

Chapitre 1

CONSTITUTION ET CINÉMATIQUE DIRECTE DES MANIPULATEURS

Un robot est une machine autonome destinée à effectuer des opérations de haute performance **ou** d'exécuter des tâches en des lieux inaccessibles par l'homme. Par autonome, on entend que le robot est capable de détecter et d'analyser la situation dans son entourage puis d'agir en conséquence afin d'accomplir de la meilleure manière possible la tâche qui lui est assignée. Actuellement les robots se rencontrent dans des domaines différents de l'activité humaine : l'industrie, la construction, l'agriculture, l'environnement, la chirurgie, l'armée et l'exploration sous-marine ou spatiale.

Les manipulateurs, dont le rôle est de déplacer et d'orienter les objets, forment une classe importante et fondamentale de robots. Dans ce premier chapitre nous décrivons d'abord les éléments constitutifs des manipulateurs et la convention généralement adoptée pour leur repérage. Nous établissons ensuite les transformations permettant de passer d'un repère à un autre et le chapitre se termine par un programme qui simule le mouvement d'un manipulateur.

1-1 CONSTITUTION D'UN ROBOT MANIPULATEUR

Les robots manipulateurs sont constitués de *membres*, appelés aussi *liaisons*, connectés par des *articulations*, appelés aussi *jonctions*. La figure 1-1 représente un robot manipulateur conçu pour effectuer des opérations semblables à celles d'un bras humain. Les membres de ce robot sont l'axe de base, le bras, l'avant-bras et la main. Ses articulations sont le support, l'épaule, le coude et le poignet.

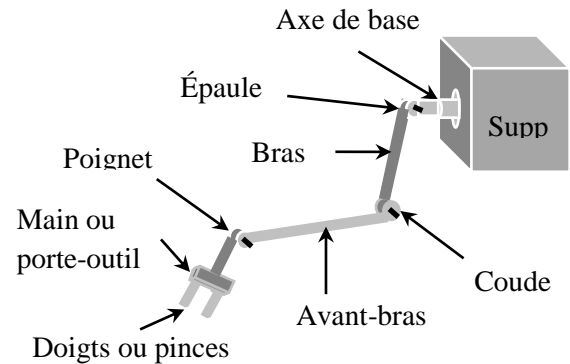


Fig. 1-1 Manipulateur ressemblant à un bras humain

Bien que les doigts (ou pinces) soient généralement mobiles grâce à un certain mécanisme lié à la main, leur mouvement n'a pas d'influence sur le reste du robot et peut être étudié séparément. Nous considérons par la suite que la main et les pinces constituent un membre unique appelé *opérateur final* ou *porte-outil* ou simplement *outil*.

Types d'articulations. Une articulation n'est autre qu'un moteur électrique, hydraulique ou pneumatique, appelé *actionneur*, qui assure le mouvement relatif d'un membre par rapport au précédent. Si ce mouvement est de rotation, on dit que l'articulation est *rotative* et s'il est de translation, on dit que l'articulation est *prismatique*.

La figure 1-2a représente une articulation rotative constituée d'un moteur électrique dont le stator est fixé au membre 1 et le rotor au membre 2. Sous l'effet d'un couple électromagnétique, le rotor tourne avec le membre 2 autour de l'axe du moteur. La représentation symbolique d'une articulation

rotative peut être l'une de la figure 1-2b selon que l'axe de rotation soit parallèle ou perpendiculaire au plan du dessin. À signaler que l'axe de rotation peut faire des angles quelconques avec les membres 1 et 2. En particulier, il peut être orthogonal ou parallèle aux deux membres ou orthogonal à l'un et parallèle à l'autre.

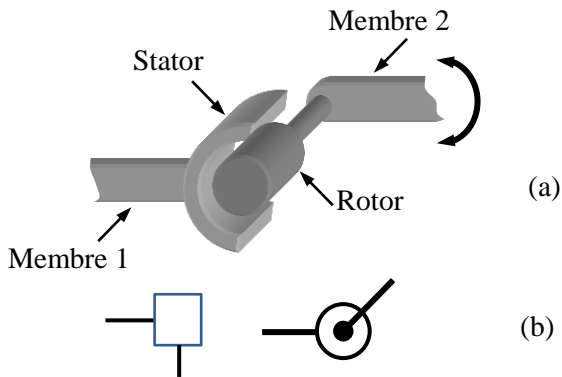


Fig. 1-2 (a) Articulation rotative, (b) ses symboles

La figure 1-3a représente une articulation prismatique constituée d'un vérin pneumatique ou hydraulique dont le cylindre est fixé au membre 1 et le piston au membre 2. Sous l'effet de la pression du fluide, le piston entraîne le membre 2 vers l'avant ou vers l'arrière. La figure 1-3b est une représentation symbolique d'une articulation prismatique parmi d'autres représentations possibles.

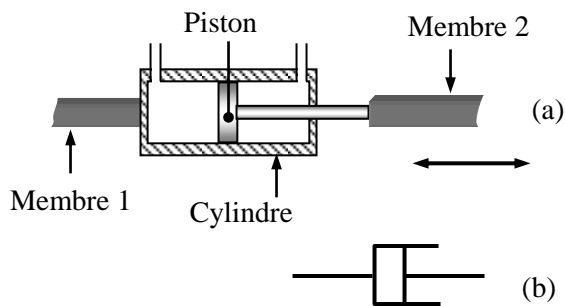


Fig. 1-3 (a) Articulation prismatique, (b) son symbole

Chaque membre comporte à l'une de ses extrémités le *pivot* de l'articulation qui le joint au membre précédent et à l'autre la *charnière* de l'articulation qui le joint au membre suivant. La charnière de l'articulation rotative de la figure 1-2 est le stator et son pivot est le rotor. Le stator fait partie du

membre 1 et le rotor du membre 2. De même, la charnière de l'articulation prismatique de la figure 1-3 est le cylindre et son pivot est le piston. Le cylindre fait partie du membre 1 et le piston du membre 2.

À noter que la constitution d'une articulation rotative ou prismatique peut avoir des aspects différents. Par exemple, au lieu d'un vérin, une articulation prismatique peut être réalisée en se servant d'un moteur électrique muni d'une vis sans fin comme le montre la figure 1-4. Pour cette articulation, l'écrou étant fixé au membre 1 est la charnière tandis que la vis, faisant partie avec le moteur du membre 2, est le pivot.

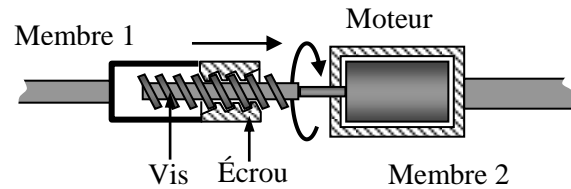
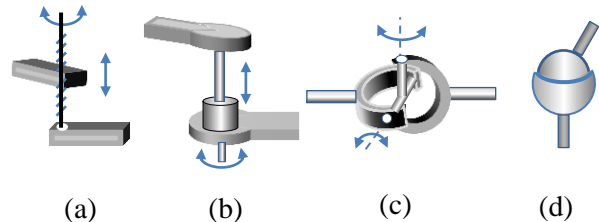


Fig. 1-4 Articulation prismatique par vis sans fin

Enfin, la figure suivante montre 4 autres types d'articulations (a) hélicoïdal, (b) cylindrique, (c) universel ou cardan et (d) sphérique ou rotule.



La rotation de la vis d'une articulation hélicoïdale produit un déplacement et une rotation simultanés le long de l'axe de la vis. L'articulation cylindrique permet aussi un déplacement et une rotation le long d'un même axe mais ces mouvements sont indépendants. L'articulation universelle permet d'effectuer deux rotations indépendantes autour de deux axes toujours perpendiculaires et avec l'articulation sphérique on peut obtenir une orientation quelconque. Le *degré de mobilité* (ddm) de (a) est 1, de (b) est 2, de (c) est 2 et de (d) est 3.

À l'aide d'articulations rotatives, prismatique ou autres connectés par des membres, on peut concevoir une grande variété de robots

manipulateurs, chacun étant défini par l'ensemble des mouvements et des opérations qu'il est capable d'accomplir.

Domaine de travail et dextérité d'un robot.

Le *domaine de travail* est l'ensemble des points que l'outil peut atteindre et la *dextérité* est l'ensemble des orientations que l'outil peut avoir en chaque point de ce domaine. La conception d'un robot repose surtout sur le domaine de travail et la dextérité désirés pour ce robot.

Considérons le robot, dit *cartésien*, représenté par la figure 1-5a. Les trois articulations de ce robot sont prismatiques. Le déplacement z de la première est vertical et ceux, y et x , des deux autres sont horizontaux, y dans le plan de la figure et x perpendiculaire à ce plan.

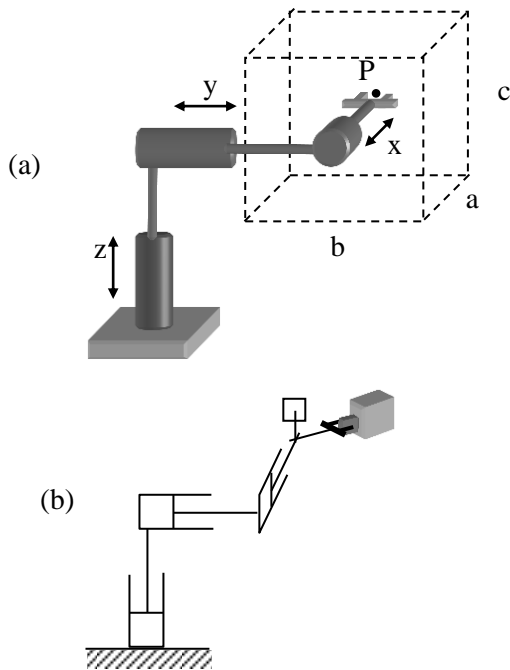


Fig. 1-5 a) Robot cartésien, b) avec articulation au poignet

Le milieu P entre les extrémités des doigts de l'outil peut être placé en tout point d'un parallélépipède rectangle dont les dimensions a , b et c sont respectivement les amplitudes des déplacements x , y et z . C'est le domaine de travail de ce robot. Sa dextérité est faible puisque l'outil n'a qu'une seule direction, toujours horizontal sans pouvoir tourner dans son plan ni autour d'un axe dans ce plan. Cela revient à dire qu'un tel robot ne peut tenir des objets

que s'ils sont convenablement orientés et il est incapable de modifier leur direction. Pour augmenter la dextérité de ce robot, il est nécessaire de lui ajouter d'autres articulations. Par exemple, en introduisant au poignet (avant l'outil) une articulation rotative à pivot vertical (fig. 1-5b), il devient capable de tourner les objets autour de cet axe.

À noter que deux robots manipulateurs d'un même type peuvent avoir deux aspects différents selon la dimension et la forme de leurs membres et la constitution de leurs articulations. Par exemple, le pont roulant représenté par la figure 1-6 est aussi un robot cartésien entraîné par 3 moteurs électriques à travers des roues, des câbles et une crémaillère.

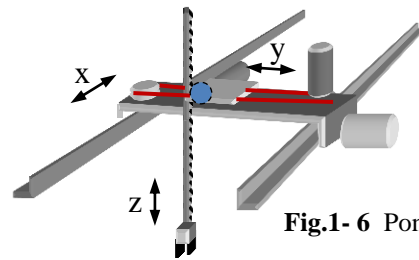


Fig.1- 6 Pont roulant

Autres exemples. En plus des robots cartésiens, on peut citer trois autres catégories de manipulateurs : les robots *cylindriques*, *sphériques* et *articulés*. Ces robots sont respectivement représentés par les figures 1-7a, 1-7b et 1-7c.

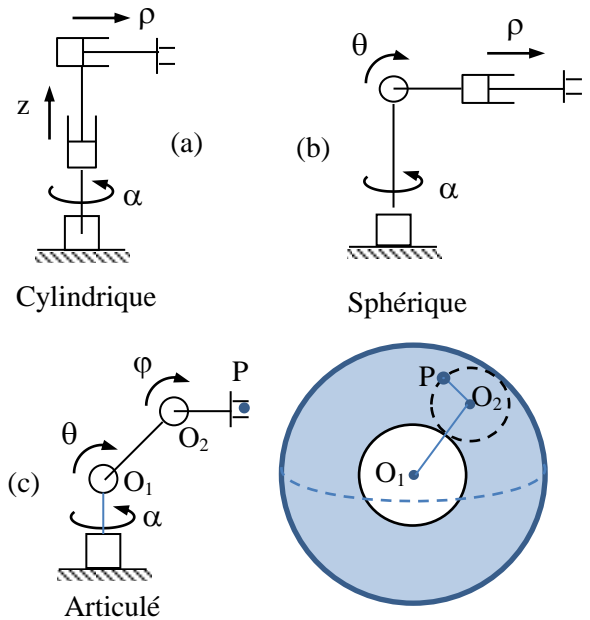


Fig. 1-7 Trois catégories de robots

Le domaine de travail du robot cylindrique est compris entre deux cylindres ayant pour axe commun celui de l'articulation α du support. La différence de leurs rayons est égale à l'amplitude du déplacement ρ et leur hauteur est égale à l'amplitude du déplacement z . Le domaine de travail du robot sphérique est compris entre deux sphères centrées sur l'axe de l'articulation θ et dont la différence des rayons est égale à l'amplitude du déplacement ρ . Le domaine de travail du robot articulé est aussi compris entre deux sphères. En effet, quand φ varie de 2π , la pointe P de l'outil décrit un cercle de centre O_1 . Ce cercle balaie un anneau centré en O_2 quand θ varie de 2π et cet anneau balaie le volume compris entre deux sphères de centre O_2 quand α varie de 2π . Il est évident que ce domaine n'est que théorique puisqu'en tournant, certains membres peuvent heurter des obstacles ou d'autres membres. Par exemple si O_1O_2 et O_2P sont grands, O_2 ou P peuvent toucher le sol pour certains angles φ et θ .

