

Chapitre 2

CINÉMATIQUE INVERSE

La cinématique inverse d'un robot est la détermination des variables d'articulation (rotatives ou prismatiques) qui confèrent à l'outil la position et l'orientation désirées. Nous commençons par la formulation du problème pour des manipulateurs séries et nous passons ensuite à la résolution de ce problème par deux techniques, analytique et numérique, suivies de programmes de simulation d'un mouvement donné de l'outil. Ce chapitre se termine par un aperçu sur la cinématique inverse de manipulateurs plus complexes ayant des membres parallèles.

2-1 FORMULATION

Nous avons vu au chapitre précédent que, pour un vecteur d'articulation $\vec{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ d'un manipulateur série, la transformation homogène du repère V_n de l'outil au repère V_0 du support est :

$$\mathbf{T}(\vec{q}) = \mathbf{T}_{\text{Support}}^{\text{Outil}} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}(\vec{q}) & \vec{p}(\vec{q}) \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11}(\vec{q}) & R_{12}(\vec{q}) & R_{13}(\vec{q}) & p_1(\vec{q}) \\ R_{21}(\vec{q}) & R_{22}(\vec{q}) & R_{23}(\vec{q}) & p_2(\vec{q}) \\ R_{31}(\vec{q}) & R_{32}(\vec{q}) & R_{33}(\vec{q}) & p_3(\vec{q}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2-1)$$

Rappelons que les colonnes de la matrice de rotation \mathbf{R} de V_n par rapport à V_0 sont les vecteurs de base $\vec{x}_n, \vec{y}_n, \vec{z}_n$ de V_n écrits dans la base $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$ de V_0 et que \vec{p} est le vecteur définissant la position de l'origine de V_n par rapport à V_0 .

La cinématique inverse consiste à déterminer le vecteur d'articulation \vec{q} qui confère à l'outil une position \vec{p}^d et une orientation \mathbf{R}^d désirées auxquelles correspond la transformation homogène

$$\mathbf{T}^d = \begin{pmatrix} \mathbf{R}^d & \vec{p}^d \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11}^d & R_{12}^d & R_{13}^d & p_1^d \\ R_{21}^d & R_{22}^d & R_{23}^d & p_2^d \\ R_{31}^d & R_{32}^d & R_{33}^d & p_3^d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2-2)$$

En comparant (2-1) et (2-2), le problème revient à déterminer le vecteur \vec{q} qui vérifie les 12 équations non linéaires suivantes :

$$\begin{aligned} R_{ij}(\vec{q}) &= R_{ij}^d, \quad i = 1, 2, 3 \text{ et } j = 1, 2, 3, \\ p_i(\vec{q}) &= p_i^d, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2-3)$$

Cependant, ces équations ne sont pas indépendantes puisque, \mathbf{R} étant orthonormée, elles sont liées par les 6 relations

$$\begin{aligned} \sum_i R_{ij}^2(\vec{q}) &= \sum_i (R_{ij}^d)^2 = 1, \quad j = 1, 2, 3 \\ \sum_i R_{ij}(\vec{q}) R_{ik}(\vec{q}) &= \sum_i R_{ij}^d R_{ik}^d = 0, \quad \forall j \neq k. \end{aligned} \quad (2-4)$$

Le système (2-3) se réduit donc à 6 équations et souvent moins car la structure du robot peut impliquer des relations autres que (2-4). Par exemple, si le vecteur d'approche \vec{z}_n de l'outil est toujours vertical, comme celui du robot [Scara](#), aux contraintes (2-4) s'ajoutent les deux suivantes :

$$R_{i3}(\vec{q}) = R_{i3}^d = 0, \quad i = 1 \text{ ou } 2.$$

En définitive, la cinématique inverse revient à résoudre m équations non linéaires ($m \leq 6$) à n inconnues q_1, \dots, q_n , n étant le nombre des articulations du robot. Le nombre m des équations indépendantes, appelé degré de liberté de l'outil, est égal au nombre des paramètres nécessaires et suffisantes pour définir la position et l'orientation du repère V_n .

Malheureusement, il n'existe pas une méthode générale pour résoudre analytiquement les systèmes d'équations non linéaires et chaque cas doit être traité séparément. Un exemple sera développé au paragraphe suivant mais il est d'abord utile d'attirer l'attention sur les remarques suivantes.

Remarque 1. Comme pour les systèmes linéaires, il est nécessaire que les équations d'un robot soient *compatibles* c'est-à-dire ne conduisant pas à une contradiction. Si elles sont incompatibles, la solution n'existe pas et ceci arrive quand le problème est mal formulé ou quand on demande au robot de placer l'outil en une position ou selon une orientation hors de sa portée.

Exemple 2-1

Considérons le cas simple d'un robot à articulation rotative unique ($n = 1$) et déterminons la rotation q de cette articulation qui place l'outil au point $P = (p_1, p_2)$.

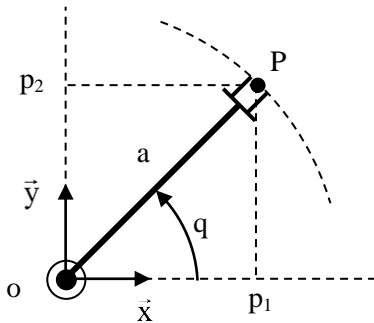


Fig. 2-1 Robot à articulation unique

Comme la position de l'outil se définit dans le plan de la figure par deux paramètres p_1 et p_2 , le nombre d'équations liant la rotation q à la position de P est $m = 2$. D'après la figure 2-1, ces 2 équations à une inconnue q sont :

$$a \cos q = p_1 \quad \text{et} \quad a \sin q = p_2. \quad (2-5)$$

On en déduit que $p_1^2 + p_2^2 = a^2$, d'où P doit être choisi sur le cercle de centre o et de rayon a . Ce cercle est le domaine de travail du robot. Si l'on cherche à placer P à l'extérieur de ce domaine, le système (2-5) sera incompatible et n'aura pas de solution.

D'autre part, il est important de noter que, contrairement aux systèmes d'équations linéaires, une seule des équations (2-5) est insuffisante pour déduire la valeur de q d'une manière unique. En effet, la première implique $q = \pm \text{Arccos}(p_1/a)$ et la seconde $q = \text{Arcsin}(p_2/a)$ ou $\pi - \text{Arcsin}(p_2/a)$. La solution doit vérifier à la fois les deux équations et la bonne valeur de q s'obtient à l'aide de la fonction $\text{atan2} : \mathbb{R}^2 \rightarrow [-\pi, +\pi]$ définie comme suit :

$$q = \text{atan2}(p_2, p_1) \\ = \begin{cases} \text{tg}^{-1}(p_2 / p_1) & \text{si } p_1 \geq 0, \\ \text{tg}^{-1}(p_2 / p_1) + \pi & \text{si } p_1 < 0 \text{ et } p_2 \geq 0, \\ \text{tg}^{-1}(p_2 / p_1) - \pi & \text{si } p_1 < 0 \text{ et } p_2 < 0. \end{cases} \quad (2-6)$$

Remarque 2. Contrairement aux systèmes d'équations linéaires, la solution d'un système non linéaire dont le nombre d'équations (indépendantes et compatibles) est supérieur ou égal au nombre des inconnues n'est pas nécessairement unique.

Exemple 2-2

Considérons le robot plan à 3 articulations rotatives représenté sur la figure 2-2 en traits pleins. Supposons qu'on désire placer l'outil au point P de coordonnées p_1^d et p_2^d par rapport au repère inertiel $\{\bar{x}, \bar{y}\}$ avec une inclinaison α par rapport à l'horizontale. Ceci se traduit par les 4 équations à 3 inconnues suivantes :

$$\begin{aligned} p_1(q_1, q_2, q_3) &= p_1^d, \\ p_2(q_1, q_2, q_3) &= p_2^d, \\ R_{13}(q_1, q_2, q_3) &= \cos \alpha, \\ R_{23}(q_1, q_2, q_3) &= \sin \alpha. \end{aligned} \quad (2-7)$$

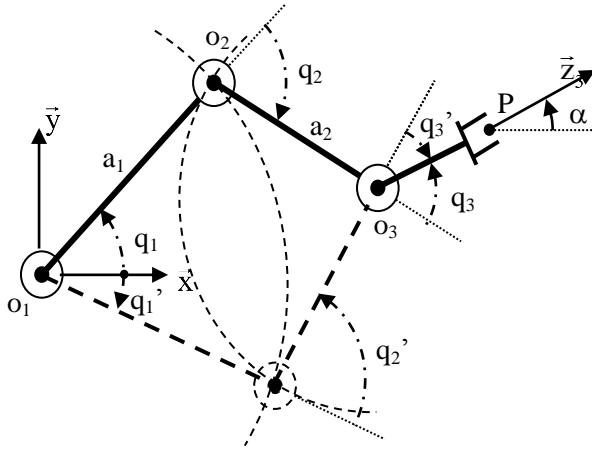


Fig. 2-2 Robot plan à 3 articulations rotatives

Ces équations sont indépendantes car aucun des paramètres p_1 , p_2 , R_{13} , R_{23} ne peut être déduit des autres. Elles seraient en plus compatibles si le point P et l'inclinaison α désirés sont accessibles par le robot. Cependant on a deux solutions au lieu d'une comme on peut le constater géométriquement sur la figure 2-2 : O_1 est fixe et O_3 est fixé par P et α d'où O_2 doit être à l'intersection du cercle de centre O_1 et de rayon a_1 avec le cercle de centre O_3 et de rayon a_2 . Ceci conduit à deux positions pour O_2 et par conséquent à deux solutions :

$$\vec{q} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T \quad \text{et} \quad \vec{q}' = [q_1' \quad q_2' \quad q_3']^T.$$

Remarque 3. Comme pour les systèmes linéaires, il existe une infinité de solutions quand le nombre n des inconnues est supérieur au nombre m des équations indépendantes et on dit dans ce cas que le robot est *cinématiquement redondant*. Grâce à cette redondance, il est souvent possible de choisir une solution qui permet d'éviter les obstacles se trouvant dans le domaine de travail du robot.

Exemple 2-3

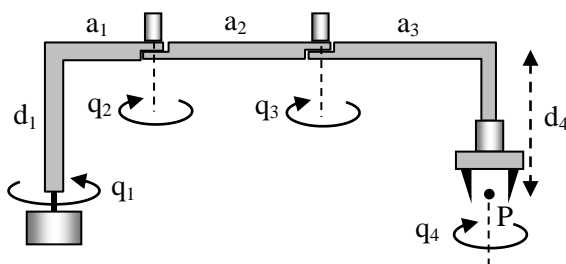


Fig. 2-3 Robot à 4 articulations rotatives verticales.

Considérons le robot à 4 articulations rotatives verticales de la figure 2-3. L'orientation de l'outil se définit par la rotation q_4 de la 4^{ème} articulation et la position de son sommet P par deux paramètres p_1 et p_2 car il appartient à un plan horizontal fixe.

Supposons qu'on désire placer l'outil, tourné de α , en un point $P = (p_1^d, p_2^d)$ de ce plan. On a $q_4 = \alpha$ et il reste à déterminer les 3 inconnues q_1 , q_2 et q_3 à partir des deux équations :

$$p_1(q_1, q_2, q_3) = p_1^d \quad \text{et} \quad p_2(q_1, q_2, q_3) = p_2^d.$$

Comme le nombre d'inconnues est supérieur au nombre des équations, il existe une infinité de solutions comme le montre géométriquement la figure 2-4a par une projection du robot sur le plan horizontal. D'autre part, la figure 2-4b montre comment cette redondance peut servir pour éviter les obstacles.

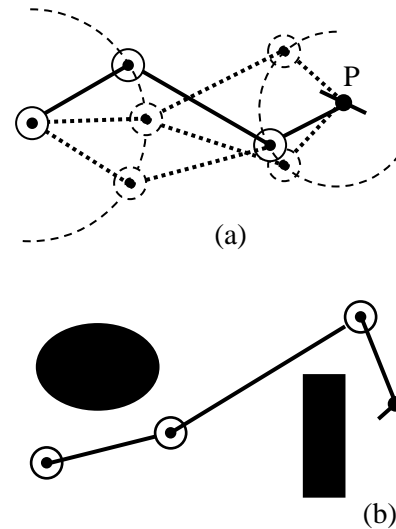


Fig. 2-4 Projection horizontale du robot de la figure 3-3. (a) Détermination graphique de plusieurs solutions possibles, (b) Solution qui évite les obstacles.

Vecteur de configuration de l'outil. Comme pour tout solide dans l'espace, 6 paramètres suffisent pour définir la position et l'orientation du repère V_n de l'outil par rapport au repère V_0 du support. En se référant à la figure 2-5a, nous pouvons choisir ces paramètres comme suit :

- 3 paramètres, p_1, p_2, p_3 , pour définir la position de l'origine P de V_n .
- 2 paramètres pour définir le vecteur d'approche unitaire \bar{z}_n , par exemple l'angle d'azimut φ_n et l'angle de latitude α_n .
- 1 paramètre $q_n = \theta_n$ pour définir la rotation de repère V_n autour de \bar{z}_n (le roulis de l'outil).

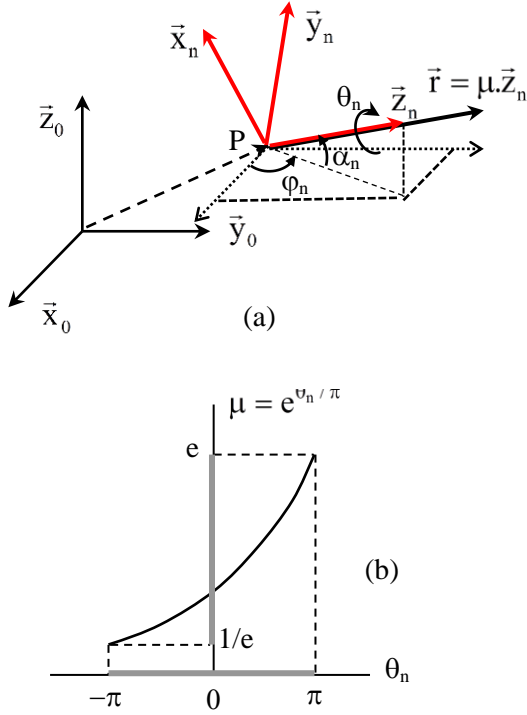


Fig. 2-5 Paramètres du repère V_n de l'outil. (a) Le repère V_n , (b) μ en fonction de θ_n .

Cependant, il est commode de remplacer le couple (\bar{z}_n, θ_n) par un seul vecteur \bar{r} qui a le même sens que \bar{z}_n mais dont le module, $\mu = \|\bar{r}\|$, est fonction de θ_n . Généralement cette fonction est choisie telle que $d\mu/\mu = d\theta_n/\pi$ c.à.d. la variation relative de μ est égale à la variation de θ_n relativement à π . D'où

$$\mu(\theta_n) = \exp\left(\frac{\theta_n}{\pi}\right). \quad (2-8)$$

Quand θ_n varie de $-\pi$ à π , μ croît de $1/e$ jusqu'à e (fig. 2-5b) avec

$$\begin{cases} \mu < 1 & \text{si } \theta_n < 0, \\ \mu = 1 & \text{si } \theta_n = 0, \\ \mu > 1 & \text{si } \theta_n > 0. \end{cases}$$

Inversement, à tout vecteur \bar{r} correspond un couple (\bar{z}_n, θ_n) et un seul obtenu par les relations :

$$\bar{z}_n = \frac{\bar{r}}{\|\bar{r}\|} \quad \text{et} \quad \theta_n = \pi \cdot \text{Ln}(\|\bar{r}\|). \quad (2-9)$$

\bar{r} est appelé vecteur *d'approche-rotation* de l'outil ou simplement vecteur *d'approche*.

Ainsi, la position et l'orientation de l'outil peuvent se caractériser par le vecteur à 6 composantes :

$$\begin{aligned} \bar{w}^T &= [\bar{p}^T \quad \bar{r}^T] \\ &= [w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4 \quad w_5 \quad w_6] \end{aligned} \quad (2-10)$$

appelé *vecteur de configuration* de l'outil. Les trois premières composantes de ce vecteur sont les coordonnées p_1, p_2 et p_3 de l'origine P du repère V_n et les trois dernières les composantes r_1, r_2 et r_3 du vecteur d'approche \bar{r} . À noter qu'une composante de \bar{w} peut être constante, libre ou dépendante des autres composantes.

