

Chapitre 4

ROBUSTESSE

Les politiques de commandes PP, LQG et MINI-MAX données au chapitre 2 ont été établies en admettant que le modèle du système commandé représente correctement la réalité physique. Or un modèle est presque toujours construit en se basant sur des hypothèses simplificatrices et l'évaluation de ses paramètres est inévitablement entachée d'erreur. Dans le présent chapitre nous allons montrer comment représenter les incertitudes du modèle et nous donnerons des outils pour analyser leurs effets sur la stabilité et la performance. Une politique de commande est dite robuste si elle conserve la stabilité et la bonne performance en dépit de l'imperfection du modèle et de la variation éventuelle de ses paramètres.

4-1 Incertitudes

La fonction de transfert nominale $G(s)$ obtenue par modélisation diffère de la fonction de transfert $G_r(s)$ du système réel pour des raisons diverses pouvant être groupées en deux catégories : incertitudes de modélisation et incertitudes paramétriques.

- a) Les incertitudes de modélisation proviennent des hypothèses simplificatrices adoptées lors de l'élaboration du modèle. Ces simplifications sont généralement volontaires afin de rendre le modèle mathématiquement manipulable. Elles concernent surtout les dynamiques non dominantes dont l'effet n'est significatif qu'à des hautes fréquences (dynamique des actionneurs et des capteurs, capacités parasites, flexibilités des éléments mécaniques, retard négligé ou approximé, ...). La linéarisation des équations introduit un autre type d'erreur qui rentre dans cette catégorie et se manifeste au cours du régime transitoire quand le système est encore loin de son point de fonctionnement.
- b) Les incertitudes paramétriques concernent les erreurs d'évaluation des valeurs numériques

des paramètres (position des pôles et des zéros, valeurs des gains statiques) qui peuvent d'ailleurs se modifier avec le temps à cause de la fatigue, de l'usure et des conditions de fonctionnement.

Représentation multiplicative

La valeur numérique associée à un paramètre est généralement la moyenne $\bar{a}$ de deux valeurs extrêmes $a_{\min}$ et $a_{\max}$. Concernant la vraie valeur a de ce paramètre, on peut seulement affirmer qu'elle appartient à l'intervalle $[a_{\min}, a_{\max}]$ ce qui revient à écrire :

$$a = \bar{a} + \frac{a_{\max} - a_{\min}}{2} \delta = (1 + r\delta)\bar{a} \quad (4-1)$$

où δ est un nombre inconnu tel que $|\delta| \leq 1$ et

$$r = \frac{(a_{\max} - a_{\min})/2}{\bar{a}}$$

est l'erreur relative maximum sur la valeur de a . La forme de la relation (4-1) qui définit l'incertitude sur la valeur d'un paramètre, peut être étendue aux fonctions de transfert pour englober à la fois les incertitudes paramétriques et les incertitudes de modélisation. Soit $G(s)$ la matrice de transfert du modèle. Pour une fréquence ω donnée, on peut généralement affirmer, par expérience ou par déduction, que l'écart relatif en norme entre $G(j\omega)$ et la matrice de transfert inconnue $G_r(j\omega)$ du système réel ne dépasse pas une certaine valeur $|w(j\omega)|$. En d'autres termes, pour $G(j\omega)$ carrée et inversible,

$$\bar{\sigma}\{[G_r(j\omega) - G(j\omega)]G^{-1}(j\omega)\} \leq |w(j\omega)|. \quad (4-2)$$

Pour G quelconque, au lieu de (4-2) et par analogie avec (4-1), on peut dire que la fonction de transfert $G_r(s)$ du système réel appartient à l'ensemble des matrices de transfert G défini par

$$\mathcal{G} = \left\{ \tilde{G}(s) \mid \tilde{G}(s) = [I + w(s)\Delta(s)].G(s) \right\} \quad (4-3)$$

où $\Delta(s)$ est une matrice inconnue telle que

$$\sup_{\omega} \bar{\sigma}[\Delta(j\omega)] = \|\Delta(j\omega)\|_{\infty} \leq 1, \quad \Delta(s) \in \mathbb{C}^{q \times q}$$

et $w(s)$ est une fonction de transfert scalaire fixe appelée *poids d'incertitude* ou *fonction de pondération*. Parfois il est convenable de remplacer la fonction scalaire $w(s)$ par une matrice de transfert $W(s) \in \mathbb{C}^{q \times q}$.

L'ensemble $\mathcal{G}$ défini par (4-3) est la *représentation multiplicative* de l'incertitude. D'autres types de représentations seront mentionnés plus loin mais concentrons-nous pour le moment sur la représentation (4-3).

Nous attirons l'attention qu'en modélisant un système il est important de tenir compte des facteurs qui peuvent le rendre instable et de les introduire dans le modèle. Avec cette précaution, le nombre de pôles instables du modèle $G(s)$ sera égal au nombre des pôles instables de la fonction de transfert $G_r(s)$ du système réel. Ceci nous conduit à supposer que $w(s)$ et $\Delta(s)$ intervenant dans (4-3) sont strictement stables et que la multiplication de $G(s)$ par $[1 + w(s)\Delta(s)]$ ne simplifie pas les pôles instables de $G(s)$. Nous désignerons par $\mathbb{D}$ l'ensemble des matrices $\Delta(s) \in \mathbb{C}^{q \times q}$ ayant ces propriétés et telles que $\|\Delta(j\omega)\|_{\infty} \leq 1$. Nous envisagerons plus loin le cas où le modèle $G(s)$ n'a pas nécessairement le même nombre de pôles instables que le système réel $G_r(s)$.

Pour donner une interprétation à l'ensemble $\mathcal{G}$, considérons un système SISO modélisé par une fonction de transfert $g(s)$. D'après (4-3), un élément de $\mathcal{G}$ est une fonction de transfert $\tilde{g}(s)$ qui vérifie

$$\begin{aligned} |\tilde{g}(j\omega) - g(j\omega)| &= |w(j\omega)| |\Delta(j\omega)| |g(j\omega)|, \\ &\leq |w(j\omega)| |g(j\omega)| \quad \forall \omega. \end{aligned}$$

On en déduit que pour chaque fréquence ω le point complexe $\tilde{g}(j\omega)$ est à l'intérieur d'un cercle de centre $g(j\omega)$ et de rayon $|w(j\omega)| |g(j\omega)|$. En désignant par Γ_1 et Γ_2 les enveloppes de ces cercles,

les éléments de $\mathcal{G}$ sont les fonctions de transfert dont la courbe de Nyquist est entre les courbes Γ_1 et Γ_2 comme le montre la figure 4-1. La courbe de Nyquist $g_r(j\omega)$ du système réel est quelque part à l'intérieur de ce domaine.

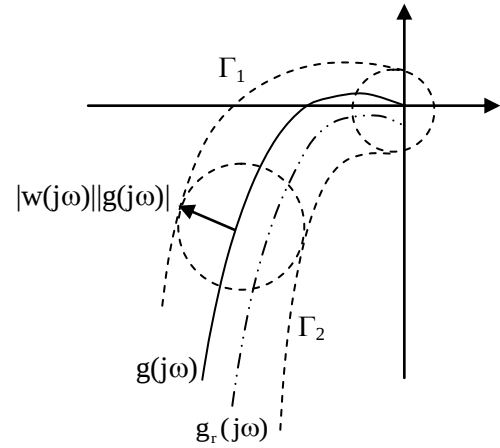


Fig. 4-1 Interprétation de l'ensemble $\mathcal{G}$

Choix de la fonction de pondération

Ayant le modèle $G(s)$, l'ensemble $\mathcal{G}$ sera complètement défini lorsqu'on se donne la fonction scalaire (ou matricielle) $w(s)$. Le choix de cette fonction dépend évidemment de notre estimation du maximum de l'erreur commise en modélisant le système ou en évaluant ses paramètres.