Chacun des robots précédents a trois articulations (trois degrés de liberté) qui servent seulement à positionner l'outil dans l'espace mais ne suffisent pas pour l'orienter. Il faut en générale trois autres articulations (trois autres degrés de liberté) pour orienter l'outil en un point donné dans une direction quelconque. Cependant, si le besoin ne l'exige pas, on peut se contenter d'une ou de deux articulations d'orientation. L'ensemble des articulations qui servent à orienter l'outil constitue le *poignet* du robot.

Poignet sphérique. Ce poignet, représenté par la figure 1-8a, permet d'orienter l'outil dans une direction quelconque. Il comporte 3 petits moteurs A, B et C qui tournent respectivement un cadre, un pignon (1) et un pignon (2). Entre ces deux pignons s'engrène un troisième (3) auquel l'outil est fixé. Les axes des moteurs B et C sont alignés et orthogonaux à l'axe de A et les prolongements des axes des 3 moteurs ainsi que celui de l'outil se rencontrent en un même point c.

Considérons un repère lié à l'outil d'origine c et d'axes x, y et z, z étant porté par l'axe de l'outil, y par l'axe des moteurs B et C et x formant avec y et z un trièdre direct (fig. 1-8b). Quand l'outil tourne

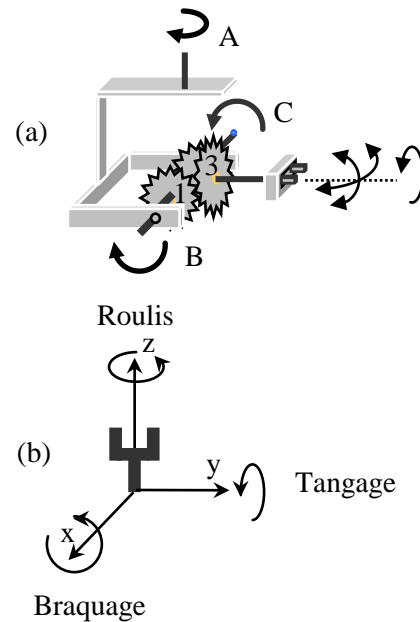


Fig. 1-8 Poignet sphérique : (a) constitution, (b) fonction.

dans son plan (y, z) autour de x on dit qu'il effectue un *braquage*. Ce mouvement s'obtient en tournant seulement le moteur A. Quand l'outil tourne autour de son propre axe z, on dit qu'il effectue un *roulis*. Ce mouvement s'obtient en tournant B et C avec la même vitesse, tous les deux dans le sens positif (celui indiqué sur la figure) ou tous les deux dans le sens négatif. Quand B et C tournent avec la même vitesse en sens opposés, l'outil tourne autour de l'axe y et on dit qu'il effectue un *tangage*.

Bien que ce poignet soit peu encombrant, symétrique et de faible inertie, il a les désavantages suivants :

- Il nécessite la synchronisation entre les vitesses des moteurs B et C.
- Il est incapable d'effectuer simultanément le roulis et le tangage.

La figure 1-9 représente un autre poignet sphérique dont les articulations A, B et C sont aussi rotatives mais, contrairement au poignet précédent, fonctionnent d'une manière indépendante.

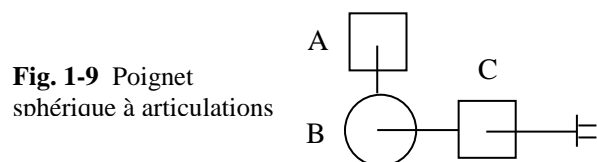
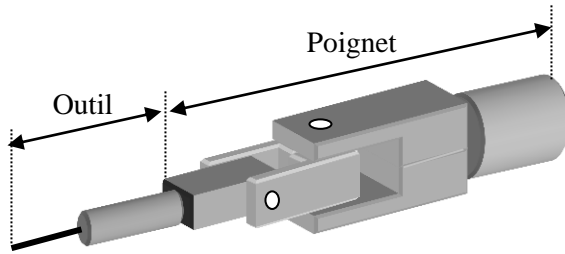


Fig. 1-9 Poignet sphérique à articulations indépendantes

A assure le tangage, B le braquage et C le roulis et ces trois mouvements peuvent s'effectuer simultanément. Ce poignet n'a pas les défauts cités ci-dessus mais il est plus encombrant et généralement de plus grande inertie que le poignet de la figure 1-8.

Opérateurs finaux. Pour compléter la description des éléments constitutifs des robots manipulateurs, parlons sommairement de certains types d'opérateurs finaux.



Fi. 1-9 Opérateur final fixé à un poignet

À l'extrémité du poignet, on peut fixer soit un outil dans le vrai sens du terme (perceuse, électrode de soudage, pistolet de peinture,...), comme le montre la figure 1-9, soit un opérateur servant à tenir les objets.

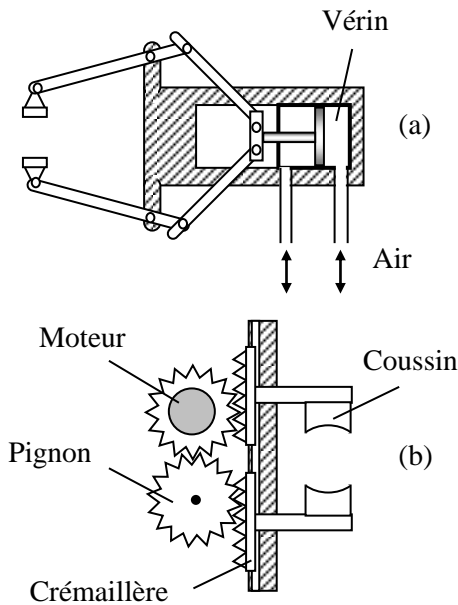


Fig.1-10 Poignes de serrage,

(a) par pivotage, (b) par glissement.

Souvent, pour tenir des objets, on se sert d'une *poigne de serrage* dont le mécanisme peut être

conçu de différentes manières. La figure 1-10 montre le fonctionnement de deux types de serrage, l'un par pivotage et l'autre par glissement. Dans certains cas, on utilise d'autres types d'opérateurs comme l'électro-aimant pour déplacer par exemple des tôles d'acier ou les ventouses pour déplacer des pièces à surface lisse en verre ou en carton. La figure 1-11 montre une ventouse fonctionnant par effet venturi. Sachant que la pression de l'air diminue quand sa vitesse augmente, une dépression apparaît à l'étranglement de la tuyère et dans la ventouse. La différence entre cette pression et celle de l'atmosphère maintient la plaque collée à la ventouse.

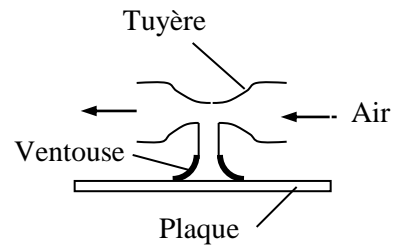


Fig. 1-11 Ventouse venturi

Manipulateurs parallèles. Dans ce qui précède, nous n'avons considéré que des manipulateurs séries c.à.d. qui ne possèdent pas de boucles. Quand un manipulateur possède au moins une boucle, on dit qu'il est parallèle ou à chaîne fermée. La figure 1-12 montre un manipulateur parallèle constitué d'un mécanisme à 5 bars 0, 1, 2, 3, 4 formant une boucle (le sol étant considéré un bar fixe 0).

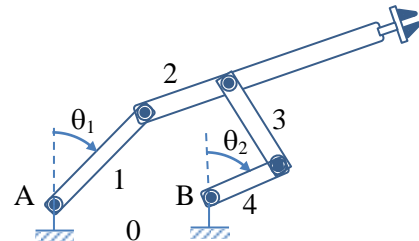


Fig. 1-12. Mécanisme 5 bars

Ce manipulateur a 2 degrés de liberté car les 2 rotations θ_1 et θ_2 déterminent la position de tous les points du mécanisme. Pour placer l'outil en un point quelconque du domaine de travail, il suffit d'entraîner seulement les articulations A et B par deux moteurs fixés au sol et de laisser libres les

autres articulations. Ce montage rend la structure plus légère et plus rigide donc capable de déplacer des charges plus lourdes.

En général le nombre DL de degrés de liberté d'un mécanisme peut être déterminé par la formule de Grübler

$$DL = m(N - 1 - J) + \sum_{i=1}^J f_i \quad (1-1)$$

où

$m = 3$ pour un mécanisme planaire,

$= 6$ pour un mécanisme spatial.

N = nombre des membres y compris le sol.

J = nombre des articulations.

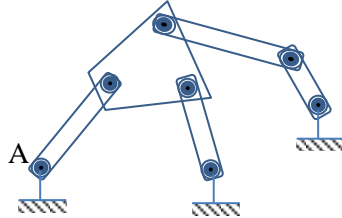
f_i = degré de mobilité de l'articulation i .

Considérons par exemple le mécanisme planaire de Stephenson représenté par la figure 1-13. Il a avec le sol $N = 6$ membres et $J = 7$ articulations chacune est de degré de mobilité $f_i = 1$. D'où

$$DL = 3(6 - 1 - 7) + \sum_{i=1}^7 1 = 1.$$

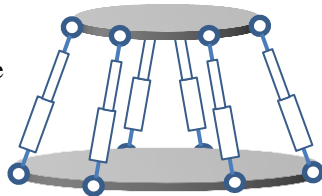
La configuration de la trapèze ne dépend que de la rotation d'une seule articulation, disons A.

Fig. 1-13 Mécanisme de Stephenson



La plate-forme de Stewart-Gough est un manipulateur parallèle spatial constitué d'une plaque fixe et d'une autre mobile connectées par 6 jambes chacune comportant une articulation prismatique et deux rotules (fig. 1-14).

Fig. 1-14 Plate-forme de Stewart-Gough



Cette plate-forme est employée pour simuler des mouvements dans l'espace ou pour capter, à partir de la variation des longueurs des jambes, l'intensité et la direction d'une force appliquée sur la plaque mobile. Elle a $N = 14$ membres (2 plaques et 6 jambes chacune à 2 membres), $J = 18$ articulations dont 12 à $f_i = 3$ ddm et 6 à $f_i = 1$ ddm. Le nombre de degrés de liberté de ce mécanisme spatial est égal à

$$DL = 6(14 - 1 - 18) + 3(12) + 6 = 12.$$

La plaque mobile a 6 ddl dont 3 de translation et 3 de rotation, et chaque jambe, pouvant tourner autour de lui-même, a 1 ddl. On peut empêcher les jambes de tourner autour de leurs axes en remplaçant les rotules inférieures par des articulations universelles de 2 ddm. Dans ce cas le nombre de degrés de liberté de la plate-forme se limite à celui de la plaque mobile. En effet,

$$DL = 6(14 - 1 - 18) + 3(6) + 2(6) + 6 = 6.$$

1-2 REPÉRAGE D'UN MANIPULATEUR SÉRIE

Dans le but d'étudier le mouvement d'un manipulateur, nous commençons par définir un repère fixe $B = (o, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et rattacher à chaque membre k de ce robot un repère mobile avec ce membre, $V_k = (o_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$, $k = 1, \dots, n$, l'indice n étant relatif à l'outil. Le repérage généralement adopté pour les robots manipulateurs se construit selon la convention de Denavit-Hartenberg détaillée comme suit.

- Repère fixe (inertiel): $B = V_0 = (o, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

C'est par rapport à ce repère que le mouvement des éléments du robot sera décrit.

- Son origine est arbitrairement choisie sur l'axe du support.
- Le vecteur \vec{z}_0 est porté par l'axe du support et dirigé vers le premier membre.
- Le vecteur \vec{x}_0 est arbitrairement choisi dans le plan orthogonal à \vec{z}_0 .

- Le vecteur \vec{y}_0 complète le trièdre direct $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

La figure 1-15 montre un repère pour un support rotatif et un autre pour un support prismatique.