Exemple 2-4

Les articulations 1 et 3 du robot de la figure 2-6 sont rotatives, la deuxième est prismatique. Le sommet P de l'outil et son vecteur d'approche appartiennent à un plan horizontal d'altitude h .

- 1) La position de P se définit par le vecteur à 2 paramètres variables $\bar{p} = [p_1 \quad p_2 \quad h]^T$.
- 2) Le vecteur d'approche unitaire \bar{z}_n , étant parallèle à la projection horizontale de \bar{p} , le vecteur d'approche-rotation est donné par

$$\bar{r} = \mu \bar{z}_n = \begin{bmatrix} \frac{\mu p_1}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}} & \frac{\mu p_2}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{avec} \quad \mu = \exp\left(\frac{\theta_3}{\pi}\right) \text{ et } \theta_3 = \text{angle}(\bar{x}_2, \bar{x}_3).$$

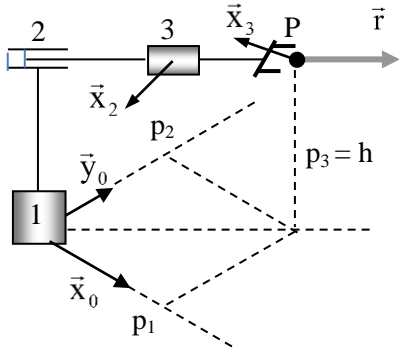


Fig. 2-6 Vecteur de configuration à $p_3 = h$

Le vecteur de configuration de l'outil est donc de la forme :

$$\bar{w} = [w_1 \quad w_2 \quad h \quad \beta w_1 \quad \beta w_2 \quad 0].$$

Il a 3 paramètres variables w_1 , w_2 et β liés à la position (p_1 , p_2) de l'outil et sa rotation θ_3 par les relations :

$$p_1 = w_1, \quad p_2 = w_2,$$

$$\mu^2 = \beta^2 (w_1^2 + w_2^2) \Rightarrow \theta_3 = \frac{\pi}{2} \text{Ln} [\beta^2 (w_1^2 + w_2^2)].$$

EXERCICE 2-1

Montrer que le vecteur de configuration d'un robot Scara (exercice 1-12) a 4 paramètres variables et les deux autres sont nuls.

Soit

$$T(\bar{q}) = \begin{pmatrix} \bar{z}_n(\bar{q}) & \bar{p}(\bar{q}) \\ R_{11}(\bar{q}) & R_{12}(\bar{q}) & R_{13}(\bar{q}) & p_1(\bar{q}) \\ R_{21}(\bar{q}) & R_{22}(\bar{q}) & R_{23}(\bar{q}) & p_2(\bar{q}) \\ R_{31}(\bar{q}) & R_{32}(\bar{q}) & R_{33}(\bar{q}) & p_3(\bar{q}) \\ 0 & 0 & \text{X} & \text{X} \end{pmatrix}$$

la matrice de transformation du repère V_n de l'outil au repère V_0 du support. En supprimant la dernière ligne, la quatrième colonne de cette matrice est le vecteur position $\bar{p}(\bar{q})$ et sa troisième colonne multipliée par μ est le vecteur d'approche $\bar{r}(\bar{q}) = \mu \bar{z}_n$. La cinématique inverse se ramène à la résolution de l'équation vectorielle :

$$\begin{bmatrix} \bar{p}(\bar{q}) \\ \bar{r}(\bar{q}) \end{bmatrix} = \bar{w}, \quad (2-11)$$

$\bar{w} = [w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4 \quad w_5 \quad w_6]^T$ étant un vecteur de configuration donné. Il s'agit donc de déterminer les n inconnues q_1, \dots, q_n à partir des 6 équations non linéaires

$$p_1(q_1, \dots, q_n) = w_1, \quad \mu R_{13}(q_1, \dots, q_n) = w_4,$$

$$p_2(q_1, \dots, q_n) = w_2, \quad \mu R_{23}(q_1, \dots, q_n) = w_5,$$

$$p_3(q_1, \dots, q_n) = w_3, \quad \mu R_{33}(q_1, \dots, q_n) = w_6.$$

(2-12)

2-2 RÉOLUTION ANALYTIQUE

Bien qu'il n'existe pas une méthode générale, il est toujours possible d'aboutir à une solution analytique pour ces équations en s'inspirant des techniques que nous allons employer pour le robot Rhino.

Cinématique inverse d'un robot Rhino. La figure 2-7 montre une configuration quelconque du robot Rhino de l'exercice 1-13. Tous les membres de ce robot sont situés dans un même plan vertical pouvant tourner autour de l'axe du support.

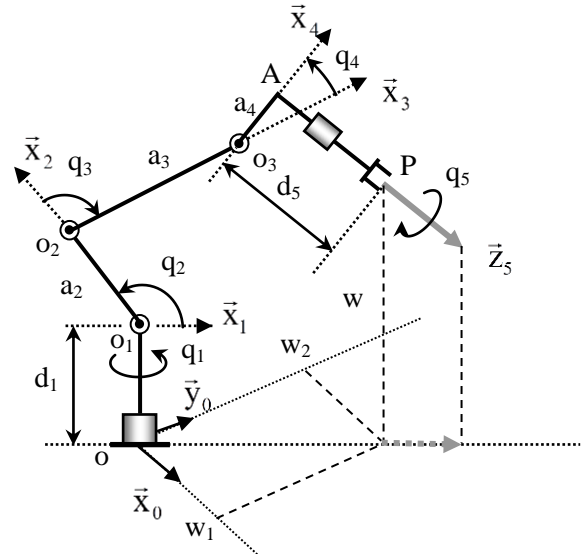


Fig 2--7 Robot Rhino

Dans l'exercice 1-13, il est demandé de représenter le diagramme du robot Rhino selon la convention de Denavit-Hartenburg et de calculer par multiplication des transformations T_{k-1}^k entre les repères successifs la transformation T_0^5 du repère V_5 de l'outil au repère V_0 du support. Le résultat est le suivant :

$$T_0^5 = \begin{pmatrix} R & \vec{p} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec

$$R = \begin{pmatrix} C_1 C_{234} C_5 + S_1 S_5 & -C_1 C_{234} S_5 + S_1 C_5 & -C_1 S_{234} \\ S_1 C_{234} C_5 - C_1 S_5 & -S_1 C_{234} S_5 - C_1 C_5 & -S_1 S_{234} \\ -S_{234} C_5 & S_{234} S_5 & -C_{234} \end{pmatrix}$$

et

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} C_1(a_2 C_2 + a_3 C_{23} + a_4 C_{234} - d_5 S_{234}) \\ S_1(a_2 C_2 + a_3 C_{23} + a_4 C_{234} - d_5 S_{234}) \\ d_1 - a_2 S_2 - a_3 S_{23} - a_4 S_{234} - d_5 C_{234} \end{pmatrix}.$$

Les équations (2-11) de ce robot sont donc :

$$C_1(a_2 C_2 + a_3 C_{23} + a_4 C_{234} - d_5 S_{234}) = w_1 \quad (1)$$

$$S_1(a_2 C_2 + a_3 C_{23} + a_4 C_{234} - d_5 S_{234}) = w_2 \quad (2)$$

$$d_1 - a_2 S_2 - a_3 S_{23} - a_4 S_{234} - d_5 C_{234} = w_3 \quad (3)$$

$$-\mu C_1 S_{234} = w_4 \quad (4)$$

$$-\mu S_1 S_{234} = w_5 \quad (5)$$

$$-\mu C_{234} = w_6 \quad (6)$$

Pour donner une interprétation géométrique de ces équations, notons que le sens des vecteurs \vec{x}_i représentés sur la figure 2-7 est obtenu en supposant que les vecteurs \vec{z}_i des articulations horizontales sont dirigés vers l'arrière du plan de la figure d'où la rotation de ces articulations est positive dans le sens horaire. Rappelons d'autre part que $C_{23\dots} = \cos(q_2 + q_3 + \dots)$ et $S_{23\dots} = \sin(q_2 + q_3 + \dots)$ et que l'angle de \vec{x}_1 à \vec{x}_k est $q_2 + q_3 + \dots + q_k$. Par conséquent, la projection sur le plan horizontal du vecteur \vec{oP} est

$$v = a_2 C_2 + a_3 C_{23} + a_4 C_{234} - d_5 S_{234} \quad (2-13)$$

L'expression (3) de $p_3(\vec{q})$ est la projection verticale de ce vecteur \vec{oP} . Sachant que l'angle entre \vec{x}_0 et le plan du robot est q_1 , on a $p_1(\vec{q}) = C_1 v$, $p_2(\vec{q}) = S_1 v$ d'où les équations (1), (2) et (3). D'autre part, le vecteur d'approche $\vec{r} = \mu \vec{z}_5$ faisant un angle $+\pi/2$ avec \vec{x}_4 dont l'inclinaison par rapport à \vec{x}_1 est

$$\varphi = q_2 + q_3 + q_4, \quad (2-14)$$

la projection horizontale de \vec{r} est $\mu \cos(\varphi + \pi/2) = -\mu \sin \varphi$ et, comme l'angle de \vec{z}_0 à \vec{x}_1 est $+\pi/2$, la projection de \vec{r} sur \vec{z}_0 est $\mu \cos(\pi/2 + \varphi + \pi/2) = -\mu \cos \varphi$. D'où, tenant compte de la rotation q_1 du plan du robot, on obtient les équations (4), (5) et (6).

Résolution

Il s'agit maintenant de déterminer les variables d'articulation q_1, \dots, q_5 qui produisent la configuration désirée (w_1, \dots, w_6) de l'outil en résolvant les équations (1) à (6).

a) Le roulis q_5 de l'outil est le plus simple à obtenir. En effet, $q_5 = \theta_5 = \pi \text{Ln}(\mu)$ et d'après (4), (5) et (6), $\mu^2 = w_4^2 + w_5^2 + w_6^2$. D'où

$$\boxed{q_5 = \pi \text{Ln} \sqrt{w_4^2 + w_5^2 + w_6^2}} \quad (2-15)$$

b) Tenant compte de (2-13), on déduit des équations (1) et (2) que la rotation de l'articulation du support est

$$\boxed{q_1 = \begin{cases} \text{atan2}(w_2, w_1) & \text{si } v > 0, \\ \text{atan2}(w_2, w_1) - \pi & \text{si } v < 0, \\ \text{indéterminé} & \text{si } v = 0. \end{cases}} \quad (2-16)$$

Interprétation. Si la position désirée du sommet P de l'outil n'est pas sur la verticale passant par o_1 ($v \neq 0$), on a le choix entre deux valeurs pour q_1 :

- celle qui place \vec{x}_1 dans le sens de la projection v de $\vec{o_1P}$ sur le plan horizontal ou
- celle qui le place dans le sens opposé ($v < 0$).

C'est le premier choix ($v > 0$) qui sera adoptée par la suite.

Si la position désirée de P est sur la verticale passant par o_1 ($v = w_1 = w_2 = 0$), le choix de la valeur de q_1 est arbitraire puisque toute rotation autour d'un axe ne modifie pas la position des points de cet axe.

c) Il reste à déterminer q_2 , q_3 et q_4 . Mais, d'après (2-14),

$$q_4 = \varphi - q_2 - q_3, \quad (2-17)$$

ce qui revient à calculer φ , q_2 et q_3 .

d) En multipliant (4) par C_1 , (5) par S_1 et en additionnant on obtient :

$$\mu S_{234} = -C_1 w_4 - S_1 w_5.$$

Tenant compte de (6) ($\mu C_{234} = -w_6$) et sachant que $\mu > 0$, on déduit que

$$\begin{aligned} \varphi &= q_2 + q_3 + q_4 \\ &= \text{atan2}(-C_1 w_4 - S_1 w_5, -w_6) \end{aligned} \quad (2-18)$$

e) L'angle q_3 est le supplément de l'angle au sommet o_2 du triangle $o_1 o_2 o_3$. D'où

$$\overline{o_1 o_3}^2 = a_2^2 + a_3^2 + 2a_2 a_3 C_3. \quad (2-19)$$

Posons

$$\begin{aligned} b_1 &= a_2 C_2 + a_3 C_{23}, \\ b_2 &= -a_2 S_2 - a_3 S_{23}, \end{aligned} \quad (2-20)$$

les composantes horizontale et verticale du vecteur $\overrightarrow{o_1 o_3}$. b_1 apparaît dans les équations (1) et (2) du robot et b_2 dans l'équation (3). De (3) on tire :

$$\underline{b_2 = w_3 + d_5 C_{234} + a_4 S_{234} - d_1} \quad (2-21)$$

et, en multipliant (1) par C_1 , (2) par S_1 et en additionnant, on déduit que

$$\underline{b_1 = C_1 w_1 + S_1 w_2 + d_5 S_{234} - a_4 C_{234}}. \quad (2-22)$$

Les seconds membres de (2-21) et (2-22) se calculent à partir de (2-16) et (2-18). Comme $\overline{o_1 o_3}^2 = b_1^2 + b_2^2$, on tire de (2-19)

$$q_3 = \pm \text{Arccos} \left[\frac{(b_1^2 + b_2^2) - (a_2^2 + a_3^2)}{2a_2 a_3} \right]. \quad (2-23)$$

Pour placer o_3 à la position définie par b_1 et b_2 , on a deux solutions opposées pour l'angle q_3 ; la solution positive correspond à un coude haut et la solution négative à un coude bas comme le montre la figure 2-8. On choisit la solution qui évite le mieux les obstacles avoisinant.

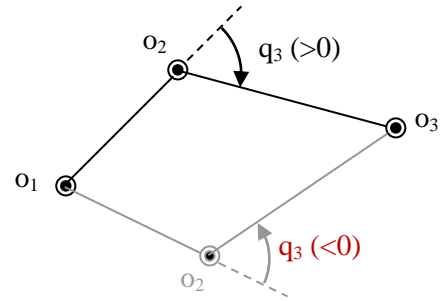


Fig. 2-8 Les deux solutions de q_3 .

f) le seul inconnu qui subsiste est l'angle q_2 . Pour le déterminer, commençons par le séparer de q_3 dans les définitions (2-20) de b_1 et b_2 :

$$\begin{aligned} b_1 &= a_2 C_2 + a_3 (C_2 C_3 - S_2 S_3) \\ &= (a_2 + a_3 C_3) C_2 - (a_3 S_3) S_2, \\ b_2 &= -a_2 S_2 - a_3 (S_2 C_3 + S_3 C_2) \\ &= -(a_3 S_3) C_2 - (a_2 + a_3 C_3) S_2. \end{aligned}$$

En résolvant ces équations en C_2 et S_2 , on obtient :

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{b_1 (a_2 + a_3 C_3) - b_2 a_3 S_3}{(a_2 + a_3 C_3)^2 + (a_3 S_3)^2}, \\ S_2 &= -\frac{b_2 (a_2 + a_3 C_3) + b_1 a_3 S_3}{(a_2 + a_3 C_3)^2 + (a_3 S_3)^2}. \end{aligned}$$

Donc

$$q_2 = \text{atan2}[A, B] \quad (2-24)$$

avec

$$A = -b_2(a_2 + a_3 C_3) - b_1 a_3 S_3,$$

$$B = b_1(a_2 + a_3 C_3) - b_2 a_3 S_3.$$

Interprétation. Sur la figure 2-9, on voit que q_2 est négatif et vaut $-\gamma - \beta$ avec

$$\text{tg} \gamma = \frac{b_2}{b_1} \quad \text{et} \quad \text{tg} \beta = \frac{a_3 S_3}{a_2 + a_3 C_3}.$$

$$\text{tg} q_2 = \text{tg}(-\gamma - \beta) = -\frac{\text{tg} \gamma + \text{tg} \beta}{1 - \text{tg} \gamma \text{tg} \beta}.$$

En remplaçant $\text{tg} \gamma$ et $\text{tg} \beta$ par leurs expressions et en simplifiant, on retrouve (2-24).

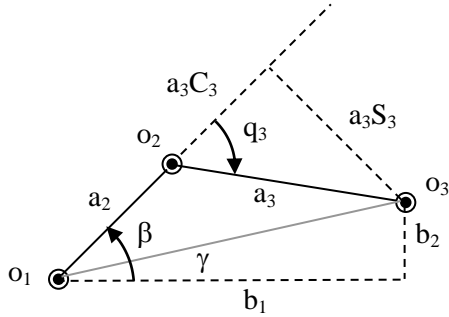
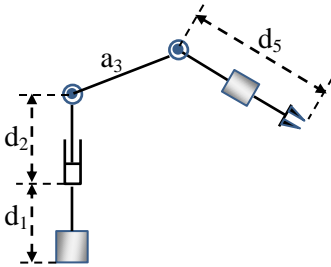


Fig. 2-9 Interprétation de (3-19)

EXERCICE 2-2

Écrire les équations donnant la configuration de l'outil en fonction des variables d'articulation du robot suivant puis résoudre sa cinématique inverse.