Exemple 4-1

Modélisons un intégrateur par

$$g(s) = \frac{1}{s}$$

tout en sachant qu'il comporte un certain retard τ qui ne dépasse pas 0.2 sec. La fonction de transfert $g_r(s)$ du système réel appartient donc à l'ensemble des fonctions

$$\mathcal{G} = \left\{ g_{\tau}(s) = \frac{1}{s} e^{-\tau s}; 0 \leq \tau \leq 0.2 \right\}.$$

Pour retrouver la représentation (4-3), un élément $g_{\tau}(s)$ de $\mathcal{G}$ doit être exprimé sous la forme

$$g_{\tau}(s) = [1 + w(s)\Delta(s)].g(s)$$

$\Delta(s)$ étant ici une certaine fonction scalaire telle que $|\Delta(j\omega)| \leq 1 \quad \forall \omega$. On en déduit que la fonction $w(s)$ doit vérifier l'inégalité

$$|w(j\omega)| \geq |g_\tau(j\omega)g^{-1}(j\omega) - 1| \quad \forall \omega, \forall \tau. \quad (4-4)$$

En remplaçant dans (4-4) g_τ et g par leurs expressions, on trouve que $w(s)$ doit satisfaire l'inégalité

$$|w(j\omega)| \geq \max_\tau \left| e^{-j\omega\tau} - 1 \right| \quad \forall \omega$$

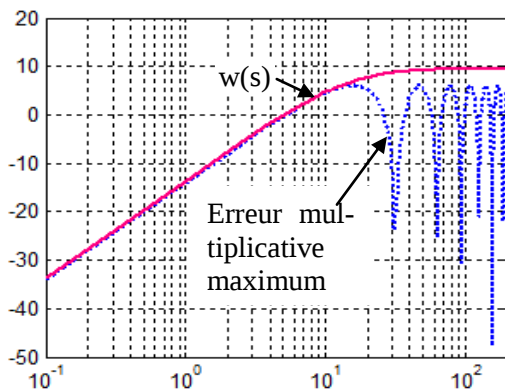
ou

$$|w(j\omega)| \geq \max_\tau \left| \frac{e^{-j\frac{\omega\tau}{2}} - 1}{e^{j\frac{\omega\tau}{2}}} - 1 \right| \quad (4-5)$$

$$= \max_\tau \left| 2 \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right| \quad \forall \omega$$

Afin de mieux cerner l'incertitude, il est préférable que l'inégalité précédente soit la plus voisine possible de l'égalité. D'un autre côté, pour alléger les calculs, l'expression de $w(s)$ doit avoir une forme simple. Or le second membre de (4-5) est au plus égal à 2 et, quand $\omega \rightarrow 0$, il tend vers 0 avec une pente τ (≤ 0.2). Essayons donc une fonction de transfert $w(j\omega)$ dont le module tend vers 0 avec une pente 0.21 quand $\omega \rightarrow 0$ et tend vers 3 quand $\omega \rightarrow \infty$. Une fonction simple qui vérifie ces conditions est la suivante :

$$w(s) = \frac{0.21s}{0.07s + 1}.$$



Pour s'assurer que cette fonction vérifie (4-5) pour toute fréquence ω et tout retard τ , représentons dans le plan de Bode les deux membres de cette inégalité pour le cas le plus défavorable $\tau = 0.2$. À l'aide de Matlab, on obtient la figure ci-dessus qui montre bien que ce choix de $w(s)$ est convenable mais il est possible de l'améliorer à hautes fréquences.

EXERCICE 4-1

Essayer d'améliorer le choix de $w(s)$ de l'exemple précédent.

EXERCICE 4-2

On modélise un système SISO par $g(s)$ en négligeant un terme qui n'influence le système qu'à des fréquences supérieures à 10 rd/sec. Le système réel appartient donc à l'ensemble

$$\mathcal{G} = \left\{ g_\tau(s) = g(s) \frac{1}{\tau s + 1}, \tau \leq 0.1 \right\}.$$

Déterminer une fonction de pondération $w(s)$.

Généralement la fonction de pondération est choisie de la forme :

$$w(s) = w_\infty \frac{\tau s + w_0}{\tau s + w_\infty} \quad (4-6)$$

où w_0 et w_∞ sont les erreurs relatives maximums respectivement à faibles et à hautes fréquences. D'autre part, si $w_0 < 1 < w_\infty$, $1/\tau$ est approximativement la fréquence pour laquelle l'erreur relative maximum est de 100 %. La figure 4-2 montre dans le plan de Bode la courbe asymptotique de $|w(j\omega)|$.

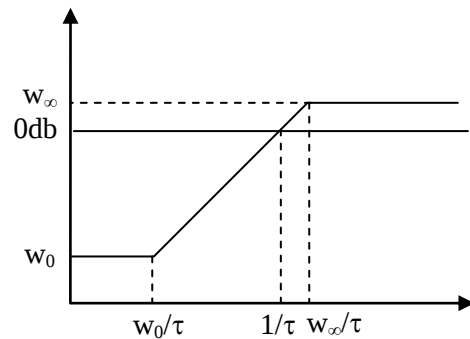


Fig. 4-2 Diagramme de Bode de $|w(s)|$

Exemple 4-2

Le modèle

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{2}{s+1} & 0 \\ \frac{s}{(s+1)^2} & \frac{1}{2s+1} \end{pmatrix}$$

est obtenu en négligeant la dynamique des deux capteurs (supposés de 1^{er} ordre) dont les constantes de temps τ_1 et τ_2 sont respectivement autour de 0.025 et 0.05 sec avec une incertitude sur chacune de 20 %. En posant

$$H(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau_1 s + 1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tau_2 s + 1} \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} 0.02 \leq \tau_1 \leq 0.03 \\ 0.04 \leq \tau_2 \leq 0.06 \end{cases}$$

la fonction de transfert $G_r(s)$ du système réel appartient donc à l'ensemble des matrices

$$G_r = \{ \tilde{G}(s) \mid \tilde{G}(s) = H(s)G(s) \}. \quad (4-7)$$

La fonction de pondération $w(s)$ de l'ensemble $\mathcal{G}$ défini par (4-3) doit satisfaire la relation

$$|w(j\omega)| \geq \bar{\sigma}[(\tilde{G} - G)G^{-1}] = \bar{\sigma}(H - I) \quad (4-8)$$

pour toute fréquence ω et pour toutes valeurs possibles de τ_1 et τ_2 . Or, la matrice $H - I$ étant diagonale, sa plus grande valeur singulière est son plus grand élément en valeur absolue. Comme $\tau_2 > \tau_1$, $|1 - 1/(\tau_2 j\omega + 1)| > |1 - 1/(\tau_1 j\omega + 1)|$ et l'inégalité (4-8) est équivalente à la suivante

$$|w(j\omega)| \geq \max_{\tau_2} \left| \frac{\tau_2 j\omega}{\tau_2 j\omega + 1} \right| \quad \forall \omega$$

qui devient une égalité pour

$$w(s) = \frac{0.06s}{0.06s + 1}. \quad (4-9)$$

À noter que cette fonction a la forme (4-6) avec $w_0 = 0$, $w_\infty = 1$ et $\tau = 0.06$.

Incertitude structurée

Il est important de savoir que l'ensemble $\mathcal{G}$ défini par (4-3) contient généralement des matrices de transfert $\tilde{G}(s)$ qui ne peuvent pas apparaître réellement. Nous dirons que ces matrices sont superflues. De retour à l'exemple précédent, les matrices de transfert qui peuvent apparaître sont celles de l'ensemble G_r défini par (4-7) où $H(s)$ est une matrice diagonale. Or, comme la matrice $\Delta(s) \in \mathbb{D}$ de la définition (4-3) de $\mathcal{G}$ n'est pas nécessairement diagonale, il en est de même de $[I + w(s)\Delta(s)]$, d'où $\mathcal{G}$ contient des matrices qui ne sont pas dans G_r ce qui montre bien que $\mathcal{G}$ est une définition « exagérée ou pessimiste » de l'incertitude.