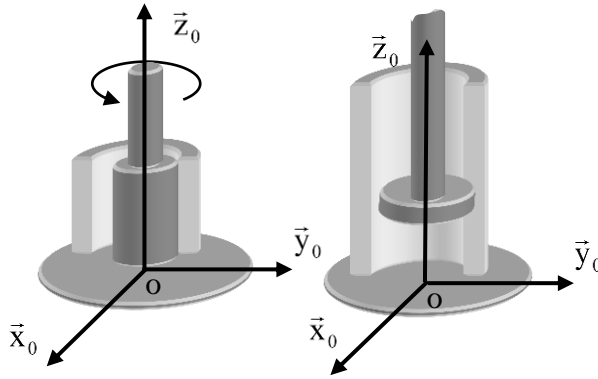


Fig. 1-15 Repères de base

- Repère du membre k :

$$V_k = (o_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k), \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

Ayant défini le repère inertiel V_0 , les repères des membres, l'outil mis à part, s'obtiennent successivement comme le montre la figure 1-16 :

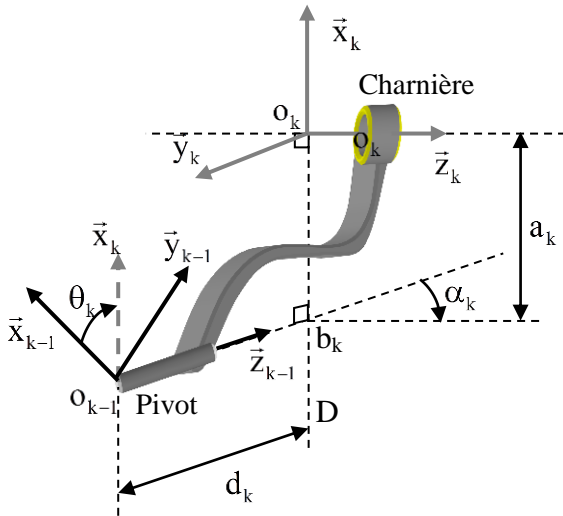


Fig. 1-16 Repérage d'un membre

- L'origine o_k est à l'intersection de l'axe de la charnière avec la perpendiculaire commune D à cet axe et à l'axe du pivot (axe de la charnière du membre $k-1$). Dans le cas où ces deux axes

sont parallèles, le choix de o_k sur l'axe de la charnière de k est arbitraire.

- Le vecteur \vec{z}_k est porté par l'axe de la charnière et dirigé vers le membre $k+1$ suivant.
- Le vecteur \vec{x}_k est porté par la droite D et dirigé dans le sens de $\vec{z}_k \wedge \vec{z}_{k-1}$ (règle des 3 doigts). Dans le cas où ce produit est nul (quand les axes du pivot et de la charnière sont parallèles) \vec{x}_k se dirige dans le sens qui s'éloigne de \vec{z}_{k-1} .
- Le vecteur \vec{y}_k complète le trièdre direct $(\vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$.
- Repère de l'outil : $V_n = (o_n, \vec{x}_n, \vec{y}_n, \vec{z}_n)$

Il est représenté sur la figure 1-17.

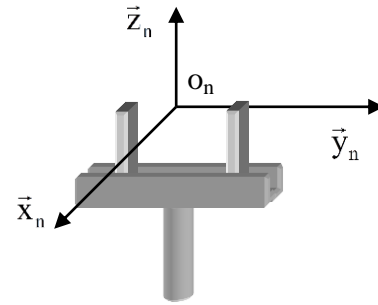


Fig. 1-17 Repère de l'outil

- L'origine o_n est à mi-distance entre les extrémités des pinces.
- Le vecteur \vec{z}_n est porté par l'axe de l'outil et il est dirigé vers l'extérieur; il est appelé *axe d'approche unitaire* ou de *roulis*.
- Le vecteur \vec{y}_n est porté par la droite qui joint les extrémités des pinces et son sens est arbitraire; il est appelé *axe de glissement* ou de *tangage*.
- Le vecteur \vec{x}_n complète le trièdre direct $(\vec{x}_n, \vec{y}_n, \vec{z}_n)$; il est appelé *axe normal* ou de *braquage*.

Paramètres. La description géométrique d'un robot en un instant donné se définit par la position et l'orientation de chaque repère V_k par rapport au repère précédent V_{k-1} . Ceci se caractérise par les 4

paramètres θ_k , d_k , α_k et a_k représentés sur la figure 1-16 et dont les définitions sont les suivantes.

1) Angle d'articulation : $\theta_k = \text{angle}(\bar{x}_{k-1}, \bar{x}_k)$

Le signe de θ_k , d'origine \bar{x}_{k-1} et d'extrémité \bar{x}_k , suit la règle de la main droite autour de \bar{z}_{k-1} . Cet angle est constant si l'articulation $k - 1$ (jonction entre les membres $k - 1$ et k) est prismatique et il est variable si cette articulation est rotative.

2) Éloignement des articulations : $d_k = \overline{o_{k-1} b_k}$

C'est la distance algébrique de o_{k-1} à la projection b_k de o_k sur le vecteur \bar{z}_{k-1} qui indique le sens positif de cette distance. Généralement d_k est la distance entre les axes portant \bar{x}_{k-1} et \bar{x}_k . Ce paramètre est constant si l'articulation $k - 1$ est rotative et il est variable si cette articulation est prismatique.

3) Angle de torsion : $\alpha_k = \text{angle}(\bar{z}_{k-1}, \bar{z}_k)$

Le signe de α_k , d'origine \bar{z}_{k-1} et d'extrémité \bar{z}_k , suit la règle de la main droite autour de \bar{x}_k . Cet angle est toujours constant.

4) Écartement des articulations : $a_k = \overline{b_k o_k}$

C'est la distance algébrique de b_k à o_k , le sens positif étant indiqué par le vecteur \bar{x}_k . Généralement, a_k est la distance entre les axes portant \bar{z}_{k-1} et \bar{z}_k . Cette distance est toujours constante.

Ces conventions permettent de construire pour un manipulateur donné un diagramme constitué de l'ensemble des repères V_k , $k = 0, 1, \dots, n$, connectés par des segments représentant les distances d_k et a_k . À un paramètre variable θ_k ou d_k on lui associe une valeur particulière qui facilite le dessin. Par exemple, si θ_k est variable, il est commode de lui associer une valeur multiple de $\pi/2$. D'autre part, si les origines de deux repères sont confondues, on les sépare par une ligne en pointillé.

Exemple 1-1

Le Microrobot Alpha II, représenté par la figure 1-18, est un manipulateur articulé à 5 axes rotatifs. Les trois premières articulations, 0, 1 et 2, servent à

placer dans l'espace l'origine 3 du poignet dont les articulations 3 de braquage et 4 de roulis servent à orienter l'outil.

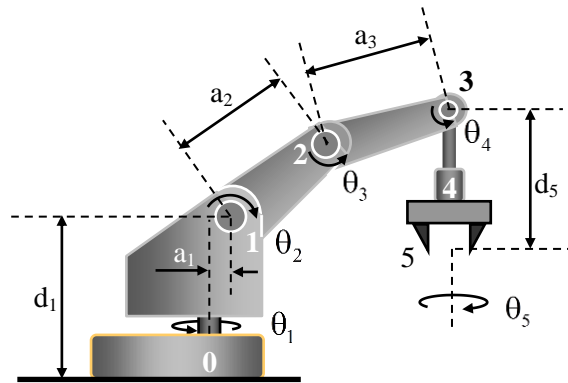


Fig. 1-18 Le manipulateur Microrobot Alpha II

Le diagramme de ce manipulateur est celui de la figure 1-19. En le parcourant de la base jusqu'à l'outil, le lecteur peut vérifier que ce diagramme est conforme aux conventions de Denavit-Hartenberg.

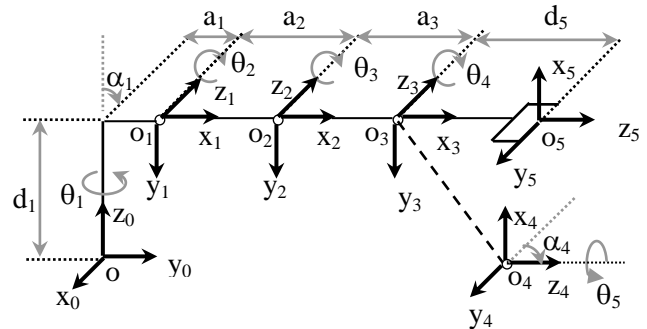


Fig. 1-19 Le diagramme du Microrobot Alpha II.

EXERCICE 1-1

Le robot à 4 articulations de la figure 1-20 est de type Scara. Seule l'articulation 2 est prismatique et les autres sont rotatives. Représenter son diagramme en y précisant ces paramètres fixes et variables.

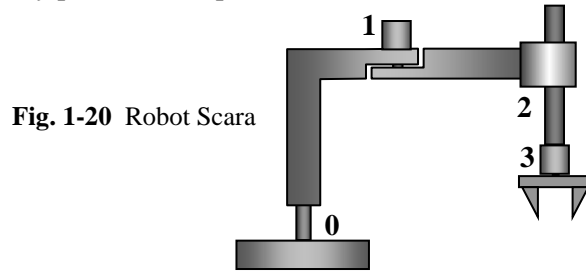


Fig. 1-20 Robot Scara

1-3 TRANSFORMATIONS

Nous donnons dans cette section la définition mathématique de l'orientation et de la position d'un repère par rapport à un autre.

Généralités. Considérons dans \mathbb{R}^3 un vecteur \vec{p} et deux bases orthonormées quelconques (fig. 1-21) :

$$B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\} \quad \text{et} \quad V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}.$$

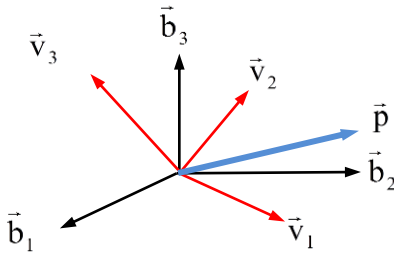


Fig. 1-21 Un vecteur et 2 bases

Pour fixer les idées, on peut considérer que B est un repère fixe lié au support du robot et V un repère mobile lié à un membre ou à l'outil et translaté à l'origine de B. Rappelons qu'une base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ est orthonormée si ses vecteurs sont unitaires et orthogonaux, c'est-à-dire si leur produit scalaire vérifie

$$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \vec{e}_i^T \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad (1-2)$$

L'indice supérieur T indique le transposé d'un vecteur ou d'une matrice. Sans cet indice un vecteur est supposé colonne, avec cet indice, il est ligne.

Désignons par p_i^B et p_i^V , $i = 1, 2, 3$, les composantes de \vec{p} respectivement dans les bases B et V. Dans B,

$$\vec{p} = p_1^B \vec{b}_1 + p_2^B \vec{b}_2 + p_3^B \vec{b}_3 = \sum p_i^B \vec{b}_i. \quad (1-3)$$

En multipliant à gauche les deux membres de (1-3)

par \vec{b}_i^T et tenant compte de (1-2), on tire :

$$p_i^B = \vec{b}_i^T \cdot \vec{p} \quad \text{pour } i = 1, 2, 3. \quad (1-4)$$

La composante p_i^B de \vec{p} n'est autre que la projection de ce vecteur sur \vec{b}_i . De même, dans la base V,

$$\vec{p} = p_1^V \vec{v}_1 + p_2^V \vec{v}_2 + p_3^V \vec{v}_3 = \sum p_i^V \vec{v}_i \quad (1-5)$$

$$\text{avec} \quad p_i^V = \vec{v}_i^T \cdot \vec{p} \quad \text{pour } i = 1, 2, 3. \quad (1-6)$$

Pour déterminer la relation entre p_i^B et p_i^V , remplaçons dans (1-4) \vec{p} par son expression (1-5). On obtient, pour $i = 1, 2, 3$,

$$p_i^B = \vec{b}_i^T \sum_j p_j^V \vec{v}_j = \sum_j (\vec{b}_i^T \cdot \vec{v}_j) p_j^V. \quad (1-7)$$

$$\text{En posant} \quad a_{ij} = \vec{b}_i^T \cdot \vec{v}_j \quad (1-8)$$

la projection de \vec{v}_j sur \vec{b}_i , c'est-à-dire la $i^{\text{ème}}$ composante de \vec{v}_j dans la base B, (1-7) s'écrit

$$p_i^B = \sum_j a_{ij} p_j^V, \quad i = 1, 2, 3.$$

Ces 3 équations peuvent se grouper sous la forme matricielle :

$$\vec{p}^B = \mathbf{T} \vec{p}^V \quad (1-9)$$

Avec

$$\vec{p}^B = \begin{pmatrix} p_1^B \\ p_2^B \\ p_3^B \end{pmatrix}, \quad \vec{p}^V = \begin{pmatrix} p_1^V \\ p_2^V \\ p_3^V \end{pmatrix}, \quad (1-10)$$

$$\text{et} \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

\vec{p}^B et \vec{p}^V sont les écritures de \vec{p} respectivement dans les bases B et V. La matrice \mathbf{T} , qui associe à un vecteur \vec{p} écrit dans V ce même vecteur écrit dans

B, est appelée *matrice de transformation* ou de *passage* de V à B. D'après (1-8), les colonnes de **T** ne sont autres que les vecteurs \vec{v}_j de V écrits dans la base B et on note :

$$\mathbf{T} = [\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \vec{v}_3]_B. \quad (1-11)$$

Comme ces vecteurs sont orthonormés, on dit que **T** est une *matrice orthogonale unitaire* ou simplement *orthonormée*.