Programme. Les équations de la cinématique inverse d'un robot Rhino sont groupées dans le M-file suivant dénommé « invrhino ».

```
function q = invrhino(rb,w)
```

```
% INVRHINO détermine la cinématique inverse
d'un robot Rhino.
```

```
% rb contient les paramètres du robot défini à l'aide
de la fonction ROB (voir chapitre 1).
```

```
% Une ligne de w est le vecteur de configuration
[p, r] en un instant t.
```

```
% Une ligne de la sortie q est le vecteur
d'articulation en un instant t.
```

```
% paramètres constants du robot
```

```
pf = rb{2}; a = rb{3}; ag = rb{4};
```

```
m = length(w(:,1)); % nombre des instants
```

```
% Calcul des déplacements
```

```
for i = 1 : m
```

```
    % Roulis
```

```
    q(i,5) = pi*log(sqrt(w(i,4)^2 + w(i,5)^2 + ...
        w(i,6)^2));
```

```
    % Rotation du support
```

```
    if (w(i,1)~=0 | w(i,2)~=0)
```

```
        q(i,1) = atan2(w(i,2),w(i,1));
```

```
    elseif i == 1
```

```
        q(i,1) = 0;
```

```
    else
```

```
        q(i,1) = q(i-1,1);
```

```
    end
```

```
    % Inclinaison de l'outil
```

```
    C1 = cos(q(i,1)); S1 = sin(q(i,1));
```

```
    phi = atan2(-C1*w(i,4) - S1*w(i,5), -w(i,6));
```

```
    % Composantes de o1o3
```

```
    b1 = C1*w(i,1) + S1*w(i,2) + ...
```

```
        pf(5)*sin(phi) - a(4)*cos(phi);
```

```
    b2 = w(i,3) + pf(5)*cos(phi) + ...
```

```
        a(4)*sin(phi) - pf(1);
```

```
    % Rotation du coude (position haute)
```

```
    c1 = (b1^2 + b2^2 - a(2)^2 - a(3)^2);
```

```
    c2 = (2*a(2)*a(3));
```

```
    if abs(c1/c2) <= 1
```

```
        q(i,3) = acos(c1/c2);
```

```
    else
```

```
        error('incompatibilité')
```

```
    end
```

```
    % Rotation de l'épaule
```



```

C3 = cos(q(i,3)); S3 = sin(q(i,3));
A = -b2*(a(2)+a(3)*C3)-b1*a(3)*S3;
B = b1*(a(2)+a(3)*C3)-b2*a(3)*S3
q(i,2) = atan2(A,B);

% Rotation du poignet
q(i,4) = phi - q(i,2) - q(i,3);

end

```

Exemple d'application. À l'aide d'un robot Rhino, on désire transporter une pièce prismatique d'un point de la table qui supporte le robot pour la placer en un autre point (fig. 2-10). Dans sa position initiale, la pièce présente une face supérieure inclinée de 45° par rapport à la table. Durant le transport, la pièce sera tournée de -90° pour la placer sur l'une de ses faces trapézoïdales.

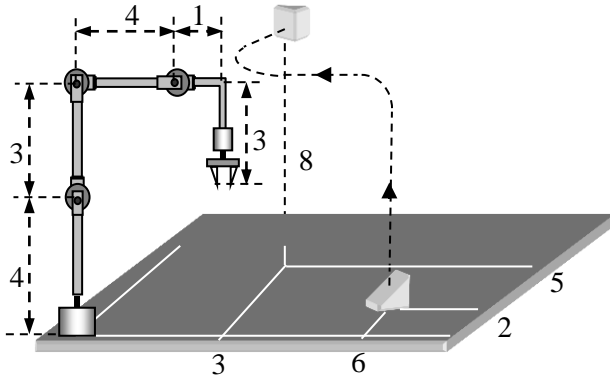


Fig. 2-10 Déplacement d'une pièce par un robot Rhino.

Pour bien tenir la pièce dans sa position initiale, l'axe d'approche z_5 de l'outil doit être perpendiculaire à la face supérieure et son axe normal x_5 (de braquage) doit être parallèle aux grands côtés de cette face (fig. 2-11).

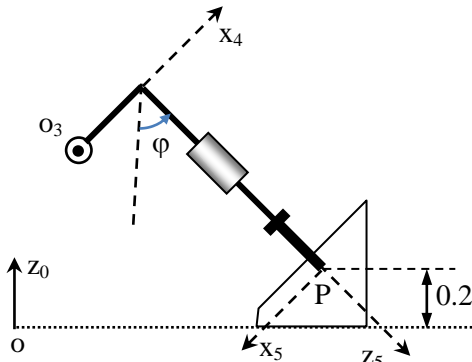


Fig. 2-11 Serrage de la pièce prismatique.

Comme pour ce robot l'axe z_5 et le vecteur \vec{oP} sont situés dans un même plan vertical passant par z_0 , la pièce doit être orientée de sorte que son plan de symétrie vertical passe par z_0 . D'autre part, les projections sur le plan horizontal du vecteur \vec{oP} et du vecteur d'approche $\vec{r} = \mu \vec{z}_5$ étant alignées, on a :

$$[w_4 \ w_5] = \beta [w_1 \ w_2] \quad (2-25)$$

où β est le rapport algébrique de ces projections, c'est-à-dire

$$\beta = \frac{-\mu \sin \varphi}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2}}, \quad (2-26)$$

φ étant l'angle de \vec{x}_1 à \vec{x}_4 ou de la verticale descendante à \vec{r} (fig. 2-11). Cette figure montre aussi que (sens positif = sens horaire)

$$w_6 = -\mu \cos \varphi. \quad (2-27)$$

Par conséquent, le vecteur de configuration d'un robot Rhino est de la forme :

$$\vec{w} = (w_1 \ w_2 \ w_3 \ \beta w_1 \ \beta w_2 \ -\mu \cos \varphi).$$

Ce vecteur varie en fonction du temps de la position initiale à la position finale.

1) Configuration initiale. Elle est celle de la figure 2-11 où la position de l'origine P du repère de l'outil est $\vec{p} = [6 \ 2 \ 0.2]$, l'angle que fait le vecteur d'approche \vec{r} avec la verticale est $\varphi = -\pi/4$ et l'angle entre x_4 et x_5 est $q_5 = \theta = \pi$. De la définition de μ et des équations (2-26) et (2-27), on a :

$$\mu(0) = \exp\left(\frac{\pi}{\pi}\right) = e,$$

$$\beta(0) = \frac{-e \sin(-\pi/4)}{\sqrt{36+4}} = \frac{e\sqrt{5}}{20},$$

$$w_6(0) = -e \cos(-\pi/4) = -\frac{e\sqrt{2}}{2},$$

d'où

$$\bar{w}(0) = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0.2 & 0.3e\sqrt{5} & 0.1e\sqrt{5} & -0.5e\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (2-28)$$

2) Configuration finale. Supposons que la position finale de l'origine P du repère de l'outil est $\bar{p} = [3 \ 5 \ 8.2]$ (fig. 2-10). Comme dans cette position le vecteur d'approche doit être horizontal et qu'on doit tourner la pièce de -90° durant le mouvement, les valeurs finales de φ et de la rotation θ de l'outil sont respectivement $-\pi/2$ et $\pi/2$. Si la durée désirée de ce transport est $t_f = 20$ secondes, on a :

$$\begin{aligned} \mu(t_f) &= \exp\left(\frac{\pi/2}{\pi}\right) = \sqrt{e}, \\ \beta(t_f) &= \frac{-\sqrt{e} \cdot \sin(-\pi/2)}{\sqrt{9+25}} = \sqrt{e/34}, \\ w_6(t_f) &= -\sqrt{e} \cos(-\pi/2) = 0, \end{aligned}$$

d'où

$$\bar{w}(t_f) = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 8.2 & 3\sqrt{e/34} & 5\sqrt{e/34} & 0 \end{bmatrix}. \quad (2-29)$$

2) Configurations le long de la trajectoire. La trajectoire représentée sur la figure 2-10, constituée de 3 segments et de deux quarts de cercle C_1 et C_2 de rayon $R = 1$, a une longueur totale

$$\begin{aligned} L &= (7.2 - 0.2) + \pi/2 + (5 - 4) + \pi/2 + (5 - 3) \\ &= 10 + \pi. \end{aligned}$$

Ce trajet doit être parcouru en $t_f = 20$ secondes selon le profil de vitesse représenté sur la figure 2-12.

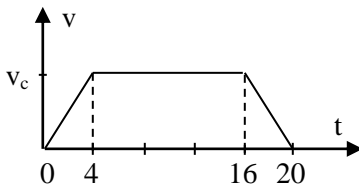


Fig. 2-12 Profil de vitesse

Durant les 4 premières secondes l'outil accélère puis se déplace avec une vitesse constante v_c puis

décélère durant les 4 dernières secondes pour s'arrêter à l'instant final t_f . Comme la longueur L est égale à l'intégrale de la vitesse, c'est-à-dire à la surface sous le profil, on a $L = 16v_c$, d'où

$$v_c = \frac{10 + \pi}{16}. \quad (2-30)$$

Le trajet parcouru durant l'accélération ou la décélération est $2v_c = (10 + \pi)/8 < 2$. Par conséquent l'accélération se termine avant l'arrivée au premier quart de cercle C_1 et la décélération commence après la sortie du second quart de cercle C_2 . Soient $[t_1, t_2]$ et $[t_3, t_4]$ les intervalles de temps où l'outil parcourt respectivement C_1 et C_2 . On a :

$$\begin{aligned} t_1 &= 4 + \frac{7 - 2v_c}{v_c} = 2 + \frac{7}{v_c}, & t_2 &= t_1 + \frac{\pi}{2v_c}, \\ t_3 &= t_2 + \frac{1}{v_c}, & t_4 &= t_3 + \frac{\pi}{2v_c}. \end{aligned} \quad (2-31)$$

Durant les intervalles $[0, 4]$, $[4, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $[t_2, t_3]$, $[t_3, t_4]$ et $[t_4, t_f]$, le mouvement de l'extrémité $\bar{p}(t) = [w_1 \ w_2 \ w_3]$ de l'outil est donné respectivement par :

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[6, \ 2, \ (v_c/8)t^2 + 0.2 \right] \\ & \left[6, \ 2, \ v_c(t-4) + 2v_c + 0.2 \right] \\ & \left[5 + \cos[v_c(t-t_1)], \ 2, \ 7.2 + \sin[v_c(t-t_1)] \right] \\ & \left[-v_c(t-t_2) + 5, \ 2, \ 8.2 \right] \\ & \left[4 - \sin[v_c(t-t_3)], \ 3 - \cos[v_c(t-t_3)], \ 8.2 \right] \\ & \left[3, \ 3 + v_c(t-t_4), \ 8.2 \right] \\ & \left[3, \ -(v_c/8)(t-16)^2 + v_c(t-16) + (5 - 2v_c), \ 8.2 \right] \end{aligned} \right. \quad (2-32)$$

C'est une succession de mouvements rectilignes uniformes ou rectilignes uniformément accélérés ou circulaires uniformes. Le lecteur peut facilement déduire les expressions (2-32) en se référant aux figures 2-10 et 2-12.

Pour compléter la définition du vecteur de configuration en tout instant t du mouvement de l'outil, il reste à définir le vecteur d'approche $\bar{r}(t)$.

Nous savons que l'inclinaison φ de ce vecteur par rapport à la verticale doit passer de $-\pi/4$ à $-\pi/2$ et que la rotation $q_5 = \theta$ doit passer de π à $\pi/2$.

Pour éviter les obstacles qui peuvent exister dans le voisinage du point de départ ou d'arrivée, il est généralement souhaitable que le changement d'orientation de l'objet transporté se déroule loin de ces deux points. Dans ce but, nous allons maintenir φ et θ constants durant l'accélération et la décélération, c'est-à-dire dans les intervalles $[0, 4]$ et $[16, 20]$, et modifier linéairement leurs valeurs durant l'intervalle $[4, 16]$ comme le montre la figure 2-13.

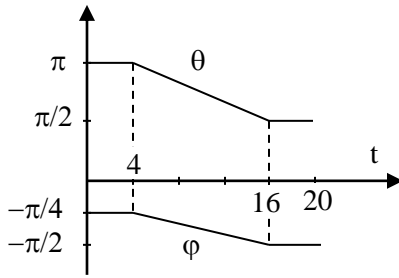


Fig. 2-13 Variation de θ et φ .

De cette figure on déduit que

$$\theta(t) = \begin{cases} \pi & \text{si } 0 \leq t < 4, \\ \pi - \frac{\pi}{24}(t-4) & \text{si } 4 \leq t < 16, \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } 16 \leq t < 20. \end{cases} \quad (2-33)$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} & \text{si } 0 \leq t < 4, \\ -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{48}(t-4) & \text{si } 4 \leq t < 16, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } 16 \leq t < 20. \end{cases}$$

Il suffit maintenant d'appliquer les relations (2-25), (2-26) et (2-27) tenant compte des composantes $w_1(t)$ et $w_2(t)$ de $\vec{p}(t)$ données en (2-32) pour déduire les composantes $w_4(t)$, $w_5(t)$ et $w_6(t)$ du vecteur d'approche $\vec{r}(t)$.

4) Simulation. Définissons sur la fenêtre de commande le vecteur de configuration $\vec{w}(t) = [\vec{p}(t) \quad \vec{r}(t)]$.

- Vitesse de croisière v_c (eq. 2-30) et instants des mouvements successifs (eq. 2-31).

```
>> t = 0 : 0.1 : 20;
>> v = (10 + pi)/16;
>> t1 = 2 + 7/v; t2 = t1 + pi/(2*v);
>> t3 = t2 + 1/v; t4 = t3 + pi/(2*v);
```

- Vecteur de position $\vec{p}(t)$ (eq. 2-32) :

```
>> for i = 1 : length(t)
    ti = t(i);
    if ti < 4
        p(i,:) = [6, 2, (v/8)*ti^2+0.2];
    elseif (4 <= ti) & (ti < t1)
        p(i,:) = [6, 2, v*(ti-2)+0.2];
    elseif (t1 <= ti) & (ti < t2)
        p(i,:) = [5+cos(v*(ti-t1)), 2, ...
                  7.2+sin(v*(ti-t1))];
    elseif (t2 <= ti) & (ti < t3)
        p(i,:) = [-v*(ti-t2)+5, 2, 8.2];
    elseif (t3 <= ti) & (ti < t4)
        p(i,:) = [4-sin(v*(ti-t3)), 3-cos(v*(ti-t3)), 8.2];
    elseif (t4 <= ti) & (ti < 16)
        p(i,:) = [3, 3+v*(ti-t4), 8.2];
    elseif (16 <= ti) & (ti <= 20)
        p(i,:) = [3, -(v/8)*(ti-16)^2+v*(ti-18)+5, 8.2];
    end
end
```

- Angles $\theta(t)$ et $\varphi(t)$ (eq. 2-33)

```
>> for i = 1 : length(t)
    ti = t(i);
    if ti < 4
        qg(i) = pi; fi(i) = -pi/4;
    elseif (4 <= ti) & (ti < 16)
        qg(i) = pi-(pi/24)*(ti-4);
        fi(i) = -(pi/4)-(pi/48)*(ti-4);
    elseif (16 <= ti) & (ti <= 20)
        qg(i) = pi/2; fi(i) = -pi/2;
    end
end
```

- Vecteur $\vec{r}(t)$ (eq. 2-25, 2-26 et 2-27)

```
>> mu = exp(qg/pi);
>> bet = -mu'.*sin(fi')./sqrt(p(:,1).^2 + p(:,2).^2);
>> r = [bet.*p(:,1) bet.*p(:,2) -mu'.*cos(fi')];
```

- Vecteur de configuration

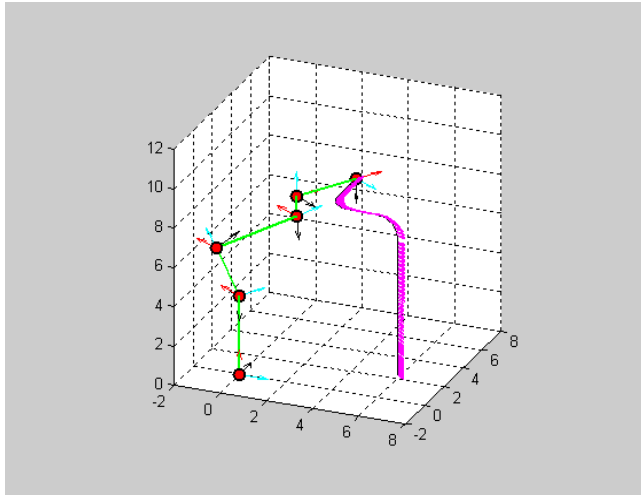
```
>> w = [p r];
```

Chargeons maintenant la fenêtre de commande par les paramètres du robot Rhino, effectuons la cinématique inverse et simulons le mouvement :

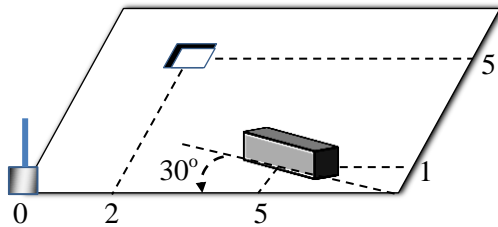
```
>> load Rhino;
>> q = invrhino(Rhino,w);
>> simrob(Rhino,q)
```

Introduire [xmin xmax ymin ymax zmin zmax] : ...
[-2 8 -2 8 0 12]

On obtient à la fin de la simulation la figure ci-dessous.



