t u^T(\tau) y(\tau) d\tau. \quad (6-76)$$

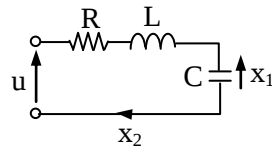
La fonction $V(x)$ est appelée *fonction de stockage*. Si cette fonction est continue et dérivable, l'équation précédente sera équivalente à

$$\dot{V} = \frac{\delta V}{\delta x} f(x, u) \leq u^T y \quad \forall x \text{ et } u. \quad (6-77)$$

L'exemple suivant donne une interprétation physique à la définition (6-77) des systèmes passifs.

Exemple 6-13

En désignant par x_1 la tension aux bornes de la capacité C et par x_2 le courant i qui la traverse, les équations d'état du circuit RLC ci-contre s'écrivent :



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 / C, \\ \dot{x}_2 = (-x_1 - Rx_2 + u) / L, \end{cases} \quad y = x_2 = i$$

où le courant y est la réponse du circuit à la tension d'entrée u . L'énergie stockée dans ce circuit est

$$V = \frac{1}{2} C x_1^2 + \frac{1}{2} L x_2^2$$

qui est dp et dont le taux de variation est

$$\dot{V} = C x_1 \dot{x}_1 + L x_2 \dot{x}_2 = -R x_2^2 + u x_2$$

$$\Rightarrow \quad u y = u i = \dot{V} + R i^2.$$

De la définition (6-77), on déduit que le circuit est passif : la puissance reçue $u y$ est supérieure au taux de variation $\dot{V}$ de l'énergie stockée. Le reste de l'énergie reçue est dissipée dans R sous forme d'énergie calorifique.

L'état d'un système statique étant constant, le taux de variation de V est $\dot{V} = 0 \forall t$ et les équations (6-75) se réduisent à $y = h(u)$. Dans ce cas, l'inégalité (6-77) devient

$$u^T y = u^T h(u) \geq 0. \quad (6-77')$$

Par conséquent un système statique passif ne peut que recevoir de la puissance et ne peut pas en fournir.

Interconnexions passives. Les systèmes G et H de la boucle représentée par la figure 6-4 sont passifs de fonctions de stockage $V_1(x)$ et $V_2(x)$.

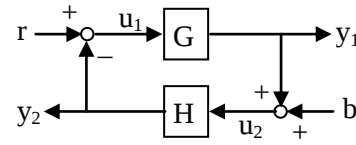


Fig. 6-4. Structure de base d'un système de commande

On a :

$$u_1^T y_1 \geq \dot{V}_1, \quad u_2^T y_2 \geq \dot{V}_2$$

ou

$$(r - y_2)^T y_1 \geq \dot{V}_1 \quad \text{et} \quad (b + y_1)^T y_2 \geq \dot{V}_2 \quad \forall x, r \text{ et } b.$$

En additionnant membre à membre les inégalités précédentes et en désignant par $u = [r \ b]^T$ son entrée et par $y = [y_1 \ y_2]^T$ sa sortie, on obtient :

$$r^T y_1 + b^T y_2 \geq \dot{V}_1 + \dot{V}_2 \quad \text{ou} \quad u^T y \geq \dot{V} \geq 0.$$

Ainsi, si ses organes G et H sont passifs, le système à contre-réaction de la figure 6-4 d'entrée u et de sortie y est passif.

En particulier, si $b = 0$ et H est statique passif défini par $y_2 = \varphi(y_1)$ avec $y_1^T \varphi(y_1) \geq 0$, l'inégalité $(r - y_2)^T y_1 \geq \dot{V}_1$ s'écrit $r^T y_1 \geq \dot{V}_1 + y_1^T \varphi(y_1)$ et on dit que le système d'entrée r et de sortie y_1 est passif en sortie. Si, en plus, $y_1^T \varphi(y_1) > 0 \forall y_1 \neq 0$, on dit que ce système est strictement passif en sortie.

Considérons maintenant la connexion en parallèle représentée à la figure 6-5 où G et H sont passifs de fonctions de stockage V_1 et V_2 .

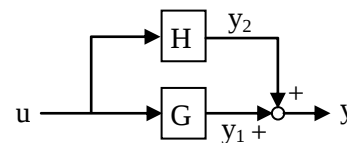


Fig. 6-5. Connexion en parallèle de deux éléments passifs

$$\text{On a :} \quad u^T y_1 \geq \dot{V}_1, \quad u^T y_2 \geq \dot{V}_2.$$

$$\Rightarrow \quad u^T (y_1 + y_2) \geq \dot{V}_1 + \dot{V}_2 \quad \text{ou} \quad u^T y \geq \dot{V} \geq 0.$$

Ainsi, le système parallèle de la figure 6-5 d'entrée u et de sortie y est passif si ses organes G et H le sont.