Une définition qui reflète mieux la réalité physique s'obtient en examinant séparément chaque source d'incertitude. Pour illustrer ce fait, reprenons encore une fois l'exemple 4-2. L'incertitude provient du fait que la dynamique $H(s)$ des capteurs a été négligée et que les constantes de temps τ_1 et τ_2 de ces organes ne sont pas connues avec précision. Au lieu d'exprimer globalement l'incertitude sur G , faisons le pour chaque capteur pris à part. Les fonctions de transfert possibles du premier capteur ont pour expression

$$\tilde{h}_1(s) = [1 + w_1(s)\delta_1(s)]h_1(s)$$

avec
$$h_1(s) = \frac{1}{0.025s + 1},$$

$\delta_1(s)$ est une fonction scalaire inconnue telle que $|\delta_1(j\omega)| \leq 1 \quad \forall \omega$ et

$$w_1(s) = \frac{0.005s}{0.03s + 1}.$$

Cette fonction de pondération est choisie de la forme (4-6) de sorte que, pour $\tau_1 \in [0.02, 0.03]$,

$$\begin{aligned} |w_1(j\omega)| &\geq \max_{\tau_1} |1 - \tilde{h}_1(j\omega)h_1^{-1}(j\omega)| \\ &= \max_{\tau_1} \left| \frac{(\tau_1 - 0.025)j\omega}{\tau_1 j\omega + 1} \right| \quad \forall \omega. \end{aligned}$$

De même, les fonctions de transfert possibles du second capteur ont pour expression

$$\tilde{h}_2(s) = [1 + w_2(s)\delta_2(s)]h_2(s)$$

avec
$$h_2(s) = \frac{1}{0.05s + 1},$$

$\delta_2(s)$ est une fonction scalaire quelconque telle que $|\delta_2(j\omega)| \leq 1 \quad \forall \omega$ et

$$w_2(s) = \frac{0.01s}{0.06s + 1}.$$

Par conséquent, la matrice de transfert $H(s)$ des capteurs est l'une des matrices

$$\begin{aligned} \tilde{H}(s) &= \begin{pmatrix} \tilde{h}_1(s) & 0 \\ 0 & \tilde{h}_2(s) \end{pmatrix} \\ &= [I + W(s)\Delta(s)]\bar{H}(s) \end{aligned}$$

avec $W(s) = \text{diag}[w_1(s), w_2(s)]$, $\Delta = \text{diag}[\delta_1, \delta_2]$ et $\bar{H} = \text{diag}[h_1(s), h_2(s)]$.

En multipliant $G(s)$ par la dynamique nominale $\bar{H}$ des capteurs, on obtient le modèle corrigé $G_c(s) = \bar{H}(s)G(s)$ et on déduit que la matrice de transfert du système réel appartient à l'ensemble

$$\mathcal{G}_s = \left\{ \tilde{G}(s) \mid \tilde{G}(s) = [I + W(s)\Delta(s)]G_c(s) \right\}$$

Cet ensemble a la même forme que (4-3) à part que la matrice Δ ne peut avoir que la structure diagonale. Cette limitation sur Δ élimine de l'ensemble $\mathcal{G}$ les matrices de transfert superflues.

Quand, dans la définition de l'ensemble $\mathcal{G}$, la matrice Δ , $\|\Delta\|_\infty \leq 1$, n'est pas quelconque dans $\mathbb{D}$ mais doit avoir une structure donnée (par exemple diagonale ou en blocs diagonaux), on dit que l'incertitude est *structurée*. Nous désignerons par $\mathbb{D}_S$ le sous-ensemble de $\mathbb{D}$ constitué de matrices Δ ayant une structure donnée S .

Comme l'incertitude structurée représente mieux la réalité physique, une politique de commande déduite d'une telle représentation de l'incertitude aura évidemment une meilleure performance que lorsque cette représentation est non structurée. Malheureusement, la structuration de l'incertitude complique l'analyse du système de commande et il est plus simple pour le moment de se limiter au cas où l'incertitude est non structurée. Une fois cette étape est franchie, on peut alors aborder les problèmes relatifs à l'incertitude structurée.

Autres types d'incertitudes

Les matrices de transfert de l'ensemble $\mathcal{G}$ défini par (4-3) peuvent être représentées par le schéma bloc de la figure 4-3.

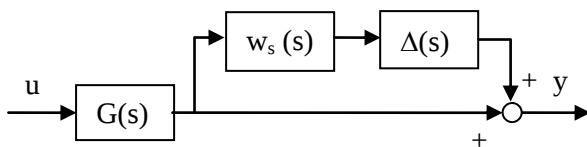


Fig. 4-3 Incertitude multiplicative de sortie

À chaque fonction $\tilde{G}(s) \in \mathcal{G}$ correspond une matrice de transfert $\Delta(s) \in \mathbb{C}^{q \times q}$ telle que

$\|\Delta(s)\|_\infty \leq 1$. La fonction de pondération scalaire $w_s(s)$ est la même pour tous les éléments de $\mathcal{G}$.

Cette configuration montre l'effet de l'incertitude sur la sortie et c'est pour cette raison que nous avons associé à la fonction w l'indice « s ». Cette position de l'incertitude apparaît naturellement quand elle provient des capteurs. Parfois il est convenable que l'effet de l'incertitude soit représentée à l'entrée (par exemple quand l'incertitude provient des actionneurs) et dans ce cas, au lieu de (4-3), on définit l'ensemble $\mathcal{G}$ par

$$\mathcal{G} = \left\{ \tilde{G}(s) \mid \tilde{G}(s) = G(s)[I + w_e(s)\Delta(s)] \right\} \quad (4-10)$$

Alternativement, on peut représenter l'incertitude sous la forme *additive* (quand il s'agit d'une incertitude absolue et non relative) :

$$\mathcal{G} = \left\{ \tilde{G}(s) \mid \tilde{G}(s) = G(s) + w_a(s)\Delta(s) \right\} \quad (4-11)$$

ou sous la forme *multiplicative inverse* qui peut être située soit à la sortie,

$$\mathcal{G} = \left\{ \tilde{G}(s) \mid \tilde{G}(s) = [I + w_{is}(s)\Delta(s)]^{-1}G(s) \right\}, \quad (4-12)$$

soit à l'entrée,

$$\mathcal{G} = \left\{ \tilde{G}(s) \mid \tilde{G}(s) = G(s)[I + w_{ie}(s)\Delta(s)]^{-1} \right\}. \quad (4-13)$$

La figure 4-4 montre les schémas blocs des ensembles (4-11) et (4-12).

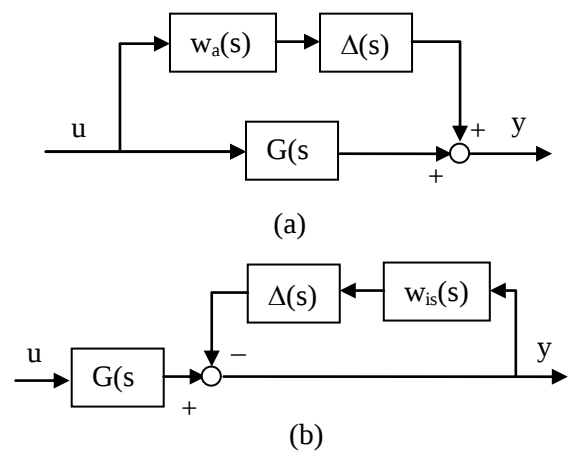


Fig. 4-4 Schémas des incertitudes, additive (a) et multiplicative inverse (b).