EXERCICE 2-3



Une pièce de section carrée 0.5x0.5 et de longueur 2 se trouve sur la table supportant le robot de l'exercice 2-1 à la position et l'orientation indiquées sur la figure. Le robot doit introduire cette pièce

dans un trou percé dans la table ayant les mêmes dimensions que la section de la pièce et dont le centre est en (2, 5).

Choisir les valeurs des paramètres du robot, définir une trajectoire convenable de la configuration de l'outil et simuler son mouvement.

2-3 MOUVEMENT DIFFÉRENTIEL

Comme on peut le constater de la section précédente, la résolution analytique de la cinématique inverse ne suit pas une méthodologie générale et elle doit être traitée cas par cas. La résolution numérique que nous allons maintenant développer est plus systématique et applicable à différents types de robots.

Jacobien d'un robot. Au lieu de déterminer une expression globale de $\vec{q}(t)$ valable en tout instant d'un mouvement, il est plus simple d'effectuer une analyse locale en déterminant la variation $d\vec{q} = \vec{q}(t+dt) - \vec{q}(t)$ qui produit la variation désirée $d\vec{w} = \vec{w}(t+dt) - \vec{w}(t)$ du vecteur de configuration entre deux instants voisins t et $t + dt$. Or, la variation de la $i^{\text{ème}}$ composante de \vec{w} est liée aux variations des composantes de \vec{q} par

$$dw_i = \sum_{j=1}^n \frac{\delta w_i}{\delta q_j} dq_j, \quad i = 1, \dots, 6. \quad (2-34)$$

La forme matricielle de ces 6 équations s'écrit :

$$d\vec{w} = \mathbf{V}(\vec{q}).d\vec{q} \quad (2-35)$$

où la matrice

$$\mathbf{V}(\vec{q}) = \begin{pmatrix} \frac{\delta w_1}{\delta q_1} & \dots & \frac{\delta w_1}{\delta q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta w_6}{\delta q_1} & \dots & \frac{\delta w_6}{\delta q_n} \end{pmatrix} = \left(\frac{\delta w_i}{\delta q_j} \right)_{6 \times n} \quad (2-36)$$

est appelée le *jacobien* du robot au point \vec{q} .

Exemple 2-5

Le vecteur de configuration d'un robot Scara (exercice 2-1) est donné par

$$w_1 = a_1 C_1 + a_2 C_{1-2}, \quad w_2 = a_1 S_1 + a_2 S_{1-2}, \quad w_3 = d_1 - q_3 - d_4,$$

$$w_4 = 0, \quad w_5 = 0, \quad w_6 = -\exp(q_4 / \pi).$$

où a_1, a_2, d_1 et d_4 sont les paramètres constants du robot, q_1, q_2, q_4 ses variables de rotation et q_3 sa variable de translation. En appliquant (2-36), on trouve que le jacobien de ce robot a pour expression :

$$\mathbf{V}(\bar{q}) = \begin{pmatrix} -a_1 S_1 - a_2 S_{1-2} & a_2 S_{1-2} & 0 & 0 \\ a_1 C_1 + a_2 C_{1-2} & -a_2 C_{1-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{e^{q_4/\pi}}{\pi} \end{pmatrix} \quad (2-37)$$

La variation $d\bar{q}$ des articulations qui produit la variation désirée $d\bar{w}$ en un instant t s'obtient maintenant en résolvant l'équation (2-35) par les techniques de l'algèbre linéaire. Mais on sait qu'une équation, linéaire ou non, n'a pas toujours une solution comme elle peut en avoir une infinité. Nous allons discuter ces cas dans ce qui suit.

Singularités. Analysons les possibilités de résolution du système (2-35) formé de 6 équations linéaires à n inconnues :

$$\begin{aligned} v_{11} dq_1 + \dots + v_{1n} dq_n &= dw_1 \\ &\vdots \\ v_{61} dq_1 + \dots + v_{6n} dq_n &= dw_6 \end{aligned} \quad (2-38)$$

où $v_{ij} = \delta w_i / \delta q_j$ au point \bar{q} considéré.

a) Quand $n < 6$,

le robot est conçu pour ne donner à l'outil que n degrés de liberté et non tous les 6 degrés de l'espace (3 de translation et 3 de rotation). Dans ce cas, le système (2-38) a plus d'équations que d'inconnues

et sa solution n'existe que si ces équations sont *compatibles* c'est-à-dire que si le vecteur du second membre $d\bar{w}$ est une combinaison linéaire des colonnes du jacobien $\mathbf{V}(\bar{q})$. En d'autres termes, $d\bar{w}$ doit appartenir à l'espace engendré par les colonnes de $\mathbf{V}(\bar{q})$, appelé *espace image* de cette matrice et désigné par $\text{Im}[\mathbf{V}(\bar{q})]$. La dimension de cet espace, c'est-à-dire le nombre r des colonnes indépendantes de $\mathbf{V}(\bar{q})$, est appelé le rang de cette matrice :

$$r = \dim[\text{Im}(\mathbf{V}(\bar{q}))] = \text{rang}[\mathbf{V}(\bar{q})]. \quad (2-39)$$

Si $r < n$ pour une certaine combinaison d'articulations \bar{q} , le mouvement $d\bar{w}$ de l'outil est restreint à un sous-espace \mathcal{R}^r de l'espace \mathcal{R}^n du robot. Par conséquent, pour ce vecteur \bar{q} , l'outil perd une partie de sa liberté (voir fig. 2-14) et on dit que \bar{q} est un *point singulier*.

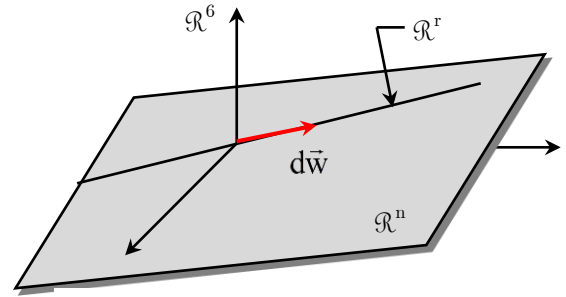


Fig. 2-14 Représentation schématique des espaces \mathcal{R}^6 , \mathcal{R}^n et \mathcal{R}^r .

b) Quand $n \geq 6$,

les articulations du robot sont, en principe, suffisantes pour donner à l'outil les 6 degrés de liberté de l'espace. Cependant, si en un point \bar{q} de l'espace d'articulations le rang r du jacobien $\mathbf{V}(\bar{q})$ est inférieur à 6, l'outil perd $6 - r$ degrés de liberté et on dit, aussi dans ce cas, que \bar{q} est singulier.

$$(4-26)$$

Des deux cas précédents on tire la définition suivante :

- Un point \bar{q} est singulier si $r = \text{rang}[\mathbf{V}(\bar{q})] < \min\{n, 6\}$.

Nous attirons l'attention que le nombre de lignes de

$\mathbf{V}(\bar{q})$ étant égal à 6, son rang est au plus égal à 6 si $n \geq 6$ et il est au plus égal à n si $n < 6$. Par conséquent, un point \bar{q} de l'espace d'articulations est singulier si le jacobien du robot en ce point n'est pas de rang plein.

D'autre part, on démontre que

$$\begin{aligned} \text{rang}[\mathbf{V}(\bar{q})] &= \text{rang}[\mathbf{V}^T(\bar{q})] \\ &= \text{rang}[\mathbf{V}^T(\bar{q})\mathbf{V}(\bar{q})] \\ &= \text{rang}[\mathbf{V}(\bar{q})\mathbf{V}^T(\bar{q})] \end{aligned}$$

Or, $\mathbf{V}^T(\bar{q})\mathbf{V}(\bar{q})$ est une matrice carrée (n, n) et $\mathbf{V}(\bar{q})\mathbf{V}^T(\bar{q})$ est une matrice carrée $(6, 6)$. Sachant que le déterminant d'une matrice carrée de rang non plein est nul, on déduit que \bar{q} est singulier si et seulement si

$$\begin{cases} \det[\mathbf{V}^T(\bar{q})\mathbf{V}(\bar{q})] = 0 & \text{si } n < 6, \\ \det[\mathbf{V}(\bar{q})\mathbf{V}^T(\bar{q})] = 0 & \text{si } n \geq 6. \end{cases} \quad (2-40)$$

Exemple 2-6

Déterminons les points singuliers d'un robot Scara dont le jacobien $\mathbf{V}(\bar{q})$ est donné par (2-37). La matrice $\mathbf{V}^T(\bar{q})\mathbf{V}(\bar{q})$ est alors

$$\begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2C_2 & -a_1a_2C_2 - a_2^2 & 0 & 0 \\ -a_1a_2C_2 - a_2^2 & a_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\pi^2} \exp\left(\frac{2q_4}{\pi}\right) \end{pmatrix}$$

dont le déterminant est nul si

$$\begin{aligned} \det[\mathbf{V}^T(\bar{q})\mathbf{V}(\bar{q})] &= \frac{1}{\pi^2} \exp\left(\frac{2q_4}{\pi}\right) \cdot a_2^2 \cdot a_1^2 \cdot S_2^2 = 0 \\ \Rightarrow q_2 &\in \{0, \pi\}. \end{aligned}$$

D'où les points singuliers sont ceux pour lesquels le second membre est aligné avec le premier, en prolongement ($q_2 = 0$) ou en superposition ($q_2 = \pi$), comme le montre la figure 2-15.

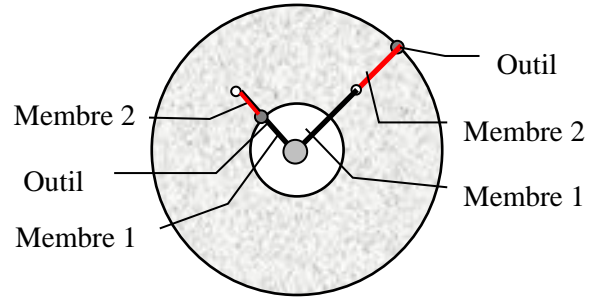


Fig. 2-15 Points singuliers d'un robot Scara

Pour les points singuliers, l'outil d'un robot Scara est donc sur la frontière du domaine de travail. En ces points, l'outil perd évidemment la possibilité de se déplacer dans le sens radial vers l'extérieur du domaine et son déplacement vers l'intérieur est infiniment petit par rapport aux variations des articulations. Pour le voir, soit x la distance entre l'outil et l'axe du support et déterminons sa dérivée par rapport à l'angle θ entre les deux premiers membres.

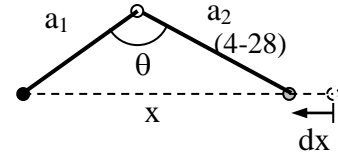


Fig. 2-16 Déplacement radial de l'outil.

De la figure 2-16, on a :

$$\begin{aligned} x^2 &= a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos \theta \Rightarrow x \cdot dx = a_1a_2 \sin \theta \cdot d\theta. \\ \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} \Big|_{\theta=0 \text{ ou } \pi} &= 0. \end{aligned}$$

Cet exemple montre que les points singuliers d'un robot Scara sont les combinaisons d'articulations \bar{q} qui placent l'outil sur l'un des deux cylindres qui limitent le domaine de travail du robot. En ces points le mouvement radial est impossible ce qui diminue le nombre de degrés de liberté de 1. Pour d'autres robots, les points singuliers peuvent apparaître à l'intérieur du domaine de travail et non seulement sur sa frontière.

Soit, par exemple, le robot articulé représenté sur la figure 2-17a. La pointe de son outil possède en

général 3 degrés de liberté : son déplacement dans le plan de la figure (2 degrés) plus son mouvement perpendiculaire à ce plan qui s'effectue en tournant l'axe du support. Mais, quand p se trouve sur le prolongement de cet axe (fig. 2-17b), le déplacement perpendiculaire au plan de la figure devient impossible. Ainsi, pour le robot considéré, les points singuliers ne sont pas seulement sur la frontière du domaine de travail mais aussi à l'intérieur de ce domaine, sur la verticale passant par l'origine du support.

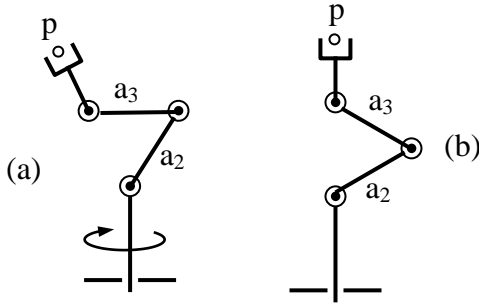


Fig. 2-17 Points singuliers à l'intérieur du domaine de travail

EXERCICE 2-4

Écrire les expressions du vecteur de configuration et du jacobien du robot de la figure 2-17 et déduire le lieu de ses points singuliers.

Une autre caractéristique des points singuliers est la suivante :

En un point singulier, certaines variations du vecteur d'articulation \vec{q} n'ont pas d'effet sur le vecteur de configuration \vec{w} .

Pour démontrer cette propriété, posons $\mathcal{N}[\mathbf{V}(\vec{q})]$ le noyau de $\mathbf{V}(\vec{q})$, c'est-à-dire l'espace des vecteurs $d\vec{q} \in \mathbb{R}^n$ dont l'image par $\mathbf{V}(\vec{q})$ est le vecteur $\vec{0}$. Nous savons que

$$\dim[\mathcal{N}[\mathbf{V}(\vec{q})]] + \dim[\text{Im}[\mathbf{V}(\vec{q})]] = n.$$

Or, en un point singulier $\dim[\text{Im}[\mathbf{V}(\vec{q})]] = r < n$ d'où $\dim[\mathcal{N}[\mathbf{V}(\vec{q})]] \geq 1$. Ceci signifie qu'il existe un vecteur $d\vec{q} \neq \vec{0}$ tel que $\mathbf{V}(\vec{q})d\vec{q} = d\vec{w} = \vec{0}$.

Par conséquent,

- si $n > 6$, il existe toujours des variations de \vec{q} qui n'affectent pas la configuration \vec{w} même si le point considéré n'est pas singulier.
- Si $n \leq 6$, toute variation de \vec{q} affecte \vec{w} sauf aux points singuliers où certaines variations de \vec{q} n'ont pas d'effet sur \vec{w} .

L'exemple suivant montre comment on obtient le noyau du jacobien, c'est-à-dire les combinaisons d'articulations qui n'ont pas d'effet sur la configuration de l'outil en un point singulier.

Exemple 2-7

Considérons de nouveau le robot Scara dont le jacobien est donné par la matrice (2-37) et les points singuliers sont ceux pour lesquels $q_2 \in \{0, \pi\}$.