Maintenant, si l'on répète ce qui précède en permutant B et V, l'équation (1-7) devient pour $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} p_i^V &= \vec{v}_i^T \sum_j p_j^B \cdot \vec{b}_j \\ &= \sum_j (\vec{v}_i^T \cdot \vec{b}_j) p_j^B = \sum_j c_{ij} p_j^B \end{aligned}$$

où $c_{ij} = \vec{v}_i^T \cdot \vec{b}_j$ est la projection de \vec{b}_j sur \vec{v}_i , c'est-à-dire la $i^{\text{ème}}$ composante de \vec{b}_j dans la base V. Donc, tenant compte de (1-9),

$$\vec{p}^V = \mathbf{T}^{-1} \vec{p}^B \quad \text{avec} \quad \mathbf{T}^{-1} = \{c_{ij}\}. \quad (1-12)$$

Or, comme le produit scalaire est commutatif, on a d'après (1-8) :

$$c_{ij} = \vec{v}_i^T \cdot \vec{b}_j = \vec{b}_j^T \cdot \vec{v}_i = a_{ji}.$$

Par conséquent, l'inverse de la matrice de transformation est sa transposée :

$$\boxed{\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T}. \quad (1-13)$$

Les colonnes de \mathbf{T}^{-1} (les lignes de **T**) sont les vecteurs \vec{b}_j de B écrits dans la base V.

Nous allons appliquer ces propriétés à une transformation fondamentale en robotique qui est la rotation et nous verrons que toute transformation d'une base orthonormée de \mathcal{R}^3 à une autre est une rotation.

Rotation autour d'un vecteur de base.

Supposons que le repère V est obtenu en tournant le repère B d'un angle α autour d'un vecteur \vec{h} . Dans ce cas, la matrice de passage de V à B sera dénommée *matrice de rotation* de B autour de \vec{h} d'un angle α et désignée par :

$$\mathbf{R}(\vec{h}, \alpha) = [\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \vec{v}_3]_B. \quad (1-14)$$

Nous convenons que le sens positif de rotation s'obtient par la règle de la main droite en dirigeant le pouce dans le sens positif de l'axe de rotation.

Initialement les repères B et V sont confondus et les coordonnées d'un vecteur \vec{p} lié à V sont les mêmes dans ces deux bases. Comme \vec{p} tourne avec V, ses coordonnées dans V après la rotation ne se modifient pas et on peut écrire :

$$\vec{p}^V = \vec{p}. \quad (1-15)$$

Par contre, vu du repère fixe B, ce nouveau vecteur devient d'après (1-9) :

$$\vec{p}^B = \mathbf{R}(\vec{h}, \alpha) \cdot \vec{p}^V = \mathbf{R}(\vec{h}, \alpha) \cdot \vec{p}. \quad (1-16)$$

Cette relation permet de savoir ce que devient un vecteur \vec{p} quand on le tourne d'un angle α autour d'un vecteur \vec{h} .

Considérons pour commencer le cas où $\vec{h} = \vec{b}_1$. Dans ce cas, le vecteur \vec{b}_1 reste à sa place tandis que \vec{b}_2 et \vec{b}_3 tournent dans leur plan d'un angle α comme le montre la figure 1-22.

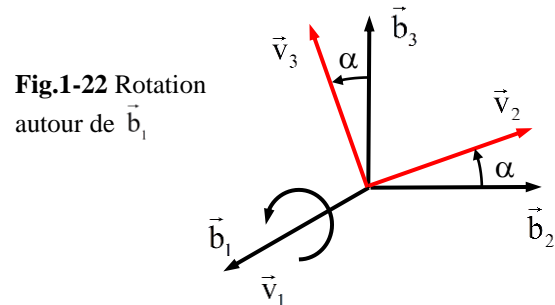


Fig.1-22 Rotation autour de \vec{b}_1

En examinant cette figure, il est facile d'écrire dans la base B les vecteurs \vec{v}_i de la nouvelle base V pour déduire d'après (1-11) que :

$$\mathbf{R}(\vec{b}_1, \alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (1-17)$$

Les rotations de B autour de \vec{b}_2 et \vec{b}_3 s'obtiennent de la même manière :

$$\mathbf{R}(\vec{b}_2, \alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad (1-18)$$

$$\mathbf{R}(\vec{b}_3, \alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les matrices (1-17) et (1-18), faciles à retenir, seront fréquemment utilisées par la suite. Pour alléger leur notation, nous désignerons par $\mathbf{R}_i(\alpha)$ la rotation d'un repère d'un angle α autour de son $i^{\text{ème}}$ vecteur de base. Donnons d'abord deux propriétés évidentes de ces matrices.

- $\mathbf{R}_i(0) = \mathbf{I}$, \mathbf{I} = matrice unité
- $\mathbf{R}_i(-\alpha) = \mathbf{R}_i^T(\alpha) = \mathbf{R}_i^{-1}(\alpha)$.

La première signifie que si l'angle de rotation est nulle, un vecteur \vec{p} reste à sa place et la deuxième veut dire que l'inverse d'une rotation est la même rotation mais en sens opposé.

Soient maintenant deux repères orthonormés B et V_0 et un vecteur \vec{p} lié à V_0 . Si $\mathbf{T}_B^{V_0}$ est la matrice de transformation de V_0 à B, on a :

$$\vec{p}^B = \mathbf{T}_B^{V_0} \cdot \vec{p}^{V_0} \quad (1-19)$$

\vec{p}^B et \vec{p}^{V_0} étant les écritures de \vec{p} respectivement dans les bases B et V_0 . Nous allons voir comment se modifie $\mathbf{T}_B^{V_0}$ quand on tourne V_0 autour d'un axe de B ou autour d'un axe de V_0 . Après la rotation de V_0 ,

on obtient un nouveau repère V et le vecteur \vec{p} devient \vec{p}_1 . Comme \vec{p} est lié à V_0 ,

$$\vec{p}_1^V = \vec{p}^{V_0} \quad (1-20)$$

1) Rotation de V_0 autour d'un axe de B

Après la rotation autour de \vec{b}_i , le vecteur \vec{p} tourne avec V_0 et devient \vec{p}_1 . D'après (1-16) et tenant compte de (1-19) et (1-20), on a :

$$\begin{aligned} \vec{p}_1^B &= \mathbf{R}_i(\alpha) \cdot \vec{p}^B = \mathbf{R}_i(\alpha) \cdot \mathbf{T}_B^{V_0} \cdot \vec{p}^{V_0} \\ &= \mathbf{R}_i(\alpha) \cdot \mathbf{T}_B^{V_0} \cdot \vec{p}_1^V. \end{aligned}$$

La transformation de V à B est donc donnée par

$$\mathbf{T}_B^V = \mathbf{R}_i(\alpha) \cdot \mathbf{T}_B^{V_0}. \quad (1-21)$$

1) Rotation de V_0 autour d'un axe de V_0

Après la rotation autour de \vec{v}_i , le vecteur \vec{p} tourne avec V_0 et devient \vec{p}_1 . D'après (1-16) et (1-20),

$$\vec{p}_1^{V_0} = \mathbf{R}_i(\alpha) \cdot \vec{p}^{V_0} = \mathbf{R}_i(\alpha) \cdot \vec{p}_1^V.$$

D'où, d'après (1-19),

$$\vec{p}_1^B = \mathbf{T}_B^{V_0} \cdot \vec{p}_1^{V_0} = \mathbf{T}_B^{V_0} \cdot \mathbf{R}_i(\alpha) \cdot \vec{p}_1^V.$$

La transformation de V à B est cette fois donnée par

$$\mathbf{T}_B^V = \mathbf{T}_B^{V_0} \cdot \mathbf{R}_i(\alpha). \quad (1-22)$$

De (1-21) et (1-22), on déduit la règle suivante.

Règle

- 1) Après une rotation du repère mobile V d'un angle α autour d'un axe \vec{b}_i du repère fixe B, la nouvelle transformation s'obtient à partir de la précédente en la multipliant à **gauche** par $\mathbf{R}_i(\alpha)$.
- 2) Après une rotation du repère mobile V d'un angle α autour d'un axe \vec{v}_i de V, la nouvelle transformation s'obtient à partir de la précédente en la multipliant à **droite** par $\mathbf{R}_i(\alpha)$.

Remarque : Comme le produit des matrices n'est pas commutatif, l'ordre des rotations doit être en général respecté. Cependant, on peut inverser l'ordre de deux rotations successives l'une autour d'un axe fixe et l'autre autour d'un axe mobile.

Exemple 1-2

Soit \vec{p} un vecteur lié à un repère mobile V avec $\vec{p}^V = [1 \ 2 \ 3]^T$. Initialement V est confondu avec un repère fixe B puis il tourne successivement de

$-\pi/2$ autour de \vec{b}_2 , puis de

$\pi/2$ autour de \vec{v}_1 puis de

$\pi/2$ autour de \vec{b}_3 .

Déterminer la position finale de \vec{p} vu de B.

Solution

Comme V est initialement confondu avec B, la transformation initiale est la matrice unité **I**. En multipliant à gauche par $\mathbf{R}_2(-\pi/2)$ puis à droite par $\mathbf{R}_1(\pi/2)$ puis à gauche par $\mathbf{R}_3(\pi/2)$, on obtient la transformation suivante du repère final V au repère fixe B :

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}_3(\pi/2) \cdot \mathbf{R}_2(-\pi/2) \cdot \mathbf{R}_1(\pi/2)$$

ou, tenant compte de (1-17) et (1-18),

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{p}^B = \mathbf{T} \cdot \vec{p}^V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Une vérification visuelle de ce résultat est montrée sur la figure 1-23 suivante :

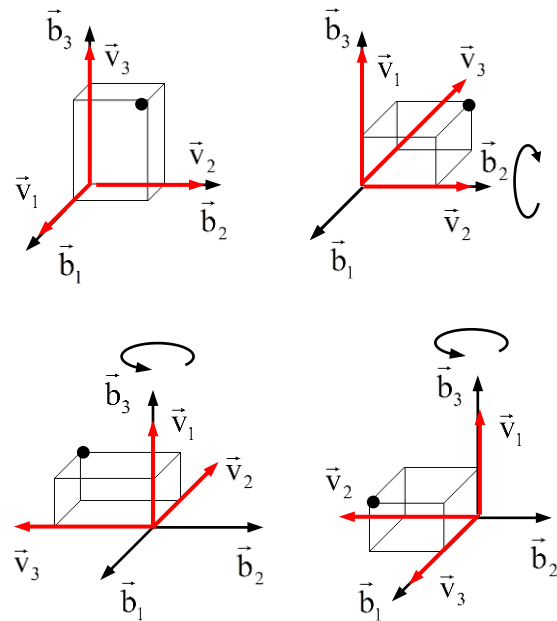


Fig. 1-23 Les 3 rotations de l'exemple 1-2

EXERCICE 1-2

- 1- Que sera la position finale de \vec{p} si l'on permute la première et la troisième rotation de l'exemple. Vérifier le résultat graphiquement.
- 2- Vérifier graphiquement que si la deuxième rotation de l'exemple 1-2 était la première ou la troisième le résultat reste le même.

Rotation autour d'un axe quelconque

Nous sommes maintenant en mesure de déterminer l'expression de la matrice de rotation $\mathbf{R}(\vec{h}, \alpha)$ autour d'un axe unitaire \vec{h} quelconque. Supposons que \vec{h} est lié à un repère mobile V initialement confondu avec un repère fixe B et posons

$$\vec{h} = h_1 \cdot \vec{v}_1 + h_2 \cdot \vec{v}_2 + h_3 \cdot \vec{v}_3$$

$$\text{avec } h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = 1.$$

Ce vecteur peut aussi se définir par deux angles, l'azimut θ et la latitude ϕ , comme le montre la figure 1-24 et on a :

$$h_1 = \cos\phi\cos\theta, \quad h_2 = \cos\phi\sin\theta \quad \text{et} \quad h_3 = \sin\phi.$$

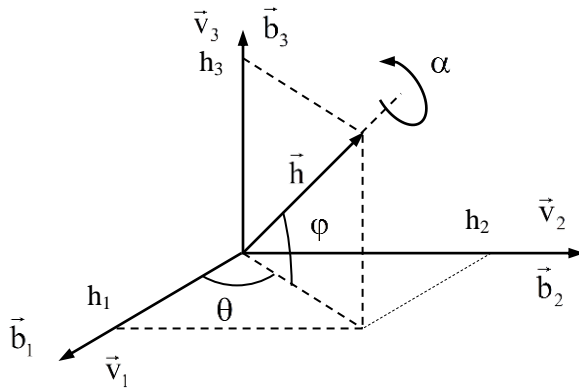


Fig. 1-24 Rotation autour d'un vecteur \vec{h}

En vue d'utiliser les expressions des rotations $\mathbf{R}_i(\cdot)$ autour des vecteurs de base, on effectue la rotation autour de \vec{h} d'un angle α en trois étapes :

- 1) On place \vec{h} dans le plan (\vec{b}_1, \vec{b}_2) en tournant V autour de \vec{b}_3 de $-\theta$ puis on superpose \vec{h} à \vec{b}_1 en tournant V autour de \vec{b}_2 de $-\varphi$. Ces deux rotations sont équivalentes à la transformation suivante (pour une question de place, on note par C le cosinus et par S le sinus) :

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{R}_2(-\varphi) \cdot \mathbf{R}_3(-\theta) \\ &= \begin{pmatrix} C\varphi & 0 & -S\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ S\varphi & 0 & C\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta & S\theta & 0 \\ -S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C\varphi C\theta & C\varphi S\theta & -S\varphi \\ -S\theta & C\theta & 0 \\ S\varphi C\theta & S\varphi S\theta & C\varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & -h_3 \\ -S\theta & C\theta & 0 \\ S\varphi C\theta & S\varphi S\theta & C\varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- 2) On tourne V autour de \vec{h} (maintenant confondu avec \vec{b}_1) d'un angle α : $\mathbf{R}_1(\alpha)$.
- 3) Pour ramener \vec{h} à sa position initiale, on effectue la transformation inverse de \mathbf{T} (en

tournant V autour de \vec{b}_2 de φ puis autour de \vec{b}_3 de θ) : $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$.