En particulier, si H est statique passif défini par $y_2 = \varphi(u)$ avec $u^T \varphi(u) \geq 0$, l'inégalité $u^T y_1 \geq \dot{V}_1$ s'écrit $u^T (y - y_2) \geq \dot{V}_1$ ou $u^T y \geq \dot{V}_1 + u^T \varphi(u)$ et on dit que le système d'entrée u et de sortie y est passif en entrée. Si, en plus, $u^T \varphi(u) > 0 \forall u \neq 0$, on dit que ce système est strictement passif en entrée.

EXERCICE 6-11

On considère la connexion en contre-réaction de la figure 6-4 avec $b = 0$. Montrer que le système d'entrée r et de sortie y_1 est strictement passif en sortie si G est passif et H est strictement passif en entrée ou si G est strictement passif en sortie et H est passif.

Commande passive. Il s'agit de commander un système passif de la forme

$$\dot{x} = f(x, u), \quad y = h(x). \quad (6-75')$$

Nous supposons que, suite à un changement de variables, $f(0, 0) = 0$ et $h(0) = 0$, c.à.d. si l'état d'équilibre du système autonome ($u = 0$) est x^e et que la réponse en ce point est y^e , l'origine des x est placée en x^e et l'origine des y en y^e .

On dit que le système (6-75') est à *état zéro observable* si, pour $u(t) \equiv 0$ ($u(t) = 0 \forall t$),

$$y(t) \equiv 0 \Rightarrow x(t) \equiv 0. \quad (6-78)$$

En d'autres termes, la seule trajectoire de $\dot{x} = f(x, 0)$ qui est entièrement incluse dans l'ensemble $\{x \mid h(x) = 0\}$ est celle qui ne quitte pas l'origine.

Le théorème suivant est fondamental pour les commandes basées sur la passivité des systèmes.

Th-2. Si le système (6-75') est passif de fonction de stockage V définie positive et s'il est à état zéro observable, tout retour de sortie $u = -\varphi(y)$ stabilise

asymptotiquement l'origine à condition que $\varphi(0) = 0$ et que $y^T \varphi(y) > 0 \forall y \neq 0$.

Preuve

Le système étant passif de fonction de stockage V dp, on a, pour $u = -\varphi(y)$,

$$\dot{V} \leq y^T u = -y^T \varphi(y).$$

Comme $y^T \varphi(y) > 0$ et ne s'annule qu'en $y = 0$, de l'inégalité précédente on déduit que $\dot{V}$ est semi définie négative et que ($\dot{V} = 0 \Rightarrow y = 0$). Or, le système étant à état zéro observable, l'implication (6-78) montre que $\dot{V} \equiv 0 \Rightarrow y(t) \equiv 0 \Rightarrow x(t) \equiv 0$. Par conséquent, la seule trajectoire incluse dans l'ensemble $\mathcal{N} = \{x \mid \dot{V}(x) = 0\}$ est $x(t) \equiv 0$. D'après Lyapunov (voir théorème th-2, section 6-8 de la partie III) l'origine de la boucle fermée $\dot{x} = f[x, -\varphi(y)]$ est asymptotiquement stable. Cette stabilité sera globale si V est non bornée dans toutes les directions de x . ■

Une interprétation physique du théorème précédent est fournie par l'exemple simple suivant.

Exemple 6-14

L'entrée du système masse-ressort ci-contre est la force u et sa sortie est la vitesse y de m . Ses équations d'état sont

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = (-kx_1 + u) / m \quad \text{et} \quad y = x_2$$

où x_1 est le déplacement de m . L'énergie totale stockée dans ce système s'exprime par la fonction définie positive

$$V = kx_1^2 / 2 + mx_2^2 / 2$$

dont la dérivée par rapport au temps est

$$\dot{V} = kx_1x_2 + mx_2(-kx_1 + u) / m.$$

$$= x_2 u = yu.$$

Le système est donc passif sans perte d'énergie. En plus il est à état zéro observable car d'après ses équations et pour $u = 0$, on a :