Pour $q_2 = 0$, c'est-à-dire quand les deux premiers membres sont en prolongement, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\vec{q})d\vec{q} &= \vec{0} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} -(a_1 + a_2)S_1 dq_1 + a_2 S_1 dq_2 \\ (a_1 + a_2)C_1 dq_1 - a_2 C_1 dq_2 \\ -dq_3 \\ -\frac{1}{\pi} \exp\left(\frac{q_4}{\pi}\right) dq_4 \end{pmatrix} &= \vec{0}. \end{aligned}$$

En égalisant chaque composante de ce vecteur à 0, on trouve que

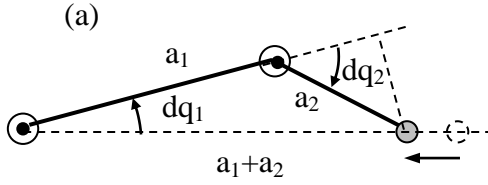
$$dq_3 = dq_4 = 0 \text{ et } dq_2 = \frac{a_1 + a_2}{a_2} dq_1.$$

Le noyau du jacobien aux points singuliers relatifs à $q_2 = 0$ est l'ensemble des vecteurs qui vérifient les égalités précédentes. De même, aux points singuliers relatifs à $q_2 = \pi$, le noyau du jacobien est l'ensemble des vecteurs vérifiant

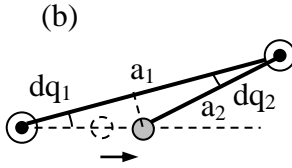
$$dq_3 = dq_4 = 0 \text{ et } dq_2 = \frac{a_2 - a_1}{a_2} dq_1.$$

La figure 2-18 montre une interprétation géométrique des relations précédentes quand le déplacement à partir d'un point singulier est radial.

Sachant qu'un tel déplacement est quasiment nul, le vecteur correspondant $d\vec{q}$ appartient au noyau.



$$(a_1 + a_2)\sin(dq_1) = a_2\sin(dq_2)$$



$$(a_1 - a_2)\sin(dq_1) = -a_2\sin(dq_2)$$

Fig. 2-18 Interprétation géométrique du noyau aux points singuliers

En conclusion, la configuration $d\vec{w}$ de l'outil perd une partie de sa liberté aux points singuliers. D'autre part, même en un point régulier, si $n < 6$ la solution est impossible quand $d\vec{w} \notin \text{Im}[\mathbf{V}(\vec{q})]$ et si $n > 6$ il existe toujours une infinité de solutions. Le problème maintenant est de savoir que faire quand la solution est impossible et quelle solution adoptée s'il y en a une infinité. La pseudo-inversion d'une matrice permet de répondre à ces questions.

Pseudo-inverse d'une matrice. Considérons un système à m équations linéaires et n inconnues écrites sous la forme matricielle :

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \vec{b} \in \mathbb{R}^m. \quad (2-41)$$

Au lieu de résoudre le système (2-41), nous allons traiter un problème plus général qui consiste à déterminer un vecteur \vec{x} qui vérifie le mieux ce système c'est-à-dire qui minimise la distance entre les points $\mathbf{A}\vec{x}$ et \vec{b} dans l'espace \mathbb{R}^m . Ceci revient à minimiser la fonction

$$f(\vec{x}) = \|\mathbf{A}\vec{x} - \vec{b}\|^2$$

$$\begin{aligned} &= (\mathbf{A}\vec{x} - \vec{b})^T (\mathbf{A}\vec{x} - \vec{b}) \\ &= (\vec{x}^T \mathbf{A}^T - \vec{b}^T) (\mathbf{A}\vec{x} - \vec{b}) \\ &= \vec{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \vec{x} - \vec{x}^T \mathbf{A}^T \vec{b} - \vec{b}^T \mathbf{A} \vec{x} + \vec{b}^T \vec{b}. \end{aligned} \quad (2-42)$$

Un point \vec{x} est un minimum de f si le gradient $\delta f / \delta \vec{x}$ est nul et si la dérivée seconde de f par rapport à chacune de ses arguments est positive. Or,

$$\begin{aligned} \frac{\delta f}{\delta \vec{x}} &= \mathbf{A}^T \mathbf{A} \vec{x} + \vec{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} - \mathbf{A}^T \vec{b} - \vec{b}^T \mathbf{A} \\ &= \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\vec{x} - \vec{b}) + (\vec{x}^T \mathbf{A}^T - \vec{b}^T) \mathbf{A} \\ &= 2\mathbf{A}^T (\mathbf{A}\vec{x} - \vec{b}) \end{aligned}$$

dont la dérivée de la $i^{\text{ème}}$ composante est

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 f}{\delta x_i^2} &= \frac{\delta}{\delta x_i} (2e_i^T \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\vec{x} - \vec{b})) \\ &= 2e_i^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} e_i = 2 \|\mathbf{A} e_i\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, \vec{x}^* vérifie le mieux (2-41) si et seulement si

$$\mathbf{A}^T (\mathbf{A}\vec{x}^* - \vec{b}) = \vec{0}. \quad (2-43)$$

Supposons que la matrice \mathbf{A} est de rang plein, c'est-à-dire $\text{rang}(\mathbf{A}) = \min\{m, n\}$ où m est la dimension de \vec{b} (nombre d'équations) et n la dimension de \vec{x} (nombre d'inconnues) et distinguons entre les deux cas : $n \leq m$ et $n > m$.

a) $n \leq m$

Le système (2-41) a au moins autant d'équations que d'inconnues. Comme \mathbf{A} est de rang plein, on a $n = \text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$ d'où la matrice carrée $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ est inversible et le vecteur qui vérifie (2-43) c'est-à-dire qui minimise la distance entre les points $\mathbf{A}\vec{x}$ et \vec{b} est

$$\vec{x}^* = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \vec{b}. \quad (2-44)$$

Si le système (2-41) est compatible, la solution définie par (2-44) est exacte, sinon elle est la meilleure. À noter que pour $n = m$, comme $n =$

$\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}^T)$, \mathbf{A} et \mathbf{A}^T sont inversibles et (2-44) devient :

$$\vec{x}^* = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}^T \vec{b} = \mathbf{A}^{-1} \vec{b}$$

qui n'est autre que la solution classique de Cramer.

EXERCICE 2-5

Déduire de (2-43) que $\mathbf{A}\vec{x}^*$ est la projection orthogonale de \vec{b} sur $\text{Im}[\mathbf{A}]$, l'espace engendré par les vecteurs colonnes de \mathbf{A} .

b) $n > m$

Le système (2-41) a plus d'inconnues que d'équations et, par conséquent, il possède une infinité de solutions. Comme \mathbf{A} est de rang plein, on a $m = \text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)$ d'où la matrice carrée $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ est inversible et $\mathbf{A}[\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\vec{b}] = \vec{b}$. On en déduit que le vecteur

$$\vec{x}^* = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\vec{b}. \quad (2-45)$$

est une solution de (2-41) parmi une infinité d'autres solutions possibles. Cette solution est celle qui a le plus petit module. En effet, pour toute solution \vec{x} de (2-41), on a $\vec{x}^T \mathbf{A}^T = \vec{x}^{*T} \mathbf{A}^T = \vec{b}^T$ d'où

$$\vec{x}^T \vec{x}^* = \vec{x}^T \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \vec{b} = \vec{x}^{*T} \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \vec{b} = \|\vec{x}^*\|^2$$

ce qui montre que la projection de toute solution de (2-41) sur \vec{x}^* est \vec{x}^* d'où \vec{x}^* est la solution qui a le plus petit module.

Définition. On appelle pseudo-inverse d'une matrice \mathbf{A} de rang plein la matrice

$$\mathbf{A}^\dagger = \begin{cases} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T & \text{si } n \leq m, \\ \mathbf{A}^{-1} & \text{si } n = m, \\ \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} & \text{si } n > m. \end{cases} \quad (2-46)$$

De ce qui précède on arrive à la conclusion suivante.

1) Si la solution de $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ existe et elle est unique

($n \leq m$ et compatible), $\vec{x}^* = \mathbf{A}^\dagger \vec{b}$ est cette solution.

2) S'il existe une infinité de solutions ($n > m$), \vec{x}^* est la solution qui a le plus petit module.

3) Si la solution n'existe pas (incompatible), \vec{x}^* est le vecteur qui vérifie le mieux les équations.

Exemple 2-8

Considérons le système à 3 équations et 2 inconnues suivant :

$$x_1 + x_2 = 4, \quad x_1 - x_2 = 0, \quad x_2 = 1.$$

Sa forme matricielle est $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ avec

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Comme

$$\det([\mathbf{A} \quad \vec{b}]) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

\vec{b} est indépendant des colonnes \vec{a}_1 et \vec{a}_2 de \mathbf{A} , c'est-à-dire il n'appartient pas au plan engendré par ces vecteurs (fig. 2-19a), d'où le système est incompatible et n'a pas de solution. Ceci peut aussi se voir en remarquant que les droites représentant les équations du système ne se rencontrent pas en un même point (fig. 2-19b).

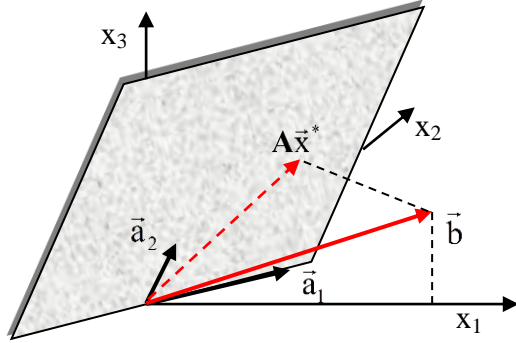
Appliquons (2-44) pour déterminer la solution optimale. On a :

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

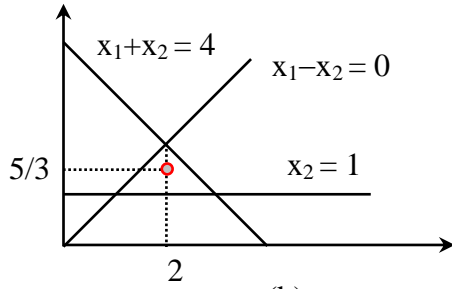
$$\Rightarrow (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\bar{x}^* &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 5/3 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$



(a)



(b)

Fig. 2-19 Interprétations géométriques de la solution optimale \bar{x}^*

Exemple 2-9

Les solutions de l'équation $x_1 + x_2 = 2$ sont les vecteurs $\bar{x} = [x_1 \ x_2]^T$ dont les extrémités sont situées sur la droite D représentée sur la figure 2-20.

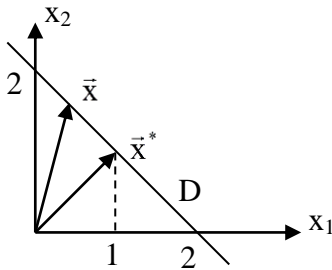


Fig. 2-20 Les solutions de $x_1 + x_2 = 2$

En appliquant (2-45) à ce système simple d'une équation à deux inconnues, on trouve :

$$\bar{x}^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} (2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On voit sur la figure que \bar{x}^* est la solution de plus faible module et qu'il est égal à la projection de toute autre solution sur lui.

2-4 RÉOLUTION NUMÉRIQUE

Considérons l'équation du mouvement différentiel d'un robot

$$\mathbf{V}(\bar{q})d\bar{q} = d\bar{w}, \quad \bar{q} \in \mathcal{R}^n, \quad \bar{w} \in \mathcal{R}^m \quad (2-47)$$

où n est le nombre des articulations et $m (\leq 6)$ est le degré de liberté de l'outil. À partir d'un point \bar{q} de l'espace des articulations, la variation $d\bar{q} = \bar{q}(t+dt) - \bar{q}(t)$ qui produit une variation désirée $d\bar{w} = \bar{w}(t+dt) - \bar{w}(t)$ de la configuration de l'outil s'obtient en résolvant le système (2-47). Ceci peut se faire soit par pseudo-inversion soit par une autre technique qui sera développée plus loin appelée inversion- $\{1\}$.

Résolution par pseudo-inversion. En supposant que le jacobien $\mathbf{V}(\bar{q})$ est de rang plein, (2-47) implique que la solution optimale est $d\bar{q}^* = \mathbf{V}^\dagger(\bar{q}).d\bar{w}$. En divisant les deux membres par un laps de temps dt , on déduit que la vitesse $\dot{\bar{q}}^*$ des articulations en un instant t est liée à la vitesse $\dot{\bar{w}}$ de configuration de l'outil par la relation :

$$\dot{\bar{q}}^* = \mathbf{V}^\dagger(\bar{q}).\dot{\bar{w}} \quad (2-48)$$

qui, d'après la définition (2-46) de la matrice pseudo-inverse, elle s'écrit sous la forme détaillée suivante :

$$\dot{\mathbf{q}}^* = \begin{cases} (\mathbf{V}^T \mathbf{V})^{-1} \mathbf{V}^T \cdot \dot{\mathbf{w}} = \frac{\text{adj}(\mathbf{V}^T \mathbf{V})}{\det(\mathbf{V}^T \mathbf{V})} \mathbf{V}^T \cdot \dot{\mathbf{w}} & \text{si } n < m, \\ \mathbf{V}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{w}} = \frac{\text{adj}(\mathbf{V})}{\det(\mathbf{V})} \cdot \dot{\mathbf{w}} & \text{si } n = m, \\ \mathbf{V}^T (\mathbf{V} \mathbf{V}^T)^{-1} \cdot \dot{\mathbf{w}} = \mathbf{V}^T \frac{\text{adj}(\mathbf{V} \mathbf{V}^T)}{\det(\mathbf{V} \mathbf{V}^T)} \cdot \dot{\mathbf{w}} & \text{si } n > m. \end{cases}$$

Au voisinage d'un point singulier, le déterminant de $\mathbf{V}^T \mathbf{V}$, de \mathbf{V} ou de $\mathbf{V} \mathbf{V}^T$ tend vers zéro d'où la vitesse $\dot{\mathbf{q}}^*$ tend vers l'infini ce qui risque de dépasser la capacité des actionneurs des articulations. Par conséquent, en planifiant la trajectoire de l'outil, il est nécessaire d'éviter le passage au voisinage des singularités afin que l'équation (2-48) soit valable en tout point de cette trajectoire.

a) Quand $n < m$,

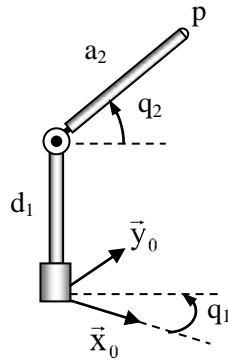
la vitesse des articulations $\dot{\mathbf{q}}^*$ produit la vitesse de configuration $\dot{\mathbf{w}}^* = \mathbf{V}(\bar{\mathbf{q}}) \cdot \dot{\mathbf{q}}^*$ la plus proche possible de la vitesse désirée $\dot{\mathbf{w}}$. De plus, quand $\dot{\mathbf{w}} \in \text{Im}[\mathbf{V}(\bar{\mathbf{q}})]$, il existe un vecteur $\dot{\mathbf{q}}_1$ tel que $\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{V}(\bar{\mathbf{q}}) \cdot \dot{\mathbf{q}}_1$ d'où, tenant compte de (2-46),

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{w}}^* &= \mathbf{V}(\bar{\mathbf{q}}) \cdot \dot{\mathbf{q}}^* = \mathbf{V}(\bar{\mathbf{q}}) \cdot \mathbf{V}^\dagger(\bar{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{w}} \\ &= \mathbf{V}(\bar{\mathbf{q}}) \cdot \mathbf{V}^\dagger(\bar{\mathbf{q}}) \mathbf{V}(\bar{\mathbf{q}}) \cdot \dot{\mathbf{q}}_1 = \mathbf{V}(\bar{\mathbf{q}}) \cdot \dot{\mathbf{q}}_1 = \dot{\mathbf{w}}. \end{aligned}$$

c'est-à-dire, quand $\dot{\mathbf{w}} \in \text{Im}[\mathbf{V}(\bar{\mathbf{q}})]$, $\dot{\mathbf{q}}^*$ produit exactement la vitesse désirée $\dot{\mathbf{w}}$.

Exemple 2-10

Fig. 2-19 Robot à 2 degrés de liberté



Le robot de la figure 2-19 a 2 articulations rotatives et ne comporte pas un outil. Sa pointe p décrit la surface de la sphère S centrée à l'épaule et de rayon a_2 . Elle a donc, en générale, deux degrés de liberté.