La matrice de rotation d'un angle α autour de \vec{h} est donc donnée par

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\vec{h}, \alpha) &= \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{R}_1(\alpha) \cdot \mathbf{T} \\ &= \begin{pmatrix} h_1 & -S\theta & S\varphi C\theta \\ h_2 & C\theta & S\varphi S\theta \\ -h_3 & 0 & C\theta \end{pmatrix} \\ &\quad \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha \\ 0 & S\alpha & C\alpha \end{pmatrix} \\ &\quad \bullet \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & -h_3 \\ -S\theta & C\theta & 0 \\ S\varphi C\theta & S\varphi S\theta & C\varphi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En effectuant ce produit, on obtient :

$$\mathbf{R}(\vec{h}, \alpha) = \begin{pmatrix} h_1^2 \cdot K\alpha + C\alpha & h_1 h_2 K\alpha - h_3 S\alpha & h_1 h_3 K\alpha + h_2 S\alpha \\ h_2 h_1 K\alpha + h_3 S\alpha & h_2^2 \cdot K\alpha + C\alpha & h_2 h_3 K\alpha - h_1 S\alpha \\ h_3 h_1 K\alpha - h_2 S\alpha & h_3 h_2 K\alpha + h_1 S\alpha & h_3^2 \cdot K\alpha + C\alpha \end{pmatrix} \quad (1-23)$$

avec

$$K\alpha = 1 - C\alpha.$$

EXERCICE 1-3

Vérifier que $\mathbf{R}(\vec{h}, \alpha)$ est une matrice orthogonale unitaire.

La rotation $\mathbf{R}(\vec{h}, \alpha)$ étant une transformation d'un repère orthonormé à un autre, est une matrice orthonormée. Inversement, toute matrice 3x3 orthonormée, $\mathbf{M} = \{a_{ij}\}$, peut être vue comme une certaine rotation d'un angle α autour d'un vecteur \vec{h} . Pour le montrer, déterminons α et \vec{h} en fonction des éléments a_{ij} de \mathbf{M} .

Soit σ la trace de la matrice \mathbf{M} , c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux :

$$\sigma = a_{11} + a_{22} + a_{33}.$$

De l'expression (1-23) de $\mathbf{R}(\vec{h}, \alpha)$ on tire

$$\sigma = (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)K\alpha + 3C\alpha = K\alpha + 3C\alpha = 1 + 2C\alpha$$

$$a_{21} - a_{12} = 2h_3S\alpha,$$

$$\text{et} \quad a_{32} - a_{23} = 2h_1S\alpha, \quad (1-24)$$

$$a_{13} - a_{31} = 2h_2S\alpha.$$

De ces équations on déduit que α et \vec{h} sont donnés par :

$$\alpha = \pm \text{Arc cos} \left(\frac{\sigma - 1}{2} \right) \quad \text{et} \quad \vec{h} = \frac{1}{2 \sin \alpha} \begin{pmatrix} a_{32} - a_{23} \\ a_{13} - a_{31} \\ a_{21} - a_{12} \end{pmatrix}. \quad (1-25)$$

Remarques : Cette expression de \vec{h} est valable si $\sin \alpha \neq 0$. Dans le cas où $\sin \alpha = 0$, au lieu des équations (1-24), on peut résoudre 3 autres équations déduites de la comparaison entre les éléments de \mathbf{M} et ceux de $\mathbf{R}(\vec{h}, \alpha)$ comme nous allons le faire dans l'exemple 1-4.

Le choix entre le signe + et le signe - dans l'expression de α n'a pas d'importance puisque, en changeant le signe de α (et donc de $\sin \alpha$), \vec{h} change de sens et la rotation reste la même comme le montre la figure 1-25 suivante.

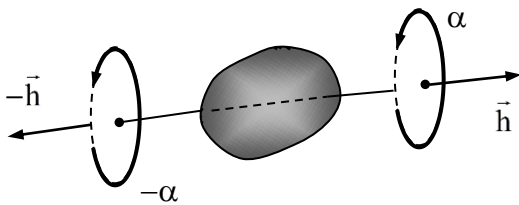


Fig.1- 25 La rotation est indépendante du signe de α

Exemple 1-3

Il est facile de vérifier que la matrice \mathbf{M} suivante est orthonormée.

$$\mathbf{M} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$$

Ses colonnes sont les vecteurs de base \vec{v}_i d'un repère V représenté sur la figure 1-26. Déterminer l'angle α et le vecteur de rotation \vec{h} de V par rapport au repère fixe B.

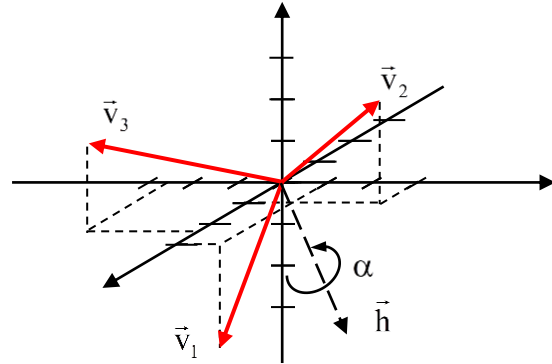


Fig. 1-26 Rotation de 60° autour de $(1,1,0)$

Solution

Appliquons (1-25) en choisissant pour α le signe +.

$$\sigma = \frac{1}{4}(3 + 3 + 2) = 2 \Rightarrow \alpha = \text{Arc cos} \left(\frac{1}{2} \right) = 60^\circ,$$

$$\vec{h} = \frac{1}{2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)} \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2\sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le repère V s'obtient donc en tournant B de 60° autour de la première bissectrice du plan horizontal.

Exemple 1-4

Considérons la transformation obtenue à l'exemple 1-2,

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

équivalente aux trois rotations successives

$\mathbf{R}(\vec{b}_2, -\pi/2)$ puis $\mathbf{R}(\vec{v}_1, \pi/2)$ puis $\mathbf{R}(\vec{b}_3, \pi/2)$.

Quelle est la seule rotation $\mathbf{R}(\vec{h}, \alpha) = \mathbf{T}$?

Solution

D'après (1-25),

$$\sigma = -1 \Rightarrow \alpha = \pm \text{Arc cos} \left(\frac{-1-1}{2} \right) = \pm \pi.$$

Comme $\sin \alpha = 0$, l'expression (1-25) de \vec{h} est indéfinie. Mais en comparant les éléments diagonaux de \mathbf{T} et de $\mathbf{R}(\vec{h}, \alpha)$ donnés par (1-23) et sachant que $\cos \alpha = -1$, on tire :

$$h_1^2(1+1)-1=0 \Rightarrow h_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$2h_2^2 - 1 = -1 \Rightarrow h_2 = 0,$$

$$2h_3^2 - 1 = 0 \Rightarrow h_3 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Les signes de h_1 et h_3 se déduisent de la comparaison des éléments de la 3^{ème} ligne, 1^{ère} colonne de \mathbf{T} et de $\mathbf{R}(\vec{h}, \alpha)$:

$$2h_1h_3 - 0 = 1 \Rightarrow h_1h_3 = 1/2 > 0.$$

h_1 et h_3 ont donc le même signe et \mathbf{T} est une rotation de $\pm \pi$ autour de la première bissectrice du plan (\vec{b}_1, \vec{b}_3) comme le montre la figure 1-27 suivante.

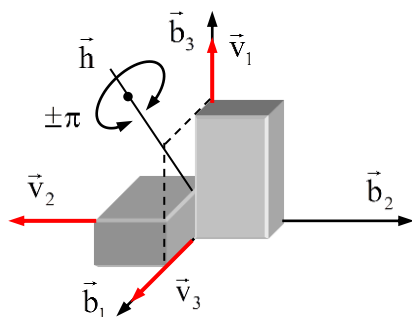


Fig. 1-27 Rotation équivalente
aux 3 rotations de l'exemple 1

EXERCICE 1-4

La figure 1-28 montre une pièce tenue par un poignet à deux axes orthogonaux x et z . En tournant l'articulation x de 30° et z de 45° , de combien tourne la pièce et autour de quel axe?

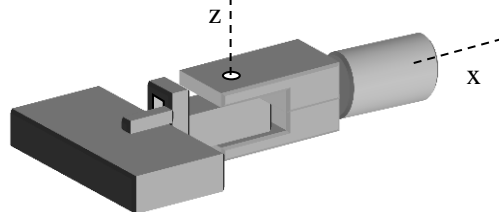


Fig. 1-28 Orientation d'une pièce

Transformation homogène

Dans le paragraphe précédent nous avons seulement envisagé l'orientation d'un repère V par rapport à un repère fixe B sans tenir compte de la position de son origine. La transformation homogène que nous allons maintenant définir permet d'ajouter à l'orientation la position de V par rapport à B .

Désignons par \vec{r} le vecteur joignant l'origine de B à celle de V et par \mathbf{R} la matrice de rotation de V par rapport à B . Soit P un point lié à V défini dans ce repère par le vecteur \vec{p}^V . D'après (1-16), l'écriture de ce vecteur dans la base de B est $\mathbf{R} \cdot \vec{p}^V$.

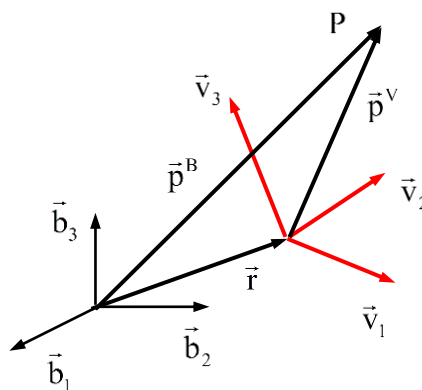


Fig. 1-28 Position d'un point par rapport à V et à B

Par conséquent, en examinant la figure 1-28, la position de P par rapport au repère fixe B est donnée par :

$$\vec{p}^B = \mathbf{R} \cdot \vec{p}^V + \vec{r}, \quad (1-26)$$

le vecteur \vec{r} étant supposé écrit dans la base de B.

Associions à la rotation \mathbf{R} et la position \vec{r} de V par rapport à B la matrice 4x4 définie par :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \vec{r} \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & r_1 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & r_2 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & r_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1-27)$$

Un vecteur de \mathbb{R}^4 , obtenu en ajoutant à un vecteur \vec{p} de \mathbb{R}^3 une quatrième composante égale à 1, est appelé *représentation homogène* de \vec{p} . Sauf confusion possible, cette représentation sera aussi désignée par \vec{p} . En multipliant \mathbf{T} par la représentation homogène de \vec{p}^V , on obtient d'après (1-26) :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R} & \vec{r} \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{p}^V \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} \cdot \vec{p}^V + \vec{r} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{p}^B \\ 1 \end{pmatrix}$$

.ou

$$\boxed{\vec{p}^B = \mathbf{T} \cdot \vec{p}^V}. \quad (1-28)$$

La matrice \mathbf{T} associe donc à la représentation homogène d'un point P vu du repère mobile V la représentation homogène de ce même point vu du repère fixe B. \mathbf{T} est appelée la *transformation homogène* de V à B.

Si $\vec{r} = \vec{0}$, \mathbf{T} est une rotation pure et si $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ (la matrice unitaire), \mathbf{T} est une translation pure. La transformation homogène d'une rotation pure ou d'une translation pure autour ou le long du $i^{\text{ème}}$ axe d'un repère sera désignée par $\mathbf{T}_i(q)$, q étant un déplacement angulaire ou linéaire.

Comme pour la rotation, on peut déduire, par un raisonnement analogue, la règle suivante :

Règle

- 1) Après un déplacement q du repère mobile V autour ou le long d'un axe \vec{b}_i du repère fixe B,

la nouvelle transformation s'obtient à partir de la précédente en la multipliant à **gauche** par $\mathbf{T}_i(q)$.

- 2) Après un déplacement q du repère mobile V autour ou le long d'un axe \vec{v}_i de V, la nouvelle transformation s'obtient à partir de la précédente en la multipliant à **droite** par $\mathbf{T}_i(q)$.

Par la suite, nous désignerons par \vec{e}_i le vecteur unitaire canonique dont la $i^{\text{ème}}$ composante est égale à 1 et les autres nulles.