La forme multiplicative inverse apparaît naturellement quand l'incertitude se porte sur la valeur des pôles. Considérons par exemple un système dont la fonction de transfert est de la forme :

$$\tilde{G}(s) = \frac{1}{s+a} G_0(s)$$

avec $a_{\min} \leq a \leq a_{\max}$ et $G_0(s)$ est une matrice certaine. Le paramètre incertain « a » peut être remplacé par le second membre de (4-1) ce qui donne

$$\begin{aligned} \tilde{G}(s) &= \frac{1}{s + \bar{a}(1+r\delta)} G_0(s) \\ &= (1 + w_i(s)\delta)^{-1} G(s) \end{aligned} \quad (4-13')$$

avec

$$w_i(s) = \frac{\bar{a}r}{s + \bar{a}} \quad \text{et} \quad G(s) = \frac{G_0(s)}{s + \bar{a}}.$$

On obtient ainsi la forme (4-12) avec l'expression de la fonction de pondération w_i et celle de la fonction de transfert nominale $G(s)$.

Nous attirons l'attention que pour les systèmes MIMO les représentations ci-dessus ne sont pas équivalentes. Selon la source d'incertitude, une représentation peut contenir moins de matrices superflues que d'autres. Pour mieux se conformer à la réalité physique, il est conseillé de ne pas modifier la forme ou la position naturelle des incertitudes. En effet, pour remplacer une incertitude d'ensemble $\mathcal{G}_1$ par une autre d'ensemble $\mathcal{G}_2$, il est nécessaire que $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$ ce qui augmente le nombre des matrices superflues.

Représentation générale de l'incertitude

Bien que les différentes représentations ci-dessus ne soient pas équivalentes, on peut les traiter d'une manière unifiée en adoptant la configuration générale de la figure 4-5.

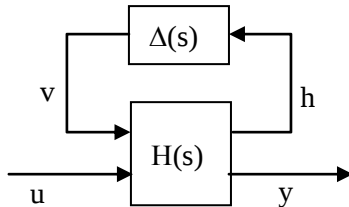


Fig. 4-5 Configuration générale de l'incertitude

Dans cette configuration, la matrice de transfert $H(s)$, d'entrée $[v \ u]^T$ et de sortie $[h \ y]^T$, dépend de la définition de l'ensemble $\mathcal{G}$. Par exemple,

pour l'incertitude multiplicative de la figure 4-3, en désignant par h l'entrée de la matrice Δ et par v sa sortie, on a :

$$\begin{aligned} h &= w_s(s)G(s).u, \quad y = v + G(s).u \\ \rightarrow H_s(s) &= \begin{pmatrix} 0 & w_s(s)G(s) \\ I & G(s) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4-14)$$

Pour l'incertitude additive de la figure 4-4a, on a :

$$\begin{aligned} h &= w_a(s).u, \quad y = v + G(s).u \\ \rightarrow H_a(s) &= \begin{pmatrix} 0 & w_a(s)I \\ I & G(s) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4-15)$$

et pour l'incertitude multiplicative inverse de la figure 4-4b

$$\begin{aligned} h &= -w_{is}(s).v + w_{is}(s)G(s).u, \quad y = -v + G(s).u \\ \rightarrow H_{is}(s) &= \begin{pmatrix} -w_{is}(s)I & w_{is}(s)G(s) \\ -I & G(s) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4-16)$$

La configuration d'incertitude (H, Δ) de la figure 4-5 est aussi valable pour une combinaison de plusieurs formes d'incertitude. Considérons par exemple le système incertain de la figure 4-6 suivante.

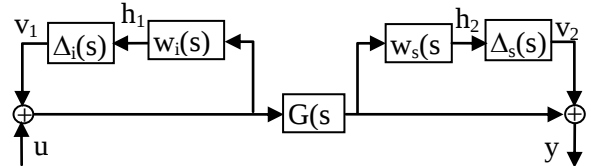


Fig. 4-6 Combinaison de deux formes d'incertitude

On a :

$$\begin{aligned} h_1 &= w_i v_1 + w_i u, \quad h_2 = w_s G v_1 + w_s G u, \\ y &= G v_1 + v_2 + G u \end{aligned}$$

et en posant $h = [h_1 \ h_2]^T$ et $v = [v_1 \ v_2]^T$, on tire

$$H(s) = \begin{pmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) \end{pmatrix}.$$

avec

$$\begin{aligned} H_{11} &= \begin{pmatrix} w_i I & 0 \\ w_s G & 0 \end{pmatrix}, \quad H_{12} = \begin{pmatrix} w_i I \\ w_s G \end{pmatrix} \\ H_{21} &= (G \ I), \quad H_{22} = G. \end{aligned} \quad (4-17)$$

D'autre part,

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_i & 0 \\ 0 & \Delta_s \end{pmatrix}.$$

La matrice d'incertitude Δ étant en blocs diagonaux, elle est structurée de norme ≤ 1 . Si l'on ne tient pas compte de cette structure et on se donne la liberté d'associer à Δ une matrice quelconque de $\mathbb{C}^{(p+q)(p+q)}$ de norme ≤ 1 , on introduit nécessairement dans G des matrices superflues supplémentaires.

Des égalités (4-14) à (4-17), on constate que H_{22} est toujours égal à G . Ceci est général car H_{22} est la fonction de transfert entre u et y quand $v = 0$, c'est-à-dire quand l'incertitude Δ n'intervient pas.

Matlab permet d'obtenir la matrice de transfert d'un système « Sys » constitué de plusieurs sous-systèmes. Dans ce but, on introduit les noms des sous-systèmes, les noms et les dimensions des entrées et des sorties de « Sys » et les entrées de chaque sous-système. La fonction « sysic » (system interconnection) effectue ces connexions et détermine la matrice de transfert de « Sys ».

Exemple 4-3

Pour déterminer la matrice de transfert H relative à une incertitude inverse à la sortie (fig. 4-4b), on commence par définir le système nominal $G(s)$ et la fonction de pondération $w_{is}(s)$. I :

```
>> s = tf('s');
>> G = [1/(s+1), s/((s+1)*(s+2))
        -1/(s+2), (s+1)/(s^2+1)];
>> wis = (0.1*s/(0.02*s+1))*eye(2);
```

On écrit ensuite les instructions suivantes :

```
>> systemnames = 'G wis';
>> inputvar = '[v{2}; u{2}]';
>> outputvar = '[wis; G-v]';
>> input_to_G = '[u]';
>> input_to_wis = '[G-v]';
>> H = sysic;
```

Remarquer qu'il faut donner, entre accolades, les dimensions des signaux d'entrée au système H et que la sortie d'un sous-système est désignée par le nom de ce sous-système. Les noms doivent être entre accents et les signaux entre accents et crochets. Le lecteur peut vérifier que le résultat de ce programme est conforme avec la formule (4-16).