$$y(t) \equiv 0 \Leftrightarrow x_2(t) \equiv 0 \Rightarrow x_1(t) \equiv 0.$$

D'où tout retour d'état $u = -\varphi(y)$ tel que $y\varphi(y) > 0 \forall y \neq 0$ stabilise asymptotiquement l'origine au sens large (car V non bornée dans toutes les directions). À remarquer que par cette commande la force u s'oppose toujours à la vitesse y et joue donc le rôle

d'un amortisseur qui, en dissipant de l'énergie calorifique, diminue continuellement l'énergie stockée V jusqu'à l'arrêt. Le choix de $\varphi(y)$ est assez libre ce qui permet de satisfaire des exigences autres que la stabilité. Par exemple, si le système doit être complètement linéaire, on prend $\varphi(y) = cy$, $c > 0$, et si $|u|$ ne doit pas dépasser une certaine valeur $u_L > 0$, on peut opter pour $\varphi(y) = u_L \cdot \text{sat}(cy/u_L)$.

Considérons maintenant un système non passif dont les équations sont affines en u :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad y = h(x). \quad (6-79)$$

Par un choix convenable des fonctions $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ d'un retour d'état

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v, \quad (6-80)$$

il est possible de satisfaire les conditions du th-2 pour le système d'entrée v et de sortie y .

Exemple 6-15

On désire maintenir horizontal le pendule simple ci-contre en appliquant sur son articulation un couple u . Ce couple est lié à θ par l'équation

$$mL^2\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + mgL \cos \theta = u$$

où c est le facteur de frottement sur l'articulation et g est l'accélération terrestre. L'énergie du système est

$$W = \frac{mL^2}{2} \dot{\theta}^2 + mgL \sin \theta.$$

À cause de l'énergie potentielle de gravitation $mgL \sin \theta$, la fonction W , n'étant pas dp ou sdp , elle n'est pas une fonction de stockage. Pour surmonter cette difficulté, remplaçons le couple de gravité par un couple de rappel en appliquant le retour d'état

$$u = mgL \cos \theta - k_p \theta + v$$

qui a la forme (6-80) avec

$$\alpha = mgL \cos \theta - k_p \theta \quad \text{et} \quad \beta = 1.$$

L'équation du système S d'entrée v et de sortie $y = \dot{\theta}$ est alors

$$mL^2\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + k_p \theta = v.$$

En associant à cette équation la fonction de stockage dp

$$V = \frac{mL^2}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{k}{2} \theta^2$$

dont la dérivée par rapport au temps est

$$\begin{aligned} \dot{V} &= mL^2 \dot{\theta} \frac{1}{mL^2} (-c\dot{\theta} - k_p \theta + v) + k\theta \dot{\theta} \\ &= -c\dot{\theta}^2 + \dot{\theta}v, \end{aligned}$$

on voit que S est passif. D'autre part, comme

$$y(t) \equiv 0 \Leftrightarrow \dot{\theta}(t) \equiv 0 \Rightarrow \ddot{\theta}(t) \equiv 0,$$

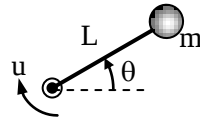
on déduit de l'équation de S que, pour $v = 0$,

$$y(t) \equiv 0 \Leftrightarrow [\theta(t), \dot{\theta}(t)] \equiv (0, 0)$$

d'où S est à état zéro observable. Par conséquent, tout retour d'état $v = -\varphi(y)$ tel que $y\varphi(y) > 0 \forall y \neq 0$ et $\varphi(0) = 0$, stabilise S . En particulier, pour $v = -k_1 y = -k_1 \dot{\theta}$, l'expression du couple agissant sur l'articulation sera

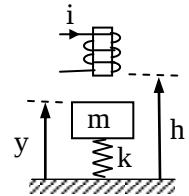
$$u = mgL \sin \theta - k_p \theta - k_1 \dot{\theta}.$$

Cette commande, souvent employée en robotique, est appelée PD plus gravité.



EXERCICE 6-12

Un électroaimant parcouru par un courant i attire une masse m supportée par un ressort vertical de raideur k . La force d'attraction est $f = ai/(h - y)^2$ où $h - y$ est la distance séparant l'électroaimant de la masse et, quand le ressort est au repos (ni comprimé, ni tendu), $y = d$. En posant $z = y - d$, écrire l'équation du mouvement de la masse et l'expression de l'énergie W stockée dans le système. Est-ce que W est dp ou sdp ? Déterminer les fonctions α et β du retour d'état $u = \alpha + \beta v$ qui rend le système S d'entrée v et de sortie z passif et à état zéro observable. Déduire une commande v qui stabilise ce système.