En supposant que $\bar{\mathbf{z}}_1$ est dirigé vers l'intérieur du plan de la figure, il est facile de voir que le vecteur de configuration de p est donné par :

$$\bar{\mathbf{w}} = (a_2 C_2 C_1 \quad a_2 C_2 S_1 \quad d_1 - a_2 S_2)^T$$

dont le jacobien est

$$\mathbf{V}(\bar{\mathbf{q}}) = \begin{pmatrix} -a_2 C_2 S_1 & a_2 C_2 C_1 & 0 \\ -a_2 S_2 C_1 & -a_2 S_2 S_1 & -a_2 C_2 \end{pmatrix}^T$$

et

$$\mathbf{V}^T(\bar{\mathbf{q}}) \mathbf{V}(\bar{\mathbf{q}}) = \begin{pmatrix} a_2^2 C_2^2 & 0 \\ 0 & a_2^2 \end{pmatrix}.$$

Comme $\det(\mathbf{V}^T \mathbf{V}) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$ c'est-à-dire $q_2 = \pm \pi/2$, les points singuliers sont les deux points d'intersection de l'axe z_0 avec la sphère S. En un point régulier de S ($C_2 \neq 0$), le rang de \mathbf{V} est 2 et $\text{Im}(\mathbf{V})$ est le plan tangent à S au point considéré. Pour le prouver, il suffit de vérifier par produit scalaire que le vecteur rayon $\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{w}} - d_1 \bar{\mathbf{z}}_0$ est orthogonal aux colonnes $\bar{\mathbf{v}}_1$ et $\bar{\mathbf{v}}_2$ de \mathbf{V} . Remarquer aussi que $\bar{\mathbf{v}}_1$ est horizontal et orthogonal à $\bar{\mathbf{v}}_2$ (fig. 2-20).

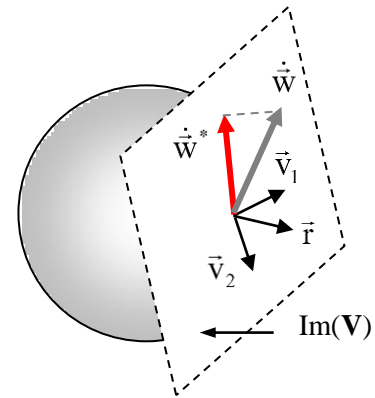


Fig. 2-20 Interprétation de la solution par pseudo-inversion.

Supposons qu'en un point de la trajectoire pour lequel $q_1 = \pi/2$ et $q_2 = 0$, la vitesse doit être $\dot{\mathbf{w}}$.

D'après (2-44), la vitesse d'articulation optimale sera :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}}^* &= \mathbf{V}^+(\bar{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} a_2^2 & 0 \\ 0 & a_2^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{w}_3 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{a_2^2} \begin{pmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ce qui produit une vitesse de configuration :

$$\dot{\mathbf{w}}^* = \mathbf{V}(\bar{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}^* = -\frac{1}{a_2^2} \begin{pmatrix} -a_2^2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{w}_1 \\ 0 \\ \dot{w}_3 \end{pmatrix}.$$

Cette vitesse est la plus voisine de la vitesse désirée $\dot{\mathbf{w}}$ parmi les vecteurs de $\text{Im}(\mathbf{V})$, c'est-à-dire parmi l'ensemble des vitesses possibles de la pointe p au point considéré. Géométriquement, $\dot{\mathbf{w}}^*$ est la projection de $\dot{\mathbf{w}}$ sur le plan tangent $\text{Im}(\mathbf{V})$.

b) Quand $n = m$,

la vitesse d'articulation $\dot{\mathbf{q}}^*$ donnée est la seule solution exacte possible.

c) Quand $n > m$,

il existe une infinité de solutions exactes et on dit que le robot est *redondant*. Parmi cette infinité de solutions, la vitesse $\dot{\mathbf{q}}^*$ est celle qui a le plus faible module.

Minimisation de l'énergie cinétique. Parfois on s'intéresse à minimiser l'énergie et non la vitesse. En négligeant l'énergie potentielle des membres et les frottements, il ne reste que l'énergie cinétique qui est une fonction quadratique des vitesses :

$$W_c = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} \quad (2-48)$$

où \mathbf{D} est une matrice symétrique inversible appelée tenseur d'inertie. La relation (2-48) sera établie au chapitre suivant. Contentons-nous pour le moment à trouver la vitesse $\dot{\mathbf{q}}$ qui minimise T parmi les solutions de (2-47), c'est-à-dire sous la contrainte

$$\mathbf{V} \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{w}}.$$

Appliquons dans ce but la méthode de Lagrange qui consiste à minimiser la fonction à $n + m$ variables

$$\begin{aligned}P(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}) &= \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} + \bar{\boldsymbol{\lambda}}^T (\mathbf{V} \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{w}}) \\ \text{avec } \bar{\boldsymbol{\lambda}}^T &= (\lambda_1, \dots, \lambda_m)\end{aligned} \quad (2-49)$$

où les λ_i sont appelés les paramètres de Lagrange. Le minimum de P s'obtient en annulant ses dérivées par rapport à tous ses arguments:

$$\begin{aligned}\frac{\delta P}{\delta \dot{q}_i} &= \bar{\mathbf{e}}_i^T \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{e}}_i + \bar{\boldsymbol{\lambda}}^T \mathbf{V} \bar{\mathbf{e}}_i = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, n, \\ \frac{\delta P}{\delta \lambda_j} &= \bar{\mathbf{e}}_j^T (\mathbf{V} \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{w}}) = 0, \quad \text{pour } j = 1, \dots, m\end{aligned} \quad (2-50)$$

où les $\bar{\mathbf{e}}_i$ et les $\bar{\mathbf{e}}_j$ sont les vecteurs unitaires canonique respectivement dans \mathcal{R}^n et \mathcal{R}^m . Sachant que le produit scalaire d'un vecteur $\bar{\mathbf{x}}$ par $\bar{\mathbf{e}}_i$ est égal à la $i^{\text{ème}}$ composante de $\bar{\mathbf{x}}$, les égalités (2-50) peuvent se grouper sous forme d'équations matricielles :

$$2\mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}^T \bar{\boldsymbol{\lambda}} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{V} \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{w}} = 0$$

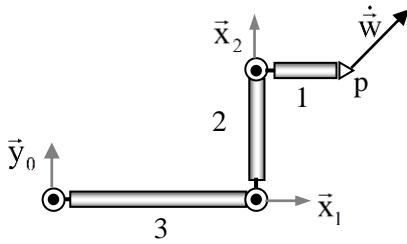
desquelles on déduit que

$$\dot{\mathbf{q}} = -\frac{1}{2} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{V}^T \bar{\boldsymbol{\lambda}} \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{w}} = -\frac{1}{2} \mathbf{V} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{V}^T \bar{\boldsymbol{\lambda}}.$$

Comme \mathbf{D} et \mathbf{V} sont de rang plein, $\mathbf{V} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{V}^T$ est inversible ce qui permet d'éliminer $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ des équations précédentes et d'obtenir

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{V}^T \left[\mathbf{V} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{V}^T \right]^{-1} \dot{\mathbf{w}}. \quad (2-51)$$

Ainsi, quand $n > m$, la vitesse d'articulations qui minimise l'énergie cinétique du robot s'obtient en remplaçant dans l'expression de la vitesse minimum $\dot{\mathbf{q}}^* = \mathbf{V}^T (\mathbf{V} \mathbf{V}^T)^{-1} \dot{\mathbf{w}}$ la matrice \mathbf{V}^T par la matrice $\mathbf{D}^{-1} \mathbf{V}^T$.

Exemple 2-11**Fig. 2-21** Robot planaire à 3 articulations

Le vecteur de configuration du robot planaire de la figure 2-21 est

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 3C_1 + 2C_{12} + C_{123} \\ 3S_1 + 2S_{12} + S_{123} \end{pmatrix}$$

de jacobien

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} -3S_1 - 2S_{12} - S_{123} & -2S_{12} - S_{123} & -S_{123} \\ 3C_1 + 2C_{12} + C_{123} & 2C_{12} + C_{123} & C_{123} \end{pmatrix}.$$

À partir de la position $\vec{q} = (0 \ \pi/2 \ -\pi/2)^T$ montrée sur la figure, on désire déplacer la pointe p avec une vitesse $\dot{\vec{w}} = (1 \ 1)^T$.

a) Vitesse d'articulation minimum

$$\begin{aligned} \dot{\vec{q}}^* &= \mathbf{V}^\dagger(\vec{q}) \dot{\vec{w}} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 8 \\ -19 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ rad/sec.} \end{aligned}$$

Au lieu d'un calcul manuel, l'instruction « pinv » de Matlab effectue la pseudo-inversion d'une matrice et la vitesse d'articulation s'obtient en écrivant simplement :

```
>> wp = [1; 1]; V = [-2 -2 0; 4 1 1];
>> qp = pinv(V)*wp
```

b) Énergie minimum

Supposons que le tenseur d'inertie du robot quand $\vec{q} = (0 \ \pi/2 \ -\pi/2)^T$ est donné par

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} ..$$

La vitesse d'articulation qui produit $\dot{\vec{w}} = (1 \ 1)^T$ avec une énergie cinétique minimum s'obtient en écrivant :

```
>> wp = [1; 1]; V = [-2 -2 0; 4 1 1];
>> D = [8 2 1; 2 4 0; 1 0 1];
>> qp = inv(D)*V'*inv(V*inv(D)*V')*wp
```

```
qp =
    0.1818
   -0.6818
    0.9545.
```

EXERCICE 2-6

Comparer les modules des vitesses et les énergies cinétiques des deux cas de l'exemple précédent.

Résolution par inversion-{1}. Cette méthode est utile pour les robots redondants c'est-à-dire quand le nombre n des articulations est supérieur au degré de liberté m de l'outil. Dans ce cas, pour exécuter une variation $d\vec{w}$ donnée de la configuration de l'outil, il existe une infinité de solutions pour la variation $d\vec{q}$ des articulations. Contrairement à la résolution par pseudo-inversion qui fournit une solution unique, la méthode par inversion-{1} permet d'obtenir sous forme paramétrique toutes les solutions de $\mathbf{V}(\vec{q})d\vec{q} = d\vec{w}$. Par un choix convenable de ces paramètres, il est possible d'obtenir une solution qui évite la collision des membres avec les obstacles du milieu environnant.

Comme nous l'avons fait pour la pseudo-inversion, nous supposons que la trajectoire reste éloignée des points singuliers. Sous cette condition, le jacobien \mathbf{V} sera de rang plein en tout point de la trajectoire, c.à.d. il comportera m colonnes indépendantes. En

plaçant ces colonnes de \mathbf{V} en premières positions, on aboutit à la forme suivante :

$$\mathbf{V}(\bar{\mathbf{q}}) = [\mathbf{B}(\bar{\mathbf{q}}) \quad \mathbf{C}(\bar{\mathbf{q}})] \quad (2-52)$$

où $\mathbf{B}(\bar{\mathbf{q}})$ est une matrice $m \times m$ inversible en tout point de la trajectoire. Soit $\mathcal{F}(\bar{\mathbf{q}})$ l'ensemble des vitesses d'articulations dont les composantes relatives aux colonnes de $\mathbf{C}(\bar{\mathbf{q}})$ sont nulles :

$$\dot{\bar{\mathbf{q}}} = (\dot{q}_1 \quad \cdots \quad \dot{q}_m \quad 0 \quad \cdots \quad 0)^T = \begin{pmatrix} \dot{\bar{\mathbf{q}}}^B \\ \bar{\mathbf{0}} \end{pmatrix}. \quad (2-53)$$

Pour ces vitesses, seules bougent les articulations relatives aux colonnes indépendantes de $\mathbf{V}(\bar{\mathbf{q}})$ tandis que les autres restent figées et le robot se comporte comme s'il n'était pas redondant, c'est-à-dire comme s'il avait autant d'articulations que de degrés de liberté. Une vitesse de ce type qui satisfait l'équation différentielle $\mathbf{V}(\bar{\mathbf{q}})\dot{\bar{\mathbf{q}}} = \dot{\bar{\mathbf{w}}}$ est telle que

$$[\mathbf{B}(\bar{\mathbf{q}}) \quad \mathbf{C}(\bar{\mathbf{q}})] \begin{pmatrix} \dot{\bar{\mathbf{q}}}^B \\ \bar{\mathbf{0}} \end{pmatrix} = \mathbf{B}(\bar{\mathbf{q}})\dot{\bar{\mathbf{q}}}^B = \dot{\bar{\mathbf{w}}}.$$

Comme $\mathbf{B}(\bar{\mathbf{q}})$ est inversible, la seule solution de l'équation différentielle du robot appartenant à $\mathcal{F}(\bar{\mathbf{q}})$ est donnée par

$$\dot{\bar{\mathbf{q}}}^{(1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{-1}(\bar{\mathbf{q}})\dot{\bar{\mathbf{w}}} \\ \bar{\mathbf{0}} \end{pmatrix} = \mathbf{V}^{(1)}(\bar{\mathbf{q}})\dot{\bar{\mathbf{w}}} \quad (2-54)$$

où la matrice $n \times m$

$$\mathbf{V}^{(1)}(\bar{\mathbf{q}}) = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{-1}(\bar{\mathbf{q}}) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}_{n \times m} \quad (2-55)$$

est appelée *inverse-{1}* de $\mathbf{V}(\bar{\mathbf{q}})$ et la vitesse $\dot{\bar{\mathbf{q}}}^{(1)}$ est appelée *solution-{1}* de $\mathbf{V}(\bar{\mathbf{q}})\dot{\bar{\mathbf{q}}} = \dot{\bar{\mathbf{w}}}$. D'après (2-52) et (2-55), $\mathbf{V}^{(1)}$ vérifie les propriétés suivantes :

$$\mathbf{V}\mathbf{V}^{(1)} = \mathbf{I}_{m \times m}, \quad \mathbf{V}^{(1)}\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{m \times m} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

$$\text{et} \quad \mathbf{V}\mathbf{V}^{(1)}\mathbf{V} = \mathbf{V}. \quad (2-56)$$

D'autre part, toute solution de $\mathbf{V}(\bar{\mathbf{q}})\dot{\bar{\mathbf{q}}} = \dot{\bar{\mathbf{w}}}$ est la somme de la vitesse $\dot{\bar{\mathbf{q}}}^{(1)}$ définie par (2-54) et d'une autre vitesse qui n'affecte pas l'outil. En effet, pour toute solution $\dot{\bar{\mathbf{q}}} = (\dot{\bar{\mathbf{q}}}^B \quad \dot{\bar{\mathbf{q}}}^C)^T$ on a :

$$[\mathbf{B}(\bar{\mathbf{q}}) \quad \mathbf{C}(\bar{\mathbf{q}})] \begin{pmatrix} \dot{\bar{\mathbf{q}}}^B \\ \dot{\bar{\mathbf{q}}}^C \end{pmatrix} = \mathbf{B}(\bar{\mathbf{q}})\dot{\bar{\mathbf{q}}}^B + \mathbf{C}(\bar{\mathbf{q}})\dot{\bar{\mathbf{q}}}^C = \dot{\bar{\mathbf{w}}}$$

d'où

$$\dot{\bar{\mathbf{q}}}^B = \mathbf{B}^{-1}(\bar{\mathbf{q}})\dot{\bar{\mathbf{w}}} - \mathbf{B}^{-1}(\bar{\mathbf{q}})\mathbf{C}(\bar{\mathbf{q}})\dot{\bar{\mathbf{q}}}^C. \quad (2-57)$$

Cette dernière équation peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\dot{\bar{\mathbf{q}}} = \begin{pmatrix} \dot{\bar{\mathbf{q}}}^B \\ \dot{\bar{\mathbf{q}}}^C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{-1}(\bar{\mathbf{q}}) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \dot{\bar{\mathbf{w}}} + \begin{pmatrix} -\mathbf{B}^{-1}(\bar{\mathbf{q}})\mathbf{C}(\bar{\mathbf{q}}) \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} \dot{\bar{\mathbf{q}}}^C.$$

Tenant compte de (2-54) et (2-55), on déduit que toute solution de l'équation différentielle du robot a pour expression :

$$\dot{\bar{\mathbf{q}}} = \dot{\bar{\mathbf{q}}}^{(1)} + \dot{\bar{\mathbf{h}}} \quad (2-58)$$

avec

$$\dot{\bar{\mathbf{h}}} = \begin{pmatrix} -\mathbf{B}^{-1}(\bar{\mathbf{q}})\mathbf{C}(\bar{\mathbf{q}}) \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} \dot{\bar{\mathbf{q}}}^C. \quad (2-59)$$

Mais $\forall \dot{\bar{\mathbf{q}}}^C$,

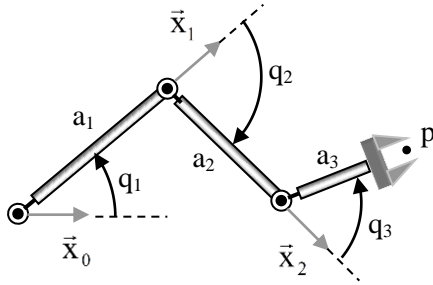
$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{w}}} &= \mathbf{V}(\bar{\mathbf{q}})\dot{\bar{\mathbf{h}}} = [\mathbf{B}(\bar{\mathbf{q}}) \quad \mathbf{C}(\bar{\mathbf{q}})] \begin{pmatrix} -\mathbf{B}^{-1}(\bar{\mathbf{q}})\mathbf{C}(\bar{\mathbf{q}}) \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} \dot{\bar{\mathbf{q}}}^C \\ &= [-\mathbf{C}(\bar{\mathbf{q}}) + \mathbf{C}(\bar{\mathbf{q}})]\dot{\bar{\mathbf{q}}}^C = \bar{\mathbf{0}}. \end{aligned}$$

On voit que la vitesse d'articulation $\dot{\bar{\mathbf{h}}}$ n'a pas d'effet sur la vitesse de configuration $\dot{\bar{\mathbf{w}}}$. Ainsi, la solution générale $\dot{\bar{\mathbf{q}}}$ se compose d'une vitesse d'articulations $\dot{\bar{\mathbf{q}}}^{(1)}$ qui produit la vitesse de configuration désirée $\dot{\bar{\mathbf{w}}}$ et d'une autre vitesse $\dot{\bar{\mathbf{h}}}$ appartenant à une famille qui n'affectent pas $\dot{\bar{\mathbf{w}}}$. Un choix convenable de $\dot{\bar{\mathbf{h}}}$ (c'est-à-dire de $\dot{\bar{\mathbf{q}}}^C$) peut éloigner les membres du robot des obstacles

environnant sans modifier la configuration désirée de l'outil.