EXERCICE 4-3

Déterminer par Matlab la matrice H du système de la figure 4-6 sachant que

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{s+1}{s^2+s+1} \end{pmatrix},$$

$$w_i(s) = \frac{0.5}{s+4}, \quad w_s(s) = \frac{2(s+0.1)}{s+2}.$$

4-2 Représentation généralisée d'un système de commande

La représentation classique d'un système de commande (fig. 4-7) ne contient pas toutes les informations utiles au bon choix de l'organe de commande $K(s)$. En effet,

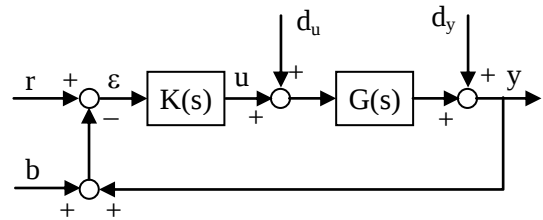


Fig 4-7 Représentation classique d'un système de commande

- 1) $G(s)$ n'est que le modèle nominal et ne comporte aucune information sur ses incertitudes. Pour incorporer ces informations dans le schéma de la figure 4-7, on remplace $G(s)$ par sa configuration d'incertitude (H, Δ) de la figure 4-5.
- 2) Les entrées r , d_u , d_y et b ne sont pas quelconques comme le laisse supposer la figure 4-7. Généralement, la référence r et les perturbations d_u et d_y sont des signaux de basses fréquences tandis que le bruit b est un signal de hautes fréquences ou à bande de fréquences. Pour traduire ces informations, on écrit chaque entrée $\tilde{w}_i$ (une composante de r , d_u , d_y ou de b) sous la forme

$$\tilde{w}_i = w_{wi}(s)w_i \quad (4-18)$$

où $w_{wi}(s)$ est un filtre fictif passe bas, passe haut ou passe bande selon la nature de $\tilde{w}_i$. Le signal d'entrée w_i est en principe quelconque mais, typiquement, on ajuste les gains statiques des filtres $w_{wi}(s)$ de sorte que les $\tilde{w}_i$ possibles

soient les réponses de ces filtres à des entrées $w_i(t)$ de norme $\mathcal{L}_2$ inférieure à 1 :

$$\|w_i(t)\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} w_i^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |w_i(j\omega)|^2 d\omega \leq 1.$$

- 3) Concernant notre jugement sur la performance du système, on peut s'intéresser à un bon suivi ($e = |r - y|$ petit) seulement pour les faibles fréquences car r et y sont généralement de cette nature. D'autre part, pour ne pas trop solliciter les actionneurs, la commande u ne doit pas dépasser une certaine limite surtout à hautes fréquences. De telles considérations conduisent à définir le critère de performance sous la forme :

$$z_i = w_{zi}(s) \tilde{z}_i \quad \text{petit} \quad (4-19)$$

où $\tilde{z}_i$ est le signal physique et z_i est son filtrage par $w_{zi}(s)$. Si $\tilde{z}_i$ doit être petit à faibles fréquences, w_{zi} sera choisi passe bas et s'il doit être petit à hautes fréquences, w_{zi} sera choisi passe haut. Typiquement, on ajuste le gain statique des $w_{zi}(s)$ de sorte que $\tilde{z}_i$ sera considéré petit si $\|z_i(t)\|_2 < 1$.

Tenant compte des remarques précédentes, au lieu de la figure 4-7, une représentation détaillée de ce système de commande est celle de la figure 4-8 suivante.

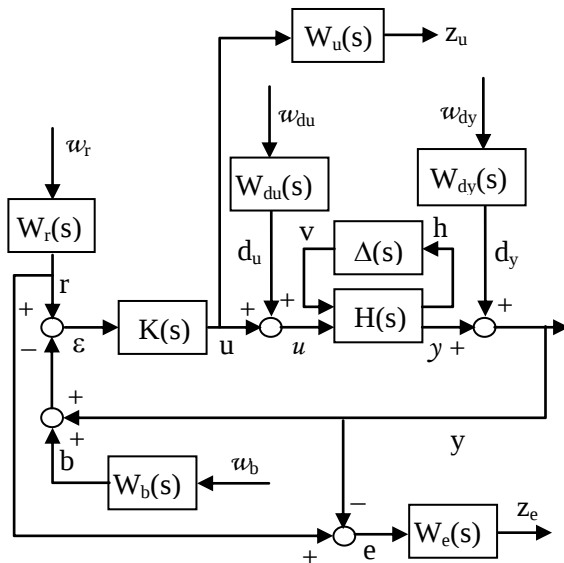


Fig 4-8 Représentation détaillée d'un système de commande

Les signaux w_i sont appelés *entrées exogènes* ou *perturbations généralisées* et les signaux z_i sont appelés *variables de performance*. Comme, en général, w_i et z_i sont des vecteurs, les blocs de filtrage de la figure 4-8 sont des matrices généralement diagonales.

Schéma standard

La figure 4-8 ainsi que tout autre système de commande peut être réduit à une représentation plus simple appelée *schéma standard*. Comme le montre la figure 4-9, le schéma standard est constitué de la matrice d'incertitude $\Delta(s)$, de l'organe de commande $K(s)$ et d'une troisième matrice de transfert $P(s)$ liant les entrées exogènes w_i , la sortie v de Δ et la sortie u de K aux sorties de performance z_i , à l'entrée h de Δ et à l'entrée ε de K .

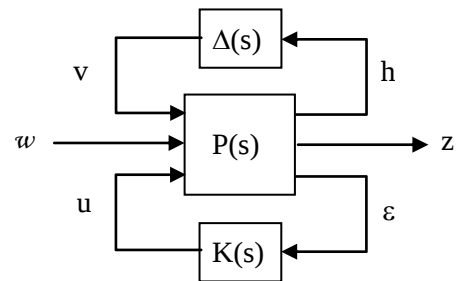


Fig. 4-9 Schéma standard d'un système de commande

La matrice $P(s)$, appelée matrice de transfert du système *augmenté* (ou *ajouté*), englobe en elle la matrice de transfert du modèle nominal ainsi que les pondérations des incertitudes, les filtres des entrées exogènes et les filtres des sorties de performance. La détermination de $P(s)$ s'obtient en supprimant du système de commande les matrices $\Delta(s)$ et $K(s)$ et en calculant les matrices de transfert $P_{ij}(s)$ entre chaque entrée v , w et u , et chaque sortie h , z et ε .

Considérons, par exemple, le système de commande de la figure 4-8. Quand on supprime les matrices $\Delta(s)$ et $K(s)$, il reste le système augmenté $P(s) = \{P_{ij}(s)\}$ liant les entrées v , w et u aux sorties h , z et ε , les vecteurs w et z étant respectivement définis par $[w_r; w_{du}; w_{dy}; w_b]$ et $[z_u; z_e]$. On écrit :

$$\begin{pmatrix} h \\ z \\ \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \\ u \end{pmatrix}.$$

En annulant toutes les entrées à part v et en inspectant l'effet de v sur chaque sortie h , z_i et ε , on déduit de la figure 4-8 que la première colonne de P est constituée des matrices

$$P_{11} = H_{11}, \quad P_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ W_e H_{21} \end{bmatrix}, \quad P_{31} = -H_{21}.$$

De même, en annulant v et u et en inspectant l'effet de chaque composante de w sur chaque sortie h , z_i et ε , on tire de la figure 4-8 les matrices de la deuxième colonne de P :

$$P_{12} = [0 \quad H_{12} W_{du} \quad 0 \quad 0],$$

$$P_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ W_e W_r & W_e H_{22} W_{du} & W_e W_{dy} & 0 \end{bmatrix},$$

$$P_{32} = [W_r \quad -H_{22} W_{du} \quad -W_{du} \quad -W_b].$$

Enfin, en annulant v et toutes les composantes de w , on tire :

$$P_{13} = H_{12}, \quad P_{23} = \begin{bmatrix} W_u \\ W_e H_{22} \end{bmatrix}, \quad P_{33} = -H_{22}.$$

On peut aussi obtenir la matrice P à l'aide de l'instruction « sysic » de Matlab.

À noter que la sous-matrice P_{33} est toujours égale à $-H_{22} = -G$ (l'opposé du modèle nominal du système commandé) puisque P_{33} est la matrice de transfert entre u et ε quand v et w sont nuls, c'est-à-dire quand les incertitudes et les entrées exogènes n'interviennent pas.

Si l'organe de commande $K(s)$ est connu et qu'on désire étudier l'effet de l'incertitude $\Delta(s)$, il convient d'isoler Δ et d'incorporer $K(s)$ dans le système augmenté P ce qui donne la configuration (N, Δ) de la figure 4-10.