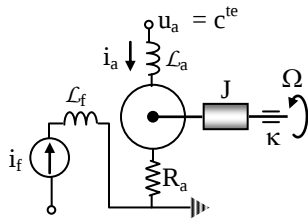


AUTRES EXERCICES ET COMPLÉMENTS

6-13. En posant $x_1 = \Omega$, $x_2 = i_a$ et sachant que le couple moteur est $\tau = k_a i_a i_f$ et que la force contre électromotrice de l'induit est $e_b = k_b i_f \Omega$, montrer que la vitesse $y = \Omega$ du moteur cc ci-dessous est liée à l'entrée $u = i_a$ par les équations :

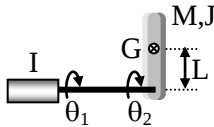
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -c_1 x_1 + c_2 x_2, \\ \dot{x}_2 = -c_3 x_2 + c_4 - c_5 x_1 u, \end{cases} \quad y = x_1.$$

où les c_i sont des constantes.



Déterminer une commande paramétrique pour ce système. On suppose que $J = 10^{-4} \text{kgm}^2$, $\kappa = 10^{-3} \text{Nm/s}$, $k_a = 5 \text{Nm/A}^2$, $L_a = 0.1 \text{H}$, $R_a = 1 \Omega$, $u_a = 12 \text{V}$, $k_b = 0.1 \text{V/(NmA/s)}$. Simuler une commande paramétrique qui amène par étapes la vitesse de 0 à 180 tr/min.

6-14. Par son couple u un moteur horizontal tourne à travers une tige élastique de raideur k un bras dans un plan vertical de masse M et de moment d'inertie J autour du centre de gravité G . Le moment d'inertie du rotor est I , la distance de G à l'axe du moteur est L et les frottements sont négligeables.



1) Montrer que les équations d'état du système peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & \dot{x}_2 &= a(x_3 - x_1) + bu, \\ \dot{x}_3 &= x_4, & \dot{x}_4 &= -c \sin x_3 - d(x_3 - x_1). \end{aligned}$$

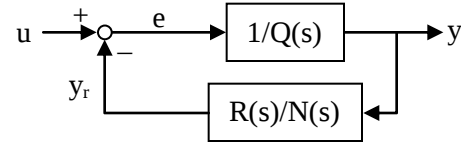
2) Dans quel domaine D ce système est-il linéarisable ?

3) Déterminer en fonction de l'état x l'expression de l'entrée u qui linéarise le système.

4) Déterminer une commande qui entraîne le bras à suivre une sortie désirée θ_{2d} et simuler la réponse à cette commande.

6-15. Soit $r = d^0 D - d^0 N = n - m$, $n > m$, le degré relatif d'une fonction de transfert mono-variable, $G(s) = y(s)/u(s) = N(s)/D(s)$.

1) Montrer que $G(s)$ est aussi la fonction de transfert du système à contre-réaction suivant où $Q(s)$ et $R(s)$ sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de $D(s)$ par $N(s)$.



2) Posons

$$N(s) = b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0,$$

$Q(s) = \lambda_r s^r + \dots + \lambda_1 s + \lambda_0$, $\lambda_r = 1/b_m$, $r = n - m$, et (A_r, B_r, C_r) une réalisation minimale de $R(s)/N(s)$. En désignant les dérivées $y^{(i-1)}$ par ξ_i , montrer que $G(s)$ se réalise par les équations d'état suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A_0 \xi + B_c v, \\ y = C_c \xi, \\ \dot{\eta} = A_r \eta + B_r C_c \xi, \end{cases} \quad y = C_c \xi,$$

où $\lambda = (\lambda_{r-1} \dots \lambda_1 \lambda_0)$, $v = -b_m(\lambda \xi + C_r \eta - u)$ et les matrices A_0 , B_c et C_c sont données en (6-36').

3) Dédurre que $G(s)$ est stabilisable si et seulement si sa phase est minimale (ses zéros sont toutes à partie réelle négative).

6-16. Déterminer un domaine dans lequel le système entrée-sortie suivant

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = 3x_1^2 x_2 + x_1 + u, \quad y = -x_1^3 + x_2$$

est linéarisable.

Est-ce que son entrée-état est linéarisable ?

Si oui, déterminer l'expression de l'entrée u et un changement de variables qui linéarisent les équations entrée-état.