Exemple 1-5

Soit P un point lié à un repère mobile V défini dans ce repère par $\vec{p}^V = [1 \ 2 \ 3]^T$. Que devient sa position finale \vec{p}^B par rapport au repère initial B si l'on effectue une rotation de $\pi/2$ autour de \vec{b}_2 puis une translation de 2 le long de \vec{v}_1 puis une rotation de $-\pi/2$ autour de \vec{b}_3 ?

Solution

Comme V est initialement confondu avec B, la transformation de départ est la matrice unitaire \mathbf{I} . En multipliant à gauche par $\mathbf{T}_2(\pi/2)$ puis à droite par $\mathbf{T}_1(2)$ puis à gauche par $\mathbf{T}_3(-\pi/2)$, on obtient la transformation homogène finale :

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{T}_3(-\pi/2) \cdot \mathbf{T}_2(\pi/2) \cdot \mathbf{T}_1(2), \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{R}_3(-\pi/2) & \vec{0} \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_2(\pi/2) & \vec{0} \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 2\vec{e}_1 \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{R}_3(-\pi/2)\mathbf{R}_2(\pi/2) & \vec{0} \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 2\vec{e}_1 \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} \\ \text{ou } \mathbf{T} &= \begin{pmatrix} \mathbf{R}_3(-\pi/2)\mathbf{R}_2(\pi/2) & \mathbf{R}_3(-\pi/2)\mathbf{R}_2(\pi/2) \cdot (2\vec{e}_1) \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \vec{r} \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec $\mathbf{R} = \mathbf{R}_3(-\pi/2)\mathbf{R}_2(\pi/2)$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}}$$

$$\text{et } \vec{r} = \mathbf{R} \cdot (2\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \vec{p}^B &= \mathbf{R} \cdot \vec{p}^V + \vec{r} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La matrice \mathbf{R} et le vecteur \vec{r} montrent que l'orientation finale de V est telle que $\vec{v}_1 = -\vec{b}_3$, $\vec{v}_2 = \vec{b}_1$ et $\vec{v}_3 = -\vec{b}_2$ et que son origine s'est déplacée de 2 dans le sens opposé à \vec{b}_3 . Une vérification graphique de ces résultats est donnée par la figure 1-29 suivante

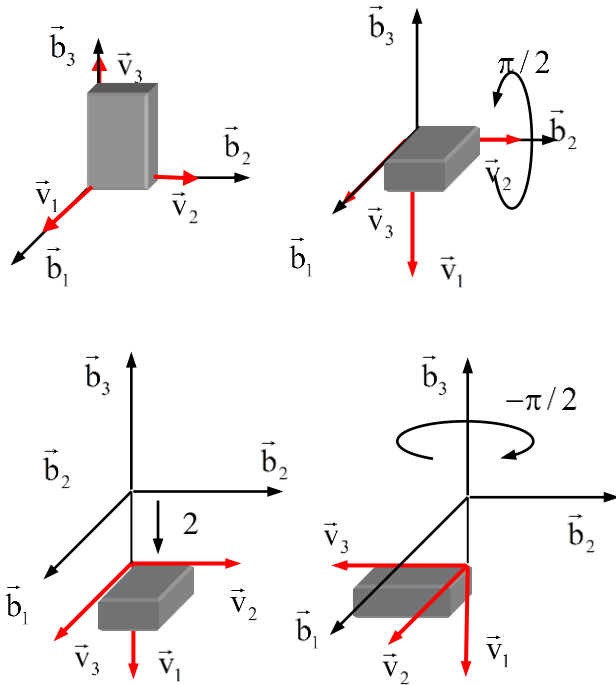


Fig. 1-29 Interprétation graphique de l'exemple 1-5

Inversion d'une transformation homogène

Supposons maintenant que la position \vec{p}^B d'un point P par rapport au repère fixe B est connue et déterminons sa position par rapport au repère variable V. Dans ce but, multiplions les deux membres de (1-26) par l'inverse de la transformation \mathbf{R} de V à B.

$$\vec{p}^B = \mathbf{R} \cdot \vec{p}^V + \vec{r} \Rightarrow \mathbf{R}^{-1} \cdot \vec{p}^B = \vec{p}^V + \mathbf{R}^{-1} \cdot \vec{r}$$

et comme $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$, on tire

$$\vec{p}^V = \mathbf{R}^T \cdot \vec{p}^B - \mathbf{R}^T \cdot \vec{r}. \quad (1-29)$$

On en déduit que la transformation homogène de B à V, c'est-à-dire l'inverse de la transformation homogène \mathbf{T} de V à B, est :

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T \cdot \vec{r} \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix}. \quad (1-30)$$

Cette expression peut être déduite directement de la définition de la transformation homogène. En effet, la rotation de B par rapport à V est l'inverse \mathbf{R}^{-1} (la transposée \mathbf{R}^T) de \mathbf{R} et, d'après (1-16), l'écriture de $-\vec{r}$ (qui joint l'origine de V à celle de B) dans la base de V est $-\mathbf{R}^T \cdot \vec{r}$.

Exemple 1-6

Considérons la transformation de V à B

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \vec{r} \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

obtenue à l'exemple 1-5 et soit le point P de cet exemple vu de B sous le vecteur $\vec{p}^B = [2 \quad -3 \quad -3]^T$. Quelle est la position de P par rapport à V ?

Solution

La transformation homogène de B à V est

c.à.d. $\vec{b}_1 = \vec{v}_2$, $\vec{b}_2 = -\vec{v}_3$ et $\vec{b}_3 = -\vec{v}_1$ et l'origine de B est vue de V sous $-2\vec{v}_1$. Par conséquent, comme prévu,

$$\vec{p}^V = \mathbf{T}^{-1} \vec{p}^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Transformation spirale

Une *transformation spirale* est la composition d'une rotation α autour d'un vecteur \vec{h} et d'une translation $d.\vec{h}$ le long du même vecteur \vec{h} . Son expression est la suivante :

$$\mathbf{S}(d.\vec{h}, \alpha) = \begin{pmatrix} \mathbf{R}(\vec{h}, \alpha) & d.\vec{h} \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} \quad (1-31)$$

$\mathbf{R}(\vec{h}, \alpha)$ étant la matrice donnée par (1-23) d'une rotation α autour d'un vecteur unitaire \vec{h} .

L'expression (1-31) reste la même que la rotation soit effectuée avant ou après la translation. En effet, sachant que la rotation de \vec{h} autour de \vec{h} est \vec{h} ,

$$\mathbf{R}(\vec{h}, \alpha).\vec{h} = \vec{h} \quad (1-32)$$

d'où

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R}(\vec{h}, \alpha) & \vec{0} \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & d.\vec{h} \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & d.\vec{h} \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{R}(\vec{h}, \alpha) & \vec{0} \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}(\vec{h}, \alpha) & d.\vec{h} \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 1-5

Montrer l'égalité (1-32) en remplaçant $\mathbf{R}(\vec{h}, \alpha)$ par son expression (1-23).

L'ordre des deux déplacements, angulaire et linéaire, d'une transformation spirale étant sans importance, on peut effectuer ces deux mouvements simultanément comme pour une vis. Dans ce cas, on appelle *pas* la distance λ parcourue par tour, c'est-à-dire pour chaque rotation de 2π . Comme d est la translation pour un angle α , on a :

$$d = \frac{\lambda}{2\pi}.\alpha. \quad (1-33)$$

Exemple 1-7

Un repère V subit un mouvement spiral de pas $\lambda = 4$ et d'angle $\alpha = 3\pi/2$ autour du vecteur unitaire $\vec{h} = [\sqrt{2}/2 \quad \sqrt{2}/2 \quad 0]^T$. Déterminer par rapport au repère initial B la position finale d'un point P défini dans V par $\vec{p}^V = [1 \quad 2 \quad 3]^T$.

Solution

D'après (1-33), $d = 4 / 2\pi.(3\pi / 2) = 3$. D'où

$$d.\vec{h} = \frac{3}{2}[\sqrt{2} \quad \sqrt{2} \quad 0]^T.$$

D'autre part, $C\alpha = 0$, $S\alpha = -1$ et $K\alpha = 1$ d'où, d'après (1-23),

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\vec{h}, \alpha) &= \begin{pmatrix} h_1^2 & h_1 h_2 + h_3 & h_1 h_3 - h_2 \\ h_1 h_2 - h_3 & h_2^2 & h_2 h_3 + h_1 \\ h_1 h_3 + h_2 & h_2 h_3 - h_1 & h_3^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \vec{p}^B &= \mathbf{R}(\vec{h}, \alpha).\vec{p}^V + d.\vec{h} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 3(1+2\sqrt{2}) \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La figure 2-11 suivante montre les configurations initiale et finale du repère V.

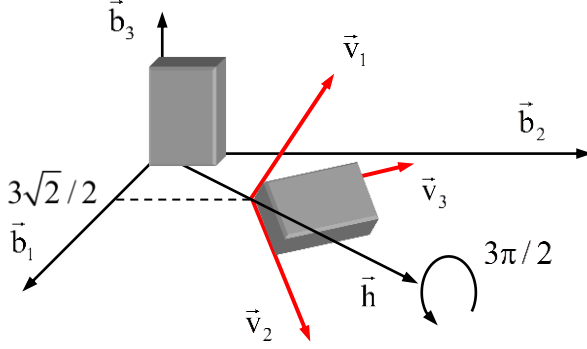


Fig. 1-30 Interprétation de l'exemple 1-7

1-4 CINÉMATIQUE DIRECTE D'UN MANIPULATEUR SÉRIE

En appliquant ce qui précède, nous pouvons maintenant déterminer la transformation homogène \mathbf{T}_0^k qui associe à un vecteur \vec{p}^{V_k} écrit dans le repère V_k du membre k son écriture \vec{p}^B dans le repère inertiel B :

$$\vec{p}^B = \mathbf{T}_0^k \cdot \vec{p}^{V_k}. \quad (1-34)$$

Commençons d'abord par obtenir la matrice de transformation \mathbf{T}_{k-1}^k du repère V_k au repère précédent V_{k-1} .

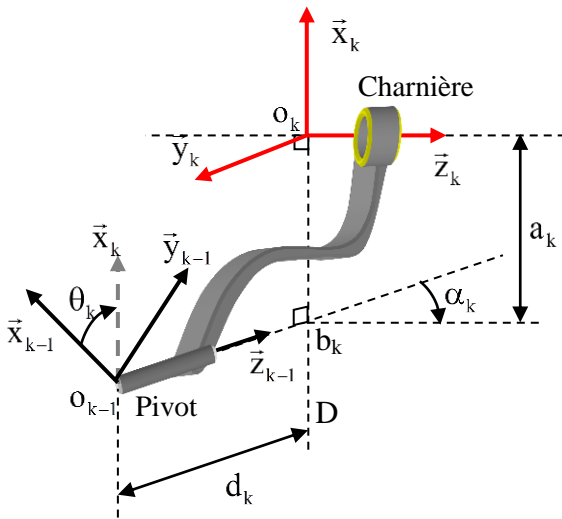


Fig. 1-16 Repérage d'un membre

En examinant la figure 1-16, reproduit ici pour la commodité, on constate que V_k s'obtient à partir de V_{k-1} en effectuant deux transformations spirales, l'une de translation $d_k \cdot \vec{z}_{k-1}$ et d'angle θ_k et l'autre de translation $a_k \cdot \vec{x}_k$ et d'angle α_k . Comme l'axe z_{k-1} de la première transformation est supposé fixe et que l'axe x_k de la seconde transformation est mobile, la matrice de la deuxième transformation doit être à droite. D'où

$$\mathbf{T}_{k-1}^k = \mathbf{S}(d_k \vec{z}_{k-1}, \theta_k) \cdot \mathbf{S}(a_k \vec{x}_k, \alpha_k). \quad (1-35)$$

Tenant compte de (1-31), on a :

$$\mathbf{T}_{k-1}^k = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_3(\theta_k) & d_k \vec{e}_3 \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1(\alpha_k) & a_k \vec{e}_1 \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C\theta_k & -S\theta_k & 0 & 0 \\ S\theta_k & C\theta_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_k \\ 0 & C\alpha_k & -S\alpha_k & 0 \\ 0 & S\alpha_k & C\alpha_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On déduit que

$$\mathbf{T}_{k-1}^k = \begin{pmatrix} C\theta_k & -S\theta_k C\alpha_k & S\theta_k S\alpha_k & a_k C\theta_k \\ S\theta_k & C\theta_k C\alpha_k & -C\theta_k S\alpha_k & a_k S\theta_k \\ 0 & S\alpha_k & C\alpha_k & d_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1-36)$$

Cette expression ne comporte qu'une seule variable : θ_k si l'articulation $k-1$ est rotative, d_k si elle est prismatique. En posant

$$q_k = \xi_k \cdot \theta_k + (1 - \xi_k) \cdot d_k \quad (1-37)$$

avec

$$\xi_k = \begin{cases} 1 & \text{si l'articulation } k-1 \text{ est rotative,} \\ 0 & \text{si l'articulation } k-1 \text{ est prismatique,} \end{cases}$$

on écrit :

$$\mathbf{T}_{k-1}^k = \mathbf{T}_{k-1}^k(q_k). \quad (1-38)$$

EXERCICE 1-6

Retrouver (1-36) en se référant à la figure 1-16 et en écrivant dans V_{k-1} les vecteurs de base de V_k ainsi que le vecteur joignant l'origine de V_{k-1} à celle de V_k .