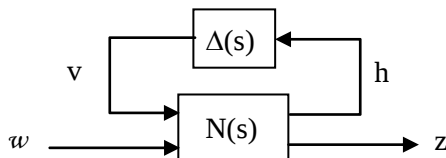


Fig. 4-10 Configuration (N, Δ) d'un système de commande

La matrice de transfert N s'obtient à partir des matrices P et K en commençant par subdiviser P en 4 blocs correspondants aux entrées $[v; w]$ et u et aux sorties $[h; z]$ et ε :

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11}^b & P_{12}^b \\ P_{21}^b & P_{22}^b \end{pmatrix}.$$

De l'équation

$$\begin{pmatrix} h \\ z \end{pmatrix} = P_{11}^b \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} + P_{12}^b u$$

avec $u = K\varepsilon$ et $\varepsilon = P_{21}^b \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} + P_{22}^b K\varepsilon$,

on tire

$$\begin{pmatrix} h \\ z \end{pmatrix} = N(s) \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$$

où

$$N = P_{11}^b + P_{12}^b K(I - P_{22}^b K)^{-1} P_{21}^b, \quad (4-20)$$

$$\stackrel{N}{=} F_b(P, K).$$

La fonction matricielle F_b définie par (4-20) est appelée *transformation linéaire fractionnaire* (tlf). Elle a l'indice b (basse) car la matrice P est connectée à K par ses canaux inférieurs, ε et u .

Pour la conception de l'organe de commande K , on l'isole et on incorpore dans le système ajouté P la matrice d'incertitude Δ ce qui donne la configuration $(\tilde{P}, K)$ de la figure 4-11.

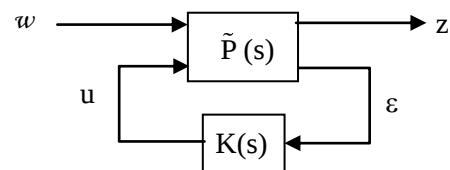


Fig. 4-11 Configuration $(\tilde{P}, K)$ d'un système de commande

La matrice de transfert $\tilde{P}(s)$ est celle du système augmenté perturbé. Elle est donnée par

$$\tilde{P} = P_{22}^h + P_{21}^h \Delta(I - P_{11}^h \Delta)^{-1} P_{12}^h, \quad (4-20')$$

$$\stackrel{N}{=} F_h(P, \Delta)$$

où les P_{ij}^h sont les blocs de P correspondants aux entrées v et $[w; u]$ et les sorties h et $[z; \varepsilon]$:

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11}^h & P_{12}^h \\ P_{21}^h & P_{22}^h \end{pmatrix}.$$

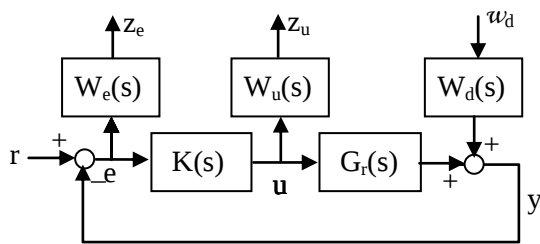
La transformation linéaire fractionnelle F_h définie par (4-20') est d'indice h (*haute*) car la matrice P est connectée à Δ par ses canaux supérieurs v et h (attention à la commutation des indices 1 et 2 entre F_b et F_h).

La fonction de transfert $T_{zw}(s)$ entre l'entrée w et la sortie z du système de commande global (fig. 4-8) se déduit de l'une de ses configurations (N, Δ) ou $(\tilde{P}, K)$ (fig. 4-10 et 4-11). Par tlf, on a :

$$\begin{aligned} T_{zw} &= F_h(N, \Delta) \\ &= N_{22} + N_{21}\Delta(I - N_{11}\Delta)^{-1}N_{12}, \\ &= F_b(\tilde{P}, K) \\ &= \tilde{P}_{11} + \tilde{P}_{12}K(I - \tilde{P}_{22}K)^{-1}\tilde{P}_{21}. \end{aligned} \quad (4-21)$$

L'instruction « lft(sys1, sys2) » de Matlab produit la transformation linéaire fractionnelle de sys1 et sys2. Cette transformation sera basse si sys2 a moins d'entrées et de sorties que sys1 et elle sera haute dans le cas contraire.

EXERCICE 4-4



Calculer en fonction de Δ la fonction de transfert entre $[r, w_d]$ et $[z_e, z_u]$ du système ci-dessus où G_r est défini dans l'exercice 4-3 et

$$K(s) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.2s+1 \\ 0.1s \end{pmatrix}, \quad W_e(s) = W_d(s) = \frac{1}{s+5},$$

$$W_z(s) = \begin{pmatrix} \frac{s+1}{0.2s+1} & 0 \\ 0 & \frac{s+1}{0.2s+1} \end{pmatrix}.$$

4-3 Stabilité robuste

Si le système de commande représenté par la figure 4-8 est stable pour toute matrice $\Delta(s) \in \mathbb{D}$, on dit que la stabilité de ce système est robuste. Les filtres w_{wi} des entrées exogènes w_i et les filtres w_{zi} des sorties de performance z_i sont toujours choisis stables, d'où la stabilité du système de commande (fig. 4-8) se réduit à celle de la boucle représentée par la figure 4-12.

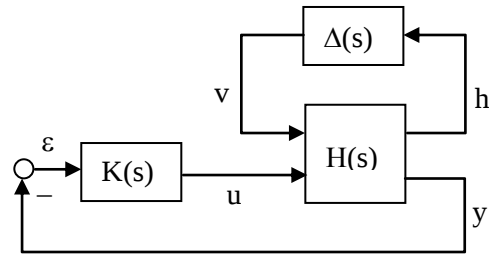


Fig.4-12 Boucle de commande d'un objet incertain

La fonction de transfert de la chaîne directe de ε à y est donnée par

$$\begin{aligned} L &= F_h(H, \Delta)K, \\ &= [H_{22} + H_{21}\Delta(I - H_{11}\Delta)^{-1}H_{12}]K. \end{aligned} \quad (4-22)$$

Remarquer que pour un système certain, on a $\Delta = 0$ d'où $L = H_{22}K = GK$ puisque, comme nous l'avons vu, H_{22} est toujours égal à G . Ceci montre que le problème de commande classique des systèmes certain n'est qu'un cas particulier de (4-22).

Malheureusement, l'expression (4-22) de $L(s)$ ne peut pas servir pour tester la stabilité car elle incorpore la matrice inconnue $\Delta(s)$. Pour remédier à cette difficulté, on isole $\Delta(s)$ et on fusionne $K(s)$ avec $H(s)$. Ceci réduit la figure 4-12 à la boucle (M, Δ) représentée par la figure 4-13.

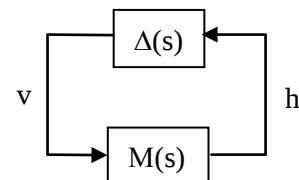


Fig.4-13 Configuration (M, Δ) de la boucle fermée

En remarquant que $u = -Ky$, la matrice de transfert $M(s)$ est donné par

$$\begin{aligned}
M(s) &= F_b(H, -K) \\
&= H_{11} - H_{12}K(I + H_{22}K)^{-1}H_{21} \quad (4-23) \\
&= H_{11} - H_{12}KSH_{21}
\end{aligned}$$

où $S = (I + GK)^{-1}$ est la matrice de sensibilité. $M(s)$ est la matrice de transfert de la boucle fermée nominale (constituée de G et K) à laquelle sont rattachées de l'extérieur les fonctions de pondération w_k des différentes incertitudes. Comme la matrice d'incertitude Δ ne fait pas partie de $M(s)$, la seule boucle contenue dans $M(s)$ est la nominale. Par conséquent, si l'organe de commande $K(s)$ stabilise intérieurement la boucle fermée nominale et si les fonctions w_k sont choisis stables, la fonction de transfert $M(s)$ sera intérieurement stable. Par la suite, sauf indication contraire, le mot stabilité signifiera stabilité interne (voir section 3-5).