6-17. Linéariser globalement (au sens large) le système suivant au point d'équilibre $(0, 0)$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 - x_1 x_3 + u, \\ \dot{x}_3 &= x_1 + x_1 x_2 - 2x_3. \end{aligned}$$

6-18 (Backstepping). Il s'agit de stabiliser le système suivant :

$$\dot{x}_1 = x_1^2 - x_1^3 + x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = u.$$

1) En considérant que x_2 est l'entrée de la première équation et en posant $V_1 = x_1^2 / 2$, montrer que

$x_2 = k_1(x_1) = -x_1^2$ est une contre réaction qui stabilise globalement cette équation au point $x_1 = 0$.
 2) Écrire les deux premières équations en effectuant le changement de variable $z_1 = x_2 - k_1(x_1)$. En considérant que x_3 est l'entrée de ces 2 équations et en posant $V_2 = V_1 + z_1^2 / 2$, déterminer une contre réaction $x_3 = k_2(x_1, z_1)$ qui stabilise ces équations.
 3) Écrire les 3 équations en effectuant le changement de variable $z_2 = x_3 - k_2(x_1, z_1)$ et déterminer une commande u qui stabilise le système à l'origine.

6-19. Il s'agit de stabiliser par mode de glissement le système suivant :

$$\dot{x}_1 = x_2 + \theta_1 x_1 \sin x_2, \quad \dot{x}_2 = \theta_2 x_2^2 + x_1 + u$$

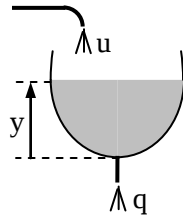
où les paramètres θ_1 et θ_2 sont inconnus mais bornés par des valeurs connues : $|\theta_1| < a$ et $|\theta_2| < b$.

1) Montrer que $x_1 \rightarrow 0$ si $x_2 = -kx_1$ avec $k > a$. Déduire que si l'état glisse sur la droite $x_2 + kx_1 = 0$ l'état converge vers l'origine.

2) Montrer que l'entrée $u = -x_1 - kx_2 - \beta(x) \operatorname{sgn}(x)$ avec $\beta(x) = ak|x_1| + bx_2^2 + \beta_0$, $\beta_0 > 0$, amène l'état à la droite de glissement à partir de tout état initial.

3) Simuler le mouvement de l'état dans le plan de phase en supposant que $a = 1$ et $b = 2$ et en choisissant des valeurs particulières θ_1 et θ_2 .

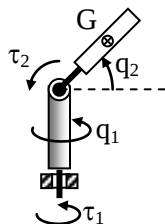
6-20. Dans un réservoir rentre un débit u et sort un débit $q = c\sqrt{y}$ où y est le niveau du liquide et c un paramètre incertain. Soit $S(y)$ la surface de la section du réservoir au niveau y .



1) Écrire l'équation de y .

2) Si $S(y) = y$, $0.6 < c < 1.4$ et une perturbation $b = 0.1u$ s'ajoute à u , choisir une réponse désirée y_d et la surface de glissement puis simuler les commandes à saturation et 2-SMC.

6-21. Le robot ci-contre est constitué d'un membre vertical de moment d'inertie I_1 autour de son axe de rotation et d'un autre membre qui tourne autour d'une articulation horizontale fixée à l'extrémité du premier membre. La distance entre le centre de gravité G



du second membre et son articulation est c et il a une masse m et un moment d'inertie I_2 autour de G .

On désigne par τ_1 et τ_2 les moments appliqués aux articulations et par q_1 et q_2 les rotations des membres. On néglige les frottements.

1) Par la méthode de Lagrange, montrer que l'équation liant $\tau = (\tau_1 \ \tau_2)^T$ à $q = (q_1 \ q_2)^T$ est de la forme

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau(t)$$

où $M(q)$ est une matrice symétrique définie positive et $\dot{M} - 2C$ est antisymétrique.

2) Soit q_d un vecteur constant (la position désirée des membres) et $e = q - q_d$. Montrer que si K_p est une matrice diagonale à éléments positifs, l'entrée

$$\tau = g(q) - K_p e + v$$

rend passif le système entre v et $\dot{q}$ et déduire une commande qui stabilise l'état $(e \ e)^T$ à l'origine.

3) Soit $q_d(t)$ une trajectoire désirée et $e = q - q_d(t)$. Montrer que l'entrée

$$\tau = M(q)\ddot{q}_d + C(q, \dot{q})\dot{q}_d + g(q) - K_p e + v$$

rend passif le système entre v et $\dot{q}$ et déduire une commande qui stabilise l'état $(e \ e)^T$ à l'origine.