Exemple 2-12.

Considérons de nouveau un robot planaire à 3 articulations rotatives comportant une poigne de serrage et supposons que le sens positif des articulations est l'antihoraire.



En posant

$$\vec{\theta} = (\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3)^T \text{ avec}$$

$$\theta_1 = q_1, \quad \theta_2 = q_1 + q_2, \quad \theta_3 = q_1 + q_2 + q_3$$

les angles que font les membres avec l'horizontal, le vecteur de configuration s'écrit :

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} a_1 C_1 + a_2 C_2 + a_3 C_3 \\ a_1 S_1 + a_2 S_2 + a_3 S_3 \end{pmatrix}$$

où $C_i = \cos \theta_i$ et $S_i = \sin \theta_i$. Par ce changement de variables, l'équation différentielle du robot devient

$$\mathbf{V}(\vec{\theta}) \cdot \dot{\vec{\theta}} = \dot{\vec{w}} \text{ avec}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\vec{\theta}) &= \begin{pmatrix} \frac{\delta w_i}{\delta \theta_j} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -a_1 S_1 & -a_2 S_2 & -a_3 S_3 \\ a_1 C_1 & a_2 C_2 & a_3 C_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2-60)$$

Aux points singuliers,

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{V}\mathbf{V}^T) &= \begin{vmatrix} \sum a_i^2 S_i^2 & -\sum a_i^2 S_i C_i \\ -\sum a_i^2 S_i C_i & \sum a_i^2 C_i^2 \end{vmatrix} \\ &= (\sum a_i^2 S_i^2)(\sum a_i^2 C_i^2) - (\sum a_i^2 S_i C_i)^2 = 0. \end{aligned} \quad (2-61)$$

En simplifiant les termes de même indice et comme

$$a_i^2 a_j^2 (S_i^2 C_j^2 + S_j^2 C_i^2 - 2S_i C_j S_j C_i) = a_i^2 a_j^2 S_{i-j}^2$$

où $S_{i-j} = \cos(\theta_i - \theta_j)$, l'équation (2-61) se réduit à :

$$a_1^2 a_2^2 S_{1-2}^2 + a_1^2 a_3^2 S_{1-3}^2 + a_2^2 a_3^2 S_{2-3}^2 = 0.$$

On en déduit qu'un point est singulier quand $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3$ à $k\pi$ près, c'est-à-dire quand les 3 membres du robot sont alignés.

En tout point d'une trajectoire Γ qui évite les points singuliers, le rang de \mathbf{V} est 2 et possède donc 2 colonnes indépendantes. Ces colonnes sont les deux premières lorsque

$$\det[\mathbf{B}(\vec{\theta})] = \begin{vmatrix} -a_1 S_1 & -a_2 S_2 \\ a_1 C_1 & a_2 C_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 S_{2-1} \neq 0,$$

c'est-à-dire quand $\theta_2 - \theta_1 = q_2 \neq k\pi$ qui signifie que les deux premiers membres ne sont pas alignés. En supposant que cette condition reste vraie le long de Γ , l'inverse $-\{1\}$ de \mathbf{V} est

$$\mathbf{V}^{(1)}(\vec{\theta}) = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{-1}(\vec{\theta}) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \frac{1}{a_1 a_2 S_{2-1}} \begin{pmatrix} a_2 C_2 & a_2 S_2 \\ -a_1 C_1 & -a_1 S_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et l'expression de la solution- $\{1\}$ de $\mathbf{V}(\vec{\theta}) \cdot \dot{\vec{\theta}} = \dot{\vec{w}}$ est :

$$\dot{\vec{\theta}}^{(1)} = \mathbf{V}^{(1)}(\vec{\theta}) \cdot \dot{\vec{w}} = \frac{1}{a_1 a_2 S_{2-1}} \begin{pmatrix} a_2 (C_2 \dot{w}_1 + S_2 \dot{w}_2) \\ -a_1 (C_1 \dot{w}_1 + S_1 \dot{w}_2) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pour cette solution, la vitesse $\dot{\theta}_3^{(1)}$ étant égale à 0, le troisième membre conserve la même inclinaison $\theta_3^{(1)}$ par rapport à l'horizontal mais la rotation $q_3 = \theta_3^{(1)} - \theta_2^{(1)}$ de l'articulation de ce membre varie. Maintenant, d'après (4-52) et (4-53), toute solution de $\mathbf{V}(\vec{\theta}) \cdot \dot{\vec{\theta}} = \dot{\vec{w}}$ a pour expression

$$\dot{\vec{\theta}} = \dot{\vec{\theta}}^{(1)} + \dot{\vec{h}} \quad \text{avec} \quad \dot{\vec{h}} = \begin{pmatrix} -\mathbf{B}^{-1}(\vec{\theta})\mathbf{C}(\vec{\theta}) \\ 1 \end{pmatrix} \dot{q}^c,$$

où $\mathbf{C}(\vec{\theta})$ est la troisième colonne du jacobien $\mathbf{V}(\vec{\theta})$ donné par (2-60) et \dot{q}^c , qui est ici un scalaire, a une valeur arbitraire α . Comme

$$\begin{aligned} -\mathbf{B}^{-1}(\vec{\theta})\mathbf{C}(\vec{\theta}) &= \frac{1}{a_1 a_2 S_{2-1}} \begin{pmatrix} -a_2 C_2 & -a_2 S_2 \\ a_1 C_1 & a_1 S_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a_3 S_3 \\ a_3 C_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a_1 a_2 S_{2-1}} \begin{pmatrix} a_3 a_2 S_{3-2} \\ a_1 a_3 S_{1-3} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

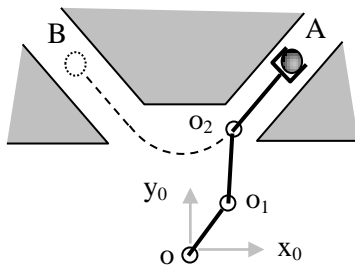
l'ensemble des solutions est donc donné par la forme paramétrique suivante :

$$\dot{\vec{\theta}} = \frac{1}{a_1 a_2 S_{2-1}} \left[\begin{pmatrix} a_2 (C_2 \dot{w}_1 + S_2 \dot{w}_2) \\ -a_1 (C_1 \dot{w}_1 + S_1 \dot{w}_2) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 a_2 S_{3-2} \\ a_1 a_3 S_{1-3} \\ a_2 a_1 S_{2-1} \end{pmatrix} \cdot \alpha \right]. \quad (2-62)$$

On choisit, à chaque instant t durant la trajectoire, la valeur du paramètre $\alpha(t)$ de sorte que les membres du robot ne rentrent jamais en collision avec les obstacles environnants.

EXERCICE 2-7

Avec le robot de l'exemple précédent on veut déplacer un objet d'un point A situé à l'intérieur d'un canal incliné d'un angle $\pi/4$ pour le placer en un point B situé dans un autre canal incliné de $3\pi/4$.



Les canaux sont symétriques par rapport à l'axe y_0 du repère de la base du robot et la trajectoire désirée de l'outil est constituée de deux segments confondus avec les axes des canaux et raccordés par un quart de cercle tangent aux segments en deux

points (b, c) et (-b, c) situés à l'extérieur des canaux. Quand l'outil parcourt le quart du cercle entre les instants t_1 et $t_1 + \Delta t$, le troisième membre du robot tourne avec une vitesse constante $\dot{\theta}_3$. À l'extérieur du raccordement, ce membre doit se superposer à l'axe du canal qu'il traverse.

- 1) Écrire l'expression de $\alpha(t) = \dot{\theta}_3(t)$.
- 2) Soit $[w_{10}, w_{20}]$ la position initiale de A. Déterminer les inclinaisons initiales des membres $\theta_1(0)$, $\theta_2(0)$ et $\theta_3(0)$.
- 3) Tenant compte de (2-62) et par l'itération $\vec{\theta}(t + dt) = \vec{\theta}(t) + \dot{\vec{\theta}}(t).dt$, on obtient $\vec{\theta}(t)$ en tout instant t . Dédurre $\vec{q}(t)$ et $\vec{w}(t)$ puis, en choisissant les valeurs de la durée t_f de ce mouvement, de t_1 , de Δt et des autres paramètres, simuler le mouvement du robot.

2-5 CINÉMATIQUE DES MANIPULATEURS PARALLÈLES

La résolution analytique de la cinématique directe des manipulateurs parallèles se complique à cause de la présence d'articulations passives (non motorisées) dont la rotation ou la translation n'est pas volontaire mais dépend des articulations actives. En général, il est plus simple analytiquement d'obtenir directement la cinématique inverse sans passer par la cinématique directe. Il s'agit donc de déterminer le vecteur \vec{q}_a des articulations actives qui confère à l'outil une configuration désirée \vec{w} . Comme pour les manipulateurs séries, il n'existe pas une méthode générale pour résoudre analytiquement ce problème, chaque cas doit être traité selon ses particularités.

Exemple 2-13

Le degré de liberté du manipulateur à 5 bars représenté sur la figure est, d'après Grübler (voir section 1-1),

$$DL = m(N - 1 - J) + \sum_{i=1}^J f_i$$

où

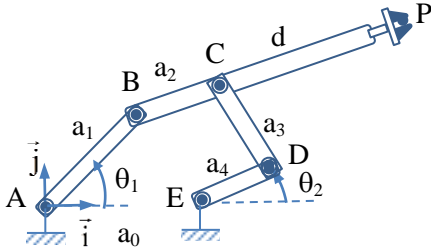
$m = 3$ (les 3 degrés de liberté d'un solide dans le plan),

$N = 5$ (le nombre des membres),

$J = 5$ (le nombre des articulations),

$f_i = 1$ (le degré de mobilité de l'articulation i).

On obtient $DL = 2$. Il suffit donc de deux moteurs, placés préférentiellement aux articulations fixes A et E, pour obtenir une configuration $\vec{w} = [w_1 \ w_2 \ w_3]^T$ désirée où (w_1, w_2) est la position de la pointe P de l'outil par rapport au repère (\vec{i}, \vec{j}) en A et $w_3 = \alpha$ est l'inclinaison du vecteur d'approche par rapport à l'horizontale (le sens positif est trigonométrique).



Le problème de la cinématique inverse de ce robot consiste à déterminer les rotations θ_1 et θ_2 des articulations actives A et E en fonction de w_1, w_2 et $w_3 = \alpha$. Or, en considérant la branche ABP,

$$w_1 = a_1 C\theta_1 + (a_2 + d)C\alpha,$$

$$w_2 = a_1 S\theta_1 + (a_2 + d)S\alpha,$$

d'où

$$\theta_1 = \text{atan2}[w_2 - (a_2 + d)S\alpha, w_1 - (a_2 + d)C\alpha].$$

D'autre part, pour déterminer θ_2 nous avons besoin de connaître l'angle β entre les membres ED et DC. Cet angle étant le supplément de l'angle au sommet D du triangle CDE, on a :

$$EC^2 = a_3^2 + a_4^2 + 2a_3a_4C\beta.$$

Mais

$$\begin{aligned} \vec{EC} &= \vec{EA} + \vec{AC} \\ &= -a_0\vec{i} + (a_1C\theta_1 + a_2C\alpha)\vec{i} + (a_1S\theta_1 + a_2S\alpha)\vec{j}. \end{aligned}$$

En posant

$$K = \frac{(a_1C\theta_1 + a_2C\alpha - a_0)^2 + (a_1S\theta_1 + a_2S\alpha)^2 - (a_3^2 + a_4^2)}{2a_3a_4},$$

et en admettant que $-1 \leq K \leq 1$, on a :

$$\beta = \pm \text{Arccos } K.$$

Ces deux solutions opposées de β correspondent à deux coudes D symétriques par rapport à EC.

Enfin pour obtenir θ_2 , écrivons les coordonnées de P en fonction de cet angle (en considérant cette fois la deuxième branche EDCP) :

$$w_1 = a_0 + a_4C\theta_2 + a_3C(\theta_2 + \beta) + dC\alpha,$$

$$w_2 = a_4S\theta_2 + a_3S(\theta_2 + \beta) + dS\alpha.$$

ou, en décomposant $C(\theta_2 + \beta)$ et $S(\theta_2 + \beta)$, les équations précédentes peuvent se mettre sous la forme :

$$(a_4 + a_3C\beta)C\theta_2 - (a_3S\beta)S\theta_2 = w_1 - a_0 - dC\alpha$$

$$(a_3S\beta)C\theta_2 + (a_4 + a_3C\beta)S\theta_2 = w_2 - dS\alpha.$$

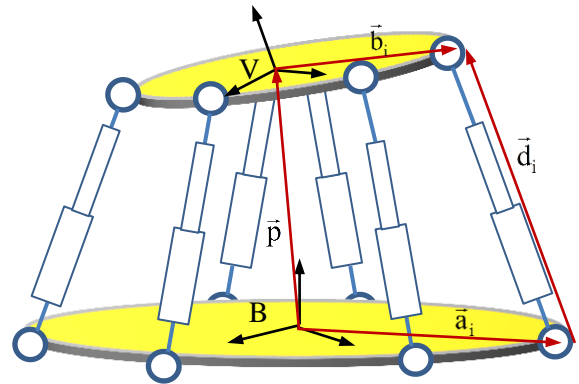
La solution de ces équations en $C\theta_2$ et $S\theta_2$ est

$$C\theta_2 = \frac{\begin{vmatrix} (w_1 - a_0 - dC\alpha) & -(a_3S\beta) \\ (w_2 - dS\alpha) & (a_4 + a_3C\beta) \end{vmatrix}}{(a_4 + a_3C\beta)^2 + (a_3S\beta)^2} = Q,$$

$$S\theta_2 = \frac{\begin{vmatrix} (a_4 + a_3C\beta) & (w_1 - a_0 - dC\alpha) \\ (a_3S\beta) & (w_2 - dS\alpha) \end{vmatrix}}{(a_4 + a_3C\beta)^2 + (a_3S\beta)^2} = R.$$

Donc $\theta_2 = \text{atan2}(R, Q)$.

Exemple 2-14



Rattachons à la plaque fixe de la plate-forme de Stewart-Gough (voir section 1-1) un repère B et à sa plaque mobile un repère V. La configuration de la

plaque mobile se définit par la position \vec{p} de l'origine de V par rapport à B et par la matrice de rotation \mathbf{R} de V par rapport à B. Une configuration désirée (\mathbf{R}, \vec{p}) de cette plaque, s'obtient en ajustant les longueurs d_i , $i = 1, \dots, 6$, des jambes à l'aide des articulations prismatiques.