Rappelons d'autre part que les matrices d'incertitude $\Delta(s)$ de $\mathbb{D}$ sont complexes, stables, vérifiant $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ et elles sont libres d'avoir une structure quelconques (non structurées).

Si $M(s)$ et $\Delta(s)$ sont stables, la boucle ouverte $L_M(s) = M(s)\Delta(s)$ l'est aussi et, d'après le théorème du petit gain (voir conditions 3-53), la stabilité de la boucle fermée (M, Δ) (c'est-à-dire la stabilité du système de commande global) sera assurée si

$$\|M(s)\Delta(s)\|_\infty < 1. \quad (4-24)$$

Sachant que $\|M(s)\Delta(s)\|_\infty \leq \|M(s)\|_\infty \|\Delta(s)\|_\infty$ et que $\|\Delta(s)\|_\infty \leq 1$, l'inégalité (4-24) peut être remplacée par la condition suffisante

$$\|M(s)\|_\infty < 1. \quad (4-24')$$

Nous allons démontrer que cette condition devient nécessaire si l'on veut que la stabilité du système de commande soit stable pour toutes les matrices d'incertitude $\Delta \in \mathbb{D}$. En d'autres termes, il s'agit de démontrer que (4-24') est une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité robuste des systèmes de commande à incertitudes non structurées. Ceci sera établi à travers des théorèmes qui nous seront aussi utiles quand nous aborderons l'étude des incertitudes structurées.

Théorèmes de la stabilité robuste

Soient $\mathbb{D}_r$ et $\mathbb{D}_c$ des ensembles de matrices d'incertitude stables tels que

$$\Delta \in \mathbb{D}_r \Rightarrow c\Delta \in \mathbb{D}_r \quad \forall c \in \mathbb{R}, |c| \leq 1, \quad (4-25)$$

$$\Delta \in \mathbb{D}_c \Rightarrow c\Delta \in \mathbb{D}_c \quad \forall c \in \mathbb{C}, |c| \leq 1. \quad (4-26)$$

Il est évident que $\mathbb{D}$ lui-même vérifie (4-25) et (4-26), c'est-à-dire $\mathbb{D}$ est à la fois un ensemble de type $\mathbb{D}_r$ et de type $\mathbb{D}_c$. D'autre part, $\mathbb{D}_c$ vérifie (4-25), d'où $\mathbb{D}_c$ est un ensemble de type $\mathbb{D}_r$.

Th.1. Si $M(s)$ est stable, la boucle (M, Δ) sera stable $\forall \Delta \in \mathbb{D}_r$ si et seulement si

$$\det[I - M(j\omega)\Delta(j\omega)] \neq 0 \quad \forall \omega, \forall \Delta \in \mathbb{D}_r. \quad (4-27)$$

Preuve

a) Soit γ le contour de Nyquist (fig. 3-11) et posons $f(s) = \det[I - M(s)\Delta(s)]$. Comme $M(s)\Delta(s)$ est stable $\forall \Delta \in \mathbb{D}_r$, d'après le critère de Nyquist (section 3-5), la stabilité de la boucle fermée (M, Δ) implique que la courbe $f(\gamma)$ ne passe pas par l'origine. D'où

$$\text{Boucle } (M, \Delta) \text{ stable } \forall \Delta \in \mathbb{D}_r \Rightarrow (4-27).$$

b) Inversement, supposons par l'absurde que (4-27) est vrai sans que la boucle (M, Δ) soit stable pour toute matrice $\Delta \in \mathbb{D}_r$. Dans ce cas, il existerait une matrice $\Delta \in \mathbb{D}_r$ pour laquelle $f(\gamma)$ encercle l'origine (ou le traverse). Soit $f_c(s) = \det[I - M(s).c\Delta(s)]$, où $c \in [0 \ 1] \subset \mathbb{R}$. Quand c décroît de 1 à 0, la courbe fermée $f_c(\gamma)$ passe de la courbe $f(\gamma)$ (pour $c = 1$) au point 1 (pour $c = 0$). À cause de la continuité en c de cette transformation, il doit exister un $c \in [0 \ 1]$ pour lequel $f_c(\gamma)$ passe par l'origine. Mais ceci signifierait que $\det[I - M(j\omega).c\Delta(j\omega)] = 0$ pour une certaine valeur de ω , ce qui contredit (4-27) puisque $c\Delta \in \mathbb{D}_r$ ■

Comme $\mathbb{D}$ et $\mathbb{D}_c$ sont des ensembles de type $\mathbb{D}_r$, la condition (4-27) est aussi nécessaire et suffisante pour la stabilité robuste sur $\mathbb{D}$ et $\mathbb{D}_c$.

Pour donner une explication physique au théorème Th.1, on peut dire que la boucle (M, Δ) de la figure 4-13 est stable si et seulement si les signaux h et v s'annulent en régime stationnaire quelle que soit leurs valeurs initiales. Or, si M et Δ sont stables, h vérifie en régime stationnaire l'équation

$$h(j\omega) = M(j\omega)\Delta(j\omega)h(j\omega) \quad \forall \omega$$

qui a la solution unique $h = 0$ si et seulement si la condition (4-27) est satisfaite.

À noter que (4-27) revient à dire que les valeurs propres de $M(j\omega)\Delta(j\omega)$ sont toutes différentes de 1 quel que soit ω et $\forall \Delta \in \mathbb{D}_r$. Rappelons d'autre part que le rayon spectral d'une matrice A est le plus grand module des valeurs propres de A .

Th.2. Si $M(s)$ est stable, la boucle (M, Δ) sera stable $\forall \Delta \in \mathbb{D}_c$ si et seulement si le rayon spectral

$$\begin{aligned} \rho[M(j\omega)\Delta(j\omega)] < 1, \quad \forall \omega, \forall \Delta \in \mathbb{D}_c \\ \Leftrightarrow \sup_{\Delta \in \mathbb{D}_c} \rho[M(j\omega)\Delta(j\omega)] < 1 \quad \forall \omega. \end{aligned} \quad (4-28)$$

Preuve

a) La condition (4-28) est évidemment suffisante puisqu'elle implique que toutes les valeurs propres de $M(j\omega)\Delta(j\omega)$ sont différentes de 1.

b) Démontrons par l'absurde que la stabilité de la boucle (M, Δ) pour tout $\Delta \in \mathbb{D}_c$ implique (4-28).

Supposons qu'il existe $\Delta \in \mathbb{D}_c$ et une fréquence ω pour lesquels la matrice $M(j\omega)\Delta(j\omega)$ possède une valeur propre $\lambda = |\lambda|e^{j\theta}$ avec $|\lambda| \geq 1$. Dans ce cas, pour $c = (1/|\lambda|)e^{-j\theta}$, la matrice $M(j\omega)c\Delta(j\omega)$ aurait une valeur propre égale à 1 et la boucle $(M, c\Delta)$ serait instable. Mais ceci est contraire à l'hypothèse car, comme $|c| \leq 1$, $c\Delta \in \mathbb{D}_c$. ■

$\mathbb{D}$ étant un ensemble de type $\mathbb{D}_c$, la condition (4-28), tout comme la condition (4-27), est nécessaire et suffisante pour la stabilité robuste sur $\mathbb{D}$. Cependant ces conditions doivent être vérifiées pour chaque matrice $\Delta \in \mathbb{D}$ ce qui est inconcevable de les employer pour tester la stabilité robuste. Dans le but de trouver un critère indépendant de Δ , montrons l'égalité suivante :

$$\max_{\Delta \in \mathbb{D}} \rho[M(j\omega)\Delta(j\omega)] = \bar{\sigma}[M(j\omega)] \quad \forall \omega. \quad (4-29)$$