La matrice de transformation de V_{k-1} à V_k s'obtient en inversant (1-36). D'après la formule d'inversion (1-30), on tire :

$$\mathbf{T}_k^{k-1} = \begin{pmatrix} C\theta_k & S\theta_k & 0 & -a_k \\ -S\theta_k C\alpha_k & C\theta_k C\alpha_k & S\alpha_k & -d_k S\alpha_k \\ S\theta_k S\alpha_k & -C\theta_k S\alpha_k & C\alpha_k & -d_k C\alpha_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1-39)$$

EXERCICE 1-7

Retrouver (1-39) en effectuant deux transformations spirales.

Ayant l'expression (1-36) de \mathbf{T}_{k-1}^k la matrice de transformation du repère V_k au repère inertiel B (noté aussi V_0) est donnée par

$$\mathbf{T}_0^k(q_1, \dots, q_k) = \mathbf{T}_0^1(q_1) \cdot \mathbf{T}_1^2(q_2) \cdot \dots \cdot \mathbf{T}_{k-1}^k(q_k), \quad (1-40)$$

$k = 1, \dots, n,$

où n est l'indice relatif à l'outil. La multiplication des matrices au second membre de (1-40) conduit à des fonctions trigonométriques dont l'argument est une somme algébrique d'angles. Pour une question d'espace et de clarté, les notations suivantes sont généralement adoptées :

$$C_{ijk\dots} = \cos(\theta_i + \theta_j + \theta_k + \dots),$$

$$S_{ijk\dots} = \sin(\theta_i + \theta_j + \theta_k + \dots),$$

$$C_{ij\dots kl\dots} = \cos[(\theta_i + \theta_j + \dots) - (\theta_k + \theta_l + \dots)],$$

$$S_{ij\dots kl\dots} = \sin[(\theta_i + \theta_j + \dots) - (\theta_k + \theta_l + \dots)].$$

Exemple 1-8

Les paramètres des membres du robot Microrobot Alpha II, représenté par la figure 1-18 et dont le

diagramme est donné par la figure 1-19, sont groupés dans le tableau suivant :

Membres	θ	d	a	α
1	q_1	5	1	$-\pi/2$
2	q_2	0	4	0
3	q_3	0	4	0
4	q_4	0	0	$-\pi/2$
5	q_5	3	0	0

Les articulations de ce robot étant toutes rotatives, les variables q_k de ce robot sont les rotations θ_k . Déterminer les matrices de transformation du poignet 3 au support 0, de l'outil 5 au poignet et de l'outil au support.

Solution

Tenant compte des paramètres du robot donnés par le tableau ci-dessus et des relations (1-36) et (1-40), on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_0^3 &= \mathbf{T}_0^1 \mathbf{T}_1^2 \mathbf{T}_2^3 \\ &= \begin{pmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & C_1 \\ S_1 & 0 & C_1 & S_1 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & 4C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & 4S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & 4C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & 4S_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_0^3 &= \mathbf{T}_{\text{Support}}^{\text{Poignet}} \\ &= \begin{pmatrix} C_1 C_{23} & -C_1 S_{23} & -S_1 & 4C_1(C_{23} + C_2) + C_1 \\ S_1 C_{23} & -S_1 S_{23} & C_1 & 4S_1(C_{23} + C_2) + S_1 \\ -S_{23} & -C_{23} & 0 & -4(S_{23} + S_2) + 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_3^5 &= \mathbf{T}_{\text{Poignet}}^{\text{Outil}} \\ &= \begin{pmatrix} C_4 & 0 & -S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_5 & -S_5 & 0 & 0 \\ S_5 & C_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C_4 C_5 & -C_4 S_5 & -S_4 & -3S_4 \\ S_4 C_5 & -S_4 S_5 & C_4 & 3C_4 \\ -S_5 & -C_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La matrice de transformation de l'outil au support est donnée par

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\text{Support}}^{\text{Outil}} &= \mathbf{T}_0^5 = \mathbf{T}_0^3 \mathbf{T}_3^5 = \mathbf{T}_{\text{Support}}^{\text{Poignet}} \mathbf{T}_{\text{Poignet}}^{\text{Outil}} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \vec{p} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \begin{pmatrix} C_1 C_5 C_{234} + S_1 S_5 & -C_1 S_5 C_{234} + S_1 C_5 & -C_1 S_{234} \\ S_1 C_5 C_{234} - C_1 C_5 & -S_1 S_5 C_{234} - C_1 C_5 & -S_1 S_{234} \\ -C_5 S_{234} & S_5 S_{234} & -C_{234} \end{pmatrix}, \\ \vec{p} &= \begin{pmatrix} C_1 [4(C_{23} + C_2) - 3S_{234} + 1] \\ S_1 [4(C_{23} + C_2) - 3S_{234} + 1] \\ -3C_{234} - 4S_{23} - 4S_2 + 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Les trois colonnes de \mathbf{R} sont respectivement les vecteurs \vec{x}_5 , \vec{y}_5 et \vec{z}_5 du repère V_5 de l'outil et \vec{p} est le vecteur joignant l'origine o du repère inertiel B à l'origine o_5 de V_5 . Ces quatre vecteurs sont écrits dans la base $\{\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\}$ de B .

1-5 SIMULATION SUR MATLAB

Commençons par définir dans un « M-file » une fonction que nous dénommons «matrtransf» et qui associe aux paramètres du membre k d'un robot la matrice de transformation du repère V^k de ce membre au repère V^{k-1} du membre précédent. L'expression de cette matrice est donnée par (1-36).

```
function T = matrtransf(qg, d, a, ag)
```

```
% MATRTRANSF calcule la matrice la matrice
% homogène de transformation du repère V(k) du
% membre k d'un manipulateur série au repère
% V(k-1) du membre (k-1) en fonction des
% paramètres du membre k :
% qg = angle de rotation, d = éloignement,
% a = écartement, ag = angle de torsion.
```

```
Cq = cos(qg) ; Sq = sin(qg) ;
```

```
Ca = cos(ag) ; Sa = sin(ag)
```

```
T = [Cq -Sq*Cag Sq*Sa a*Cq
      Sq Cq*Ca -Cq*Sa a*Sq
      0 Sa Ca d
      0 0 0 1];
```

- Rappelons que toute expression dans une ligne précédée par le symbole % n'est qu'un commentaire d'éclaircissement ignoré durant l'exécution du programme. Généralement, il est souhaitable d'introduire avant les instructions exécutables quelques commentaires concernant le rôle de la fonction et la signification de ses arguments. Au besoin, sans ouvrir l'éditeur de programmes, on peut se rappeler de ces commentaires en écrivant sur la fenêtre de commande l'instruction :
 >> help matrtransf.

EXERCICE 1-8

Copier et sauvegarder la fonction «matrtransf» dans l'éditeur de programmes, exécuter l'instruction
 >> T21 = matrtransf(pi/4,0,4,0)
 et interpréter géométriquement le résultat.

La fonction sans arguments suivante permet de définir sur la fenêtre de commande les paramètres constants d'un robot donné.

```
function P = rob
```

```
% ROB définit les paramètres constants d'un robot.
% xi = [xi1,xi2,...,xik] où xi(i) = 1 si l'articulation
% du membre i est rotative, xi(i) = 0 si elle est
% prismatique.
% A la demande de ce programme, introduisez les
% 3 paramètres constants de chaque membre :
% la rotation qg ou l'éloignement d (pf),
% l'écartement a et la torsion ag.
```

```
disp('Types des articulations : ...
      xi(i) = 1 si rotative, xi(i) = 0 si prismatique')
xi = input('introduire le vecteur xi : ');
n = length(xi); % nombre des articulations

% La fonction « disp » écrit un texte sur la fenêtre
% de commande et la fonction « input » permet
% d'introduire une matrice à partir de cette fenêtre.

% Paramètres
for i = 1 : n
    disp(['Introduire les paramètres constants ...
          du membre ', num2str(i)])
    if xi(i) == 0
        % a == b vaut 1 si a = b et vaut 0 si a ≠ b.
        pf(i) = input('angle de rotation qg : ');
    else
        pf(i) = input('éloignement d : ');
    end
    a(i) = input('écartement a : ');
    ag(i) = input('angle de torsion ag : ');
end
P={xi, pf, a, ag};
```

Exemple 1-9

Pour définir à l'aide de la fonction ROB le manipulateur de l'exemple 1-8, on écrit :

```
>> Micralf = rob
```

Ce programme demande les types des articulations et les valeurs des paramètres constants de chaque membre du robot. Quand il affiche le nom d'un paramètre, on lui donne sa valeur (écrite ici en rouge) et on passe à une nouvelle ligne :

```
Types des articulations : ...
      xi(i) = 1 si rotative, xi(i) = 0 si prismatique
introduire le vecteur xi : [1 1 1 1 1]
Introduire les paramètres constants du membre 1
éloignement d : 5
écartement a : 1
angle de torsion ag : -pi/2
Introduire les paramètres constants du membre 2
éloignement d : 0
:
Introduire les paramètres constants du membre 5
éloignement d : 3
écartement a : 0
angle de torsion ag : 0
```

Après l'introduction du dernier paramètre et le passage à une nouvelle ligne, le programme répond sous la forme suivante où « double » signifie que les paramètres sont retenus avec une double précision :

Micralf =

```
[1x5 double] [1x5 double] [1x5 double] [1x5
double]
```

Cet étalage est constitué de 4 vecteurs contenant respectivement les types xi des articulations, les éloignements ou les rotations fixes pf_i , les écartements a_i et les torsions ag_i . Ces paramètres s'affichent sur l'écran quand on tape l'instruction « Micralf {1, :} ». D'autre part, pour éviter d'introduire à chaque fois les paramètres de ce robot, on les sauvegarde en tapant l'instruction « save Micralf ».

Nous terminons ce chapitre par un programme qui simule le mouvement d'un manipulateur série pour des fonctions d'articulation $q_i(t)$ données. Ce programme représente graphiquement à chaque instant t les vecteurs de base des repères V_i et le polygone joignant leurs origines. En plus, il trace la trajectoire de la pointe de l'outil (l'origine de V_n) ainsi que son vecteur d'approche z_n . Rappelons encore une fois que les vecteurs de base d'un repère V_i sont donnés par les 3 premières colonnes de T_0^i et son origine par la 4^{ème} colonne.

```
function simrob(rb,q)
```

```
% SIMROB simule le mouvement d'un robot
% rb contient les paramètres du robot définis par la
% fonction ROB.
% q = [q1(t),q2(t),...,qn(t)] où qi(t) est un vecteur
% colonne représentant la valeur angulaire ou
% linéaire de la ième articulation aux instants
% t = (0 : p : tf)', p étant un petit pas du temps et tf
% est la durée de la simulation.
```

```
xi = rb{1}; pf = rb{2}; a = rb{3}; ag = rb{4};
n = length(xi); % nombre des articulations
m = length(q(:, 1)); % nombre des instants
```

```
% Les axes de la figure doivent contenir tout le
% robot en tout instant.
```

```

ax = input('Introduire [xmin xmax ymin ymax ...
          zmin zmax] :');

% Repères à chaque instant.
% X(i), Y(i), Z(i) sont les coordonnées ...
% de l'origine du ième repère.
% Uk(i), Vk(i), Wk(i) sont les composantes ...
% du kème vecteur de base du ième repère.

% les coordonnées de la pointe de l'outil.
x = []; y = []; z = [];

for j = 1 : m

    % Initialisation
    % Tous les repères des membres sont supposés
    % initialement confondus avec le repère du
    % support.
    T = eye(4);
    X = zeros(n+1,1); Y = zeros(n+1,1);
    Z = zeros(n+1,1);
    U1 = [1; zeros(n,1)]; V1 = zeros(n+1,1);
    W1 = zeros(n+1,1);
    U2 = zeros(n+1,1); V2 = [1; zeros(n,1)];
    W2 = zeros(n+1,1);
    U3 = zeros(n+1,1); V3 = zeros(n+1,1);
    W3 = [1; zeros(n,1)];

% Repères des membres à l'instant j.
for i = 1 : n
    if xi(i) == 1
        T = T*matrtransf(q(j,i),pf(i),a(i),ag(i));
    else
        T = T*matrtransf(pf(i),q(j,i),a(i),ag(i));
    end
    X(i+1) = T(1,4); Y(i+1) = T(2,4);
    Z(i+1) = T(3,4);
    U1(i+1) = T(1,1); U2(i+1) = T(1,2);
    U3(i+1) = T(1,3);
    V1(i+1) = T(2,1); V2(i+1) = T(2,2);
    V3(i+1) = T(2,3);
    W1(i+1) = T(3,1); W2(i+1) = T(3,2);
    W3(i+1) = T(3,3);
end

% Pointe de l'outil et son vecteur d'approche.
x(j,1) = X(n+1); y(j,1) = Y(n+1); z(j,1) = Z(n+1);
U(j,1) = U3(n+1); V(j,1) = V3(n+1);
W(j,1) = W3(n+1);

```

```

% Représentation des membres
plot3(X,Y,Z,'-og','MarkerSize',8,...
      'MarkerFaceColor','r',...
      'MarkerEdgeColor','k','LineWidth',2);
hold on

% Représentation de la pointe
plot3(x,y,z,': k');

% Représentation des repères.
quiver3(x,y,z,U,V,W,0.3,'m');
quiver3(X,Y,Z,U1,V1,W1,0.4,'c');
quiver3(X,Y,Z,U2,V2,W2,0.4,'k');
quiver3(X,Y,Z,U3,V3,W3,0.4,'r');

% Figure à l'instant j.
axis(ax);
M(j) = getframe;
hold off
end

% Animation
movie(M);

```

Exemple 1-10

Pour simuler le mouvement du robot de l'exemple 1-8 pendant une durée de 2π secondes, quand les déplacements angulaires des articulations en fonction du temps t sont donnés par

$$\begin{aligned}
 q_1(t) &= (\pi/2)\cos t, & q_2(t) &= -(\pi/2)\sin 2t, \\
 q_3(t) &= (\pi/2)\sin t, & q_4(t) &= -(\pi/4)\cos 2t, & q_5(t) &= 4\pi\sin 8t,
 \end{aligned}$$

on écrit sur la fenêtre de commande les instructions suivantes :

```

>> t = (0 : 0.02 : 2*pi)';
>> q = [(pi/2)*cos(t) -(pi/2)*sin(2*t) ...
        (pi/2)*sin(t) -(pi/4)*cos(2*t) ...
        4*pi*sin(8*t)];
>> simrob(micralf,q)

```

À la suite de ces instructions une figure à 3 dimensions montre le mouvement des membres du manipulateur et trace la trajectoire suivie par l'outil dont le vecteur d'approche indique en chaque instant sa direction. Quand ce mouvement se termine on obtient la configuration finale du manipulateur (fig. 1-31).