Soit \vec{a}_i l'écriture dans B du vecteur qui joint l'origine de B à la rotule inférieure d'une jambe i et \vec{b}_i l'écriture dans V du vecteur qui joint l'origine de V à la rotule supérieure de cette jambe. L'écriture dans B du vecteur qui joint ces deux rotules est

$$\vec{d}_i = -\vec{a}_i + \vec{p} + \mathbf{R}\vec{b}_i$$

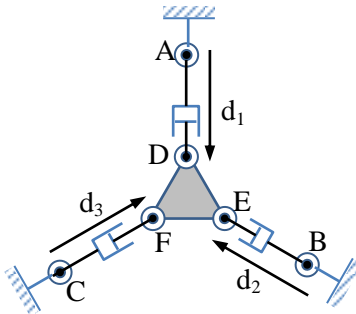
d'où

$$d_i^2 = (-\vec{a}_i + \vec{p} + \mathbf{R}\vec{b}_i)^T (-\vec{a}_i + \vec{p} + \mathbf{R}\vec{b}_i).$$

Ceci détermine les valeurs des articulations actives qui produisent la configuration désirée (\mathbf{R}, \vec{p}) de la plaque mobile.

EXERCICE 2-8

Les articulations A, B, C et les articulations D, E, F forment des triangles équilatéraux. le repère inertiel B est à égale distance a de A, B et C et le repère mobile V est à égale distance b de D, E et F.



Déterminer les longueurs d_i des jambes pour lesquelles la configuration de la plaque DEF est (\mathbf{R}, \vec{p}) , \mathbf{R} étant la rotation plane de V par rapport à B et \vec{p} est le vecteur joignant l'origine de B et celle de V.

Mouvement différentiel. Les exemples précédents montrent qu'il est possible de déterminer le vecteur \vec{q}_a des articulations actives en fonction de la configuration \vec{w} de l'opérateur final (outil ou

plaque) sans passer par la cinématique directe. Ceci permet de définir une fonction g telle que $\vec{q}_a = g(\vec{w})$ et par dérivation on obtient :

$$\dot{\vec{q}}_a = \mathbf{U}(\vec{w}) \dot{\vec{w}} \quad (2-62)$$

où les éléments du jacobien $\mathbf{U}(\vec{w})$ sont les dérivées partielles $\delta g_i / \delta w_j$ au point \vec{w} . Cependant, quand g est obtenue analytiquement, il n'est pas toujours simple de calculer son jacobien.

Une manière plus systématique consiste à établir l'équation $\dot{\vec{w}} = \mathbf{V}(\vec{q}_a) \dot{\vec{q}}_a$ de la cinématique directe puis à résoudre cette équation en $\dot{\vec{q}}_a$ comme nous l'avons fait pour les manipulateurs séries.

Considérons par exemple un mécanisme de type Stewart-Gough à 3 jambes comportant chacune 3 articulations, deux de degré de mobilité 1 et une rotule.

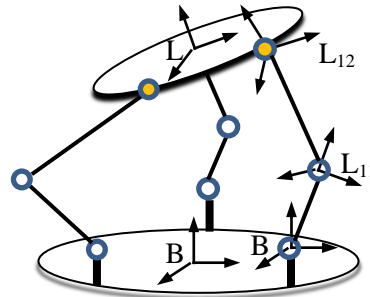


Fig.2-22 Plate-forme à 3 jambes

Noter que la rotule est équivalente à 3 articulations rotatives de même origine. La formule de Grübler montre que le degré de liberté de cette plate-forme est 3 et qu'on peut donc le commander par 3 actionneurs placés préférentiellement sur les articulations fixes inférieures.

En considérant une jambe quelconque i , désignons par $\vec{q}^i = [q_1^i \ q_2^i \ q_3^i \ q_4^i \ q_5^i]^T$ le vecteur des articulations de cette jambe. la matrice de transformation du repère L au repère B s'obtient en effectuant la multiplication :

$$\mathbf{T}_B^L(\vec{q}^i) = \mathbf{T}_{12}^L(q_3^i, q_4^i, q_5^i) \mathbf{T}_{11}^{i2}(q_2^i) \mathbf{T}_B^{i1}(q_1^i)$$

où \mathbf{T}_{i2}^L est la transformation homogène dont le vecteur de position joint l'origine de L_{i2} à l'origine de L et dont la matrice de rotation est le produit des rotations q_3^i, q_4^i, q_5^i autour des 3 vecteurs de base de L_{i2} . Chaque transformation $\mathbf{T}_B^L(\bar{q}^i)$ définit une configuration $\bar{w}^i(\bar{q}^i)$ de l'opérateur final en fonction du vecteur d'articulation de la jambe i . Comme à l'opérateur final correspond une seule configuration \bar{w} , on a :

$$\bar{w} = \bar{w}^1(\bar{q}^1) = \bar{w}^2(\bar{q}^2) = \bar{w}^3(\bar{q}^3)$$

et en dérivant ces équations par rapport au temps, on déduit que

$$\begin{aligned} \dot{\bar{w}} &= \mathbf{V}_1(\bar{q}^1)\dot{\bar{q}}^1 = \mathbf{V}_2(\bar{q}^2)\dot{\bar{q}}^2, \\ \mathbf{V}_2(\bar{q}^2)\dot{\bar{q}}^2 &= \mathbf{V}_3(\bar{q}^3)\dot{\bar{q}}^3 \end{aligned} \quad (2-64)$$

où $\mathbf{V}_i(\bar{q}^i) = \delta \bar{w}^i / \delta \bar{q}^i \in \mathbb{R}^{6 \times 5}$ est le jacobien de la jambe i au point \bar{q}^i . Des équations (2-64), on déduit que le vecteur \bar{q} de toutes les articulations vérifie

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_1(\bar{q}^1) & -\mathbf{V}_2(\bar{q}^2) & 0 \\ 0 & \mathbf{V}_2(\bar{q}^2) & -\mathbf{V}_3(\bar{q}^3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\bar{q}}^1 \\ \dot{\bar{q}}^2 \\ \dot{\bar{q}}^3 \end{pmatrix} = \mathbf{H}(\bar{q})\dot{\bar{q}} = 0. \quad (2-65)$$

À partir de cette équation, on peut déterminer le vecteur des articulations passives $\bar{q}_p = [q_2^1 \ \cdots \ q_5^1 \ \cdots \ q_2^3 \ \cdots \ q_5^3]^T$ en fonction du vecteur des articulations actives $\bar{q}_a = [q_1^1 \ q_1^2 \ q_1^3]^T$. En effet, en réarrangeant l'ordre des variables d'articulation, l'équation (2-65) peut se mettre sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}_a(\bar{q}) & \mathbf{H}_p(\bar{q}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{q}_a \\ \bar{q}_p \end{pmatrix} = \mathbf{H}_a(\bar{q})\bar{q}_a + \mathbf{H}_p(\bar{q})\bar{q}_p = 0$$

où $\mathbf{H}_a \in \mathbb{R}^{12 \times 3}$ et $\mathbf{H}_p \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$. Si $\mathbf{H}_p(\bar{q})$ n'est pas inversible, on dit que \bar{q} est un point singulier pour les articulations actives choisies. mais si $\mathbf{H}_p(\bar{q})$ est inversible, on a :

$$\bar{q}_p = -\mathbf{H}_p^{-1}(\bar{q})\mathbf{H}_a(\bar{q})\bar{q}_a. \quad (2-66)$$

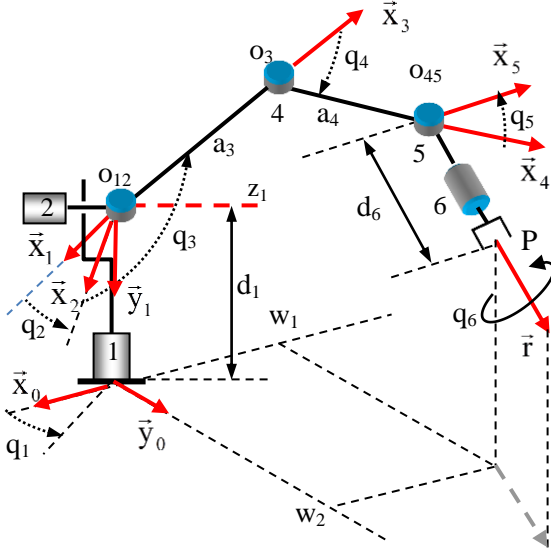
Sous cette condition, on peut obtenir la configuration \bar{w} en fonction du vecteur $\dot{\bar{q}}_a$ des articulations actives en considérant l'une des trois jambes, disons la première. De (2-64), on a :

$$\dot{\bar{w}} = \mathbf{V}_1(q_1^1, q_2^1, q_3^1, q_4^1, q_5^1) \begin{pmatrix} \dot{q}_1^1 \\ \dot{q}_2^1 \\ \dot{q}_3^1 \\ \dot{q}_4^1 \\ \dot{q}_5^1 \end{pmatrix}.$$

Comme q_1^1 est la première composante du vecteur \bar{q}_a et les autres variables q_i^1 , $i = 2, \dots, 5$, se déduisent de (2-66) en fonction de \bar{q}_a , l'équation précédente s'écrit :

$$\dot{\bar{w}} = \mathbf{V}(\bar{q}_a)\dot{\bar{q}}_a \quad (2-67)$$

qui est l'équation de la cinématique directe du manipulateur parallèle. La résolution de la cinématique inverse ainsi que la détermination des singularités suivent les mêmes procédures et règles que pour les manipulateurs séries.

AUTRES EXERCICES ET COMPLÉMENTS**2-9. Cinématique inverse d'un robot Intellex (résolution analytique)**

La figure représente un manipulateur Intellex dont les vecteurs de repérage sont représentés selon la convention de Denavit-Harenberg (voir exercice 1-14). À part les deux premiers membres, les quatre autres sont dans un même plan π pouvant tourner autour de l'axe horizontal z_1 . Cet axe est perpendiculaire au plan π' qui contient les vecteurs \vec{x}_1, \vec{y}_1 et \vec{x}_2 et qui peut tourner autour de l'axe z_0 du support.

- 1) Écrire l'expression de q_6 .
- 2) Montrer que \vec{x}_1 a la même direction que la projection du vecteur $\vec{o}_{12}P \wedge \vec{r}$ sur le plan horizontal et déduire que

$$q_1 = \text{atan2}[(w_3 - d_1)w_4 - w_1w_6, w_2w_6 - (w_3 - d_1)w_5]$$
 Dans quels cas q_1 est arbitraire ?
- 3) Montrer que \vec{x}_2 a la même direction que la projection de $\vec{o}_{12}P$ ou de \vec{r} sur le plan π' et déduire que

$$q_2 = \begin{cases} \text{atan2}(d_1 - w_3, C_1w_1 + S_1w_2) & \text{si } \vec{r} \text{ horizontal,} \\ \text{atan2}(-w_6, C_1w_4 + S_1w_5) & \text{si } \vec{o}_{12}P \text{ horizontal.} \end{cases}$$
 Dans quel cas q_2 est arbitraire ?
- 4) Écrire les composantes de $\vec{b} = \vec{o}_{12}O_{45}$ en fonction des w_i , de d_6 et de m et déduire que

$$q_4 = \pm \arccos \left(\frac{\|\vec{b}\|^2 - (a_3^2 + a_4^2)}{2a_3a_4} \right)$$

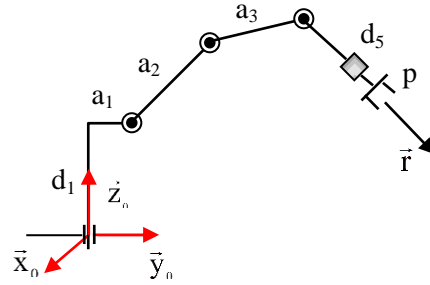
- 5) Montrer que les projections de \vec{b} sur \vec{x}_2 et \vec{y}_2 sont données par

$$\begin{aligned} b_{x_2} &= C_2(C_1b_1 + S_1b_2) - S_2b_3 \\ &= (a_3 + a_4C_4)C_3 - (a_4S_4)S_3 \\ b_{y_2} &= S_1b_1 - C_1b_2 \\ &= (a_4S_4)C_3 + (a_3 + a_4C_4)S_3 \end{aligned}$$

Déduire que $q_3 = \text{atan2}(A, B)$ où A et B sont des fonctions de q_1 et q_4 à déterminer.

- 6) Projeter \vec{x}_5 sur \vec{x}_2 et \vec{y}_2 et déduire que

$$q_{345} = \text{atan2}[S_2w_6 - C_2(C_1w_4 + S_1w_5), S_1w_4 - C_1w_5]$$
 d'où $q_5 = q_{345} - q_3 - q_4$.

2-10 Cinématique inverse d'un robot Microalpha (résolution numérique)

La position \vec{p} et l'orientation \vec{r} du robot Microalpha représenté par la figure sont liées aux variables d'articulation par

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \begin{bmatrix} C_1[a_1 + a_2C_2 + a_3C_{23} - d_5S_{234}] \\ S_1[a_1 + a_2C_2 + a_3C_{23} - d_5S_{234}] \\ d_1 - a_1S_2 - a_2S_{23} - a_3C_{234} \end{bmatrix} \\ \vec{r} &= \mu \begin{bmatrix} -C_1S_{234} \\ -S_1S_{234} \\ -S_1S_{234} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- a) Interpréter ces expressions géométriquement.
- b) Écrire l'expression du jacobien et déterminer les points singuliers.
- c) Dans un plan perpendiculaire à l'axe y_0 , considérer un cercle C de centre c et de rayon R inclus dans le domaine de travail du robot et ne passant pas par un point singulier. Si la pointe p

décrit C et le plan de l'outil reste tangent au cercle, écrire en fonction de l'abscisse curviligne s l'expression de $\vec{w}(s) = [\vec{p}(s) \quad \vec{r}(s)]$.

- d) Déterminer par cinématique inverse le vecteur d'articulation \vec{q}_0 qui produit la configuration \vec{w} pour $s = 0$.
- e) On choisit pour la vitesse curviligne ds/dt le profil suivant :

$$\dot{s}(t) = \begin{cases} at^3 + bt^2 & \text{si } t < T/8, \\ v & \text{si } T/8 \leq t \leq 7T/8, \\ a(T-t)^3 + b(T-t)^2 & \text{si } 7T/8 < t \leq T. \end{cases}$$

où T est la durée de parcours du cercle. Déterminer a , b et v de sorte que l'accélération d^2s/dt^2 soit continue sur $[0, T]$.

- f) Choisir les valeurs des paramètres du robot.
- g) Écrire l'expression de $\vec{w}(t)$ et, à l'aide de Matlab et par pseudo-inversion, calculer et représenter la vitesse d'articulation $\dot{\vec{q}}^*(t)$.
- h) Par intégration à l'aide de l'instruction « quad » de Matlab, déduire les valeurs du vecteur d'articulations $\vec{q}(t)$, $0 \leq t \leq T$.
- i) Vérifier ce résultat en simulant le mouvement de l'outil à l'aide de la fonction « [simrob](#) ».
- j) Pour éviter les obstacles environnants, on doit maintenir le second membre horizontal. Sous cette contrainte, déterminer par inversion-{1} une solution qui permet à la pointe p de l'outil de décrire un cercle C_1 appartenant au nouveau domaine de travail et à un plan perpendiculaire à l'axe y_0 .

Un carré d'arrête $\sqrt{2}$ est manipulé par deux jambes identiques. Chaque jambe comporte deux membres de même longueur 2 et trois articulations rotatives dont l'inférieure est fixe.

- a) Déterminer le degré de liberté de ce robot.

Le vecteur \vec{i} du repère inertiel B est porté par le segment horizontal AB dont la longueur est 2 et l'origine O de ce repère est au milieu de AB. Les vecteurs \vec{x} et \vec{y} du repère mobile V sont parallèles aux arrêtes du carré et son origine P est au centre de ce carré. On pose θ_i l'angle entre \vec{i} est un membre i et on suppose que les articulations A, B et C sont actives et les autres sont passives.

- b) Déterminer le vecteur \vec{q}_a des articulations actives qui confèrent au carré une configuration désirée $\vec{w} = (p_1, p_2, \varphi)$ où p_1 et p_2 sont les coordonnées de P par rapport à B et φ est l'angle de \vec{i} à \vec{x} .
- c) Déterminer la transformation T_B^V de deux manières et déduire l'équation du vecteur \vec{q} de toutes les articulations. Peut-on toujours obtenir le vecteur \vec{q}_p des articulations passives en fonction du vecteur \vec{q}_a ?
- d) Écrire l'équation de la cinématique directe liant \vec{w} à \vec{q}_a .
- e) Résoudre la cinématique inverse par pseudo-inversion.
- f) Simuler le mouvement du système pour un choix donné de la trajectoire $\vec{w}(t)$.

2-11