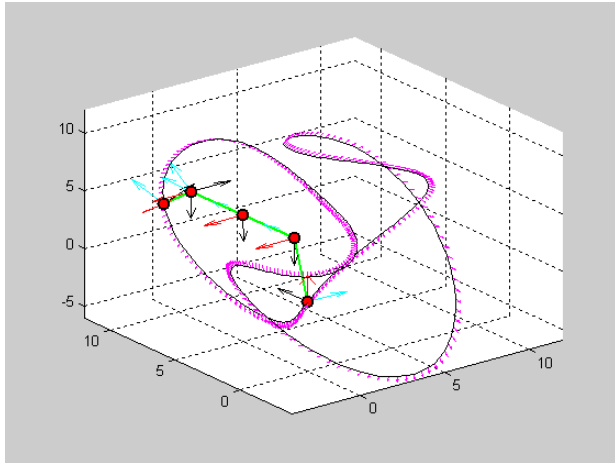
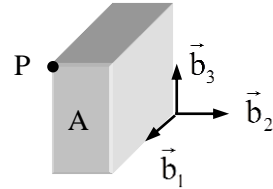


Fig 1-31 Animation d'un robot et tracé de la trajectoire de son outil.

AUTRES EXERCICES ET COMPLÉMENTS

1-9. $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est un repère orthonormé lié à un objet A, initialement confondu avec un repère inertiel $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$. Soit P un point de A de coordonnées $(2, -1, 2)$ par rapport à V.



Que devient la position de P par rapport à B quand

- on tourne A de $\pi/4$ autour de \vec{v}_2 puis de $\pi/2$ autour de \vec{b}_3 puis de $\pi/4$ autour de \vec{v}_3 ?
- on déplace A de 2 le long de \vec{v}_2 puis on le tourne de $\pi/4$ autour de \vec{b}_1 puis de $\pi/2$ autour de \vec{v}_1 ?
- on tourne A autour de $\vec{h} = [-2 \ 1 \ 2]^T$ d'un angle $\pi/2$ puis de $\pi/3$ autour de \vec{v}_1 ?
- On effectue sur A une transformation spirale de pas $\lambda = 1$ et d'angle $\alpha = 3\pi/4$ le long de $\vec{h} = [1 \ 0 \ 1]^T$ puis une translation de $\vec{t} = [0 \ 1 \ -1]^T$.

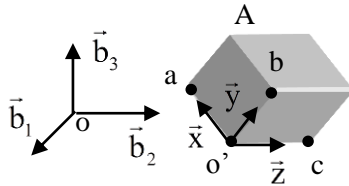
Réponses :

- $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 3 + 2\sqrt{2} & -3 + 2\sqrt{2} \end{bmatrix}^T$
- $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}^T$
- $\frac{1}{18} \begin{bmatrix} 22 + 17\sqrt{3} & 31 - 10\sqrt{3} & -16 + 4\sqrt{3} \end{bmatrix}^T$
- $\frac{1}{16} \begin{bmatrix} 40 + 3\sqrt{2} & 16 + 8\sqrt{2} & 8 + 3\sqrt{2} \end{bmatrix}^T$

1-10. Dans un objet A, on considère 4 points o', a, b et c définis par rapport à un repère inertiel $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ par o'(2,2,1) et

$$a(1, 1, 1 + \sqrt{2}), b(2, 2 + \sqrt{2}, 2), c(-1, 3, 1 - \sqrt{2}).$$

Soit V un repère direct dont les vecteurs unitaires \vec{x} , \vec{y} et \vec{z} sont portés par les droites o'a, o'b et o'c.



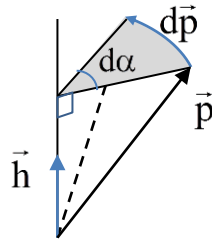
- Montrer que V est orthonormé et écrire la transformation homogène de V à B .
- Déterminer l'axe et l'angle de rotation de V par rapport à B .
- Décomposer cette dernière rotation en trois rotations : de θ_3 autour de z puis de θ_2 autour de y puis de θ_1 autour de x .

Réponses

- $\vec{h} = [0.172 \ -0.938 \ -0.298]^T$, $\alpha = 120^\circ$
- $\theta_1 = \sin^{-1}(\sqrt{6}/3)$, $\theta_2 = -\pi/4$, $\theta_3 = -3\pi/4$

1-11. Matrice exponentielle de rotation. Nous savons que la variation d'un vecteur \vec{p} tournant autour d'un vecteur unitaire \vec{h} d'un angle $d\alpha$ est

$$d\vec{p} = d\alpha(\vec{h} \wedge \vec{p}).$$



On associe à \vec{h} la matrice antisymétrique

$$[\vec{h}] = \begin{pmatrix} 0 & -h_3 & h_2 \\ h_3 & 0 & -h_1 \\ -h_2 & h_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Montrer que $\vec{h} \wedge \vec{p} = [\vec{h}]\vec{p}$ et déduire que

$$\vec{p}(\alpha) = e^{[\vec{h}]\alpha} \vec{p}(0)$$

où, pour une matrice X , e^X est une exponentielle matricielle dont les propriétés sont analogues à celles de l'exponentielle scalaire, en particulier

$$e^X = I + X + X^2/2! + \dots + X^n/n! + \dots$$

- Vérifier que $[\vec{h}]^3 = -[\vec{h}]$ et déduire que

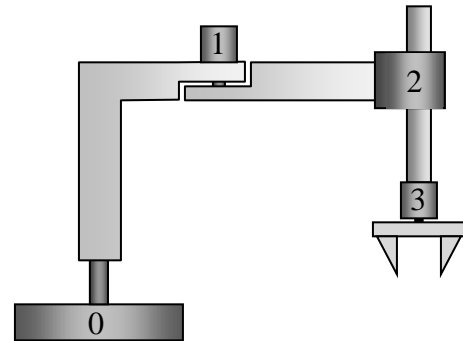
$$[\vec{h}]^n = \begin{cases} (-1)^k [\vec{h}] & \text{si } n = 2k+1, \\ (-1)^{k-1} [\vec{h}]^2 & \text{si } n = 2k, k \geq 1. \end{cases}$$

- Montrer que

$$e^{[\vec{h}]\alpha} = I + \sin \alpha [\vec{h}] + (1 - \cos \alpha) [\vec{h}]^2$$

et vérifier que $e^{[\vec{h}]\alpha}$ n'est autre que la matrice de rotation $R(\vec{h}, \alpha)$ donnée en (1-23).

1-12. On considère de nouveau le robot Scara de l'exercice 1-1.



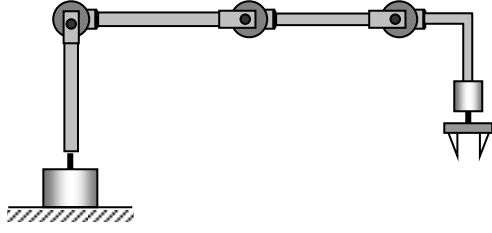
- Reprendre le diagramme de ce robot et dresser le tableau de ses paramètres.
- Montrer que

$$\mathbf{T}_0^4 = \begin{pmatrix} C_{1-24} & S_{1-24} & 0 & a_1 C_1 + a_2 C_{1-2} \\ S_{1-24} & -C_{1-24} & 0 & a_1 S_1 + a_2 S_{1-2} \\ 0 & 0 & -1 & d_1 - q_3 - d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } \begin{cases} C_{1-24} = \cos(q_1 - q_2 - q_4) \\ S_{1-24} = \sin(q_1 - q_2 - q_4). \end{cases}$$

- À l'aide du M-file « matrtransf », vérifier le résultat précédent en choisissant des valeurs particulières pour les paramètres variables.
- À l'aide du M-file « simrob », simuler le mouvement de ce robot pour des fonctions d'articulation $q_i(t)$ de votre choix.

1-13. La figure suivante représente un robot dit Rhino dont les 5 articulations sont rotatives et tous ses membres sont situés dans un même plan vertical pouvant tourner autour de l'axe de base.



- Définir ses paramètres constants et variables et dresser leur tableau.
- Représenter son diagramme selon la convention de Denavit-Hartenberg.
- Déterminer T_0^3 et T_3^5 .
- Montrer que

$$T_0^5 = \begin{pmatrix} R & \vec{r} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec

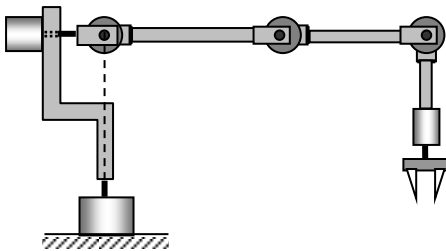
$$R = \begin{pmatrix} C_1 C_{234} C_5 + S_1 S_5 & -C_1 C_{234} S_5 + S_1 C_5 & -C_1 S_{234} \\ S_1 C_{234} C_5 - C_1 S_5 & -S_1 C_{234} S_5 - C_1 C_5 & -S_1 S_{234} \\ -S_{234} C_5 & S_{234} S_5 & -C_{234} \end{pmatrix}$$

et

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} C_1(a_2 C_2 + a_3 C_{23} + a_4 C_{234} - d_5 S_{234}) \\ S_1(a_2 C_2 + a_3 C_{23} + a_4 C_{234} - d_5 S_{234}) \\ d_1 - a_2 S_2 - a_3 S_{23} - a_4 S_{234} - d_5 C_{234} \end{pmatrix}.$$

- À l'aide du M-file « [matrtransf](#) », vérifier les résultats c) et d) précédents en choisissant des valeurs particulières pour les paramètres variables.
- À l'aide du M-file « [simrob](#) », simuler le mouvement de ce robot pour des fonctions d'articulation $q_i(t)$ de votre choix.

1-14. Soit le robot Intelledex à 6 articulations rotatives représenté par la figure suivante



Montrer que

$$T_0^6 = \begin{pmatrix} R & \vec{p} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\vec{x}_6 & \vec{y}_6 & \vec{z}_6] & \vec{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec

$$\vec{x}_6 = \begin{pmatrix} (C_1 C_2 C_{345} + S_1 S_{345}) C_6 + C_1 S_2 S_6 \\ (S_1 C_2 C_{345} - C_1 S_{345}) C_6 + S_1 S_2 S_6 \\ S_2 C_{345} C_6 - C_2 S_6 \end{pmatrix},$$

$$\vec{y}_6 = \begin{pmatrix} -(C_1 C_2 C_{345} + S_1 S_{345}) S_6 + C_1 S_2 C_6 \\ -(S_1 C_2 C_{345} - C_1 S_{345}) S_6 + S_1 S_2 C_6 \\ -S_2 C_{345} S_6 - C_2 C_6 \end{pmatrix},$$

$$\vec{z}_6 = \begin{pmatrix} -S_1 C_{345} + C_1 C_2 S_{345} \\ C_1 C_{345} + S_1 C_2 S_{345} \\ S_2 S_{345} \end{pmatrix}$$

et l'expression de \vec{p} est

$$\begin{pmatrix} C_1 C_2 (a_3 C_3 + a_4 C_{34} + d_6 S_{345}) + S_1 (a_3 S_3 + a_4 S_{34} - d_6 C_{345}) \\ S_1 C_2 (a_3 C_3 + a_4 C_{34} + d_6 S_{345}) - C_1 (a_3 S_3 + a_4 S_{34} - d_6 C_{345}) \\ d_1 + S_2 (a_3 C_3 + a_4 C_{34} + d_6 S_{345}) \end{pmatrix}$$