□ D'abord on sait que ρ est toujours inférieur à $\bar{\sigma}$ (voir (3-51)). D'où, $\forall \Delta$,

$$\rho(M\Delta) \leq \bar{\sigma}(M\Delta) \leq \bar{\sigma}(M)\bar{\sigma}(\Delta)$$

et comme $\Delta \in \mathbb{D}$, $\bar{\sigma}(\Delta) \leq 1$ et

$$\max_{\Delta \in \mathbb{D}} \rho(M\Delta) \leq \bar{\sigma}(M).$$

Pour démontrer l'égalité, il suffit de trouver une matrice $\Delta' \in \mathbb{D}$ telle que $\rho(M\Delta') = \bar{\sigma}(M)$. Soit $M = V\Sigma U^*$ la décomposition singulière de M et choisissons $\Delta' = UV^* = UIV^*$. Toutes les valeurs singulières de Δ' étant égales à 1, $\bar{\sigma}(\Delta') = 1$ d'où $\Delta' \in \mathbb{D}$. D'autre part, comme $U^* = U^{-1}$ et $V^* = V^{-1}$ et que les valeurs propres d'une matrice ne se modifient pas par changement de base, on a :

$$\rho(M\Delta') = \rho(V\Sigma U^* UV^*) = \rho(V\Sigma V^{-1}) = \rho(\Sigma).$$

Mais $\rho(\Sigma) = \bar{\sigma}(M)$ d'où l'égalité (4-29). ■

Remarque. Comme la matrice $\Delta' = UV^*$ de la démonstration précédente peut avoir une structure quelconque, l'égalité (4-29) n'est valable que pour les incertitudes non structurées.

Des relations (4-28) et (4-29) on déduit directement le théorème fondamental suivant.

Th.3 Si $M(s)$ est stable, la boucle (M, Δ) sera stable $\forall \Delta \in \mathbb{D}$ si et seulement si

$$\bar{\sigma}[M(j\omega)] < 1, \quad \forall \omega \quad \Leftrightarrow \quad \|M(s)\|_{\infty} < 1.$$

Cas particuliers

Nous avons vu (équation (4-23)) que l'expression générale de $M(s)$ est donnée par

$$M(s) = H_{11} - H_{12}K(I + H_{22}K)^{-1}H_{21}. \quad (4-30)$$

Les H_{ij} dépendent de la forme et de la position des incertitudes sauf H_{22} qui est toujours égal à la matrice de transfert du système commandé G (voir équations (4-14) à (4-17)). Le tableau 4-1 regroupe les expressions des H_{ij} (à part $H_{22} = G$)

et de M pour différentes formes d'incertitude. Comme nous allons le voir à l'exemple 4-4, les H_{ij} s'obtiennent par simple inspection du graphe et M s'obtient en remplaçant les H_{ij} par leurs expressions dans (4-30) et en simplifiant. Rappelons que la sensibilité et la sensibilité complémentaire sont définies à la sortie et à l'entrée de G respectivement par

$$S = (I + GK)^{-1}, \quad T = GK(I + GK)^{-1},$$

$$S_e = (I + KG)^{-1}, \quad T_e = KG(I + KG)^{-1}.$$

Ces fonctions interviennent dans l'expression de M selon le type de l'incertitude.

$\tilde{G}$	H_{11}	H_{12}	H_{21}	M
$G + w_a \Delta$	0	$w_a I$	I	$w_a KS$
$G(I + w_{ai} \Delta G)^{-1}$	$-w_{ai} G$	$w_{ai} G$	$-G$	$-w_{ai} SG$
$(I + w_s \Delta)G$	0	$w_s G$	I	$w_s T$
$G(I + w_e \Delta)$	0	$w_e I$	G	$w_e T_e$
$(I + w_{is} \Delta)^{-1}G$	$-w_{is} I$	$w_{is} G$	$-I$	$-w_{is} S$
$G(I + w_{ie} \Delta)^{-1}$	$-w_{ie} I$	$w_{ie} I$	$-G$	$-w_{ie} S_e$

Tableau 4-1 H_{ij} pour différentes formes d'incertitude

Exemple 4-4

La figure 4-14 représente une incertitude multiplicative inverse à l'entrée (dernière ligne du tableau 4-1). Supprimons $\Delta(s)$ et inspectons l'effet de chaque entrée (v ou u), appliquée seule, sur chaque sortie (h ou y) :

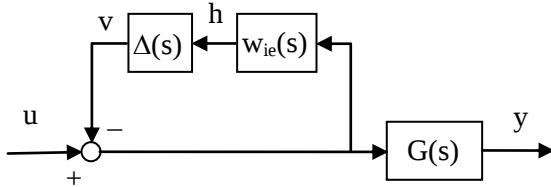


Fig. 4-14 Incertitude multiplicative inverse à l'entrée

De v à $h \rightarrow H_{11} = -w_{ie}I$.

De u à $h \rightarrow H_{12} = w_{ie}I$.

De v à $y \rightarrow H_{21} = -G$.

En remplaçant les H_{ij} dans (4-30), on obtient :

$$M = -w_{ie}I + w_{ie}K(I + GK)^{-1}G$$

$$= -w_{ie}[I - KG(I + GK)^{-1}] \quad (1)$$

$$= -w_{ie}S_e \quad (2)$$

L'égalité (1) est obtenue en appliquant sur G la règle « pousser à travers » et (2) de l'identité $S_e = I - T_e$.

Par conséquent, si la fonction de pondération $w_{ie}(s)$ est stable et si l'organe de commande $K(s)$ stabilise $S_e = (I + KG)^{-1}$, c'est-à-dire la boucle nominale (K, G) , $M(s)$ sera stable. Dans ce cas, la stabilité du système de commande global sera robuste, c'est-à-dire stable $\forall \Delta \in \mathbb{D}$, si et seulement si $\|w_{ie}S_e\|_\infty < 1$ ou si $\|S_e\|_\infty < 1/\|w_{ie}\|_\infty$.

EXERCICE 4-5

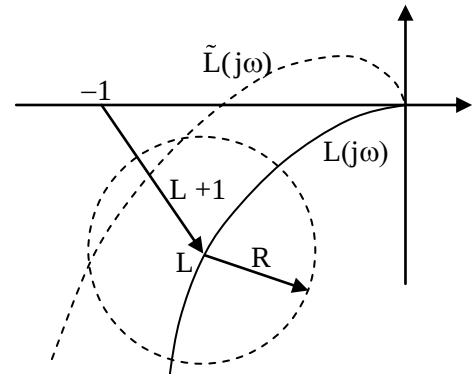
Étudier la stabilité de l'exercice 4-4.

Cas SISO

Soit $g(s)$ le modèle incertain d'un système mono-variable et $k(s)$ son organe de commande. Pour une fréquence donnée ω , désignons par $R(\omega)$ le rayons du cercle centré en $L(j\omega) = g(j\omega)k(j\omega)$ et contenant tous les points $\tilde{L}(j\omega) = \tilde{g}(j\omega)k(j\omega)$ que le système réel peut avoir :

$$R(\omega) = \sup_{\Delta \in \mathbb{D}} |\tilde{L}(j\omega) - L(j\omega)|.$$

Si la boucle fermée nominale est stable, cette stabilité est robuste si toutes les courbes de Nyquist $\tilde{L}(j\omega)$ sont de même côté par rapport au point -1 que la courbe nominale $L(j\omega)$. Ceci revient à dire que pour toute fréquence ω , le point -1 doit être à l'extérieur du cercle de centre $L(j\omega)$ et de rayon $R(\omega)$ comme le montre la figure suivante :



D'après cette figure, la condition de stabilité robuste s'écrit :

$$R(\omega) < |L(j\omega) + 1| \quad \forall \omega$$

$$\Leftrightarrow |[\tilde{L}(j\omega) - L(j\omega)]S(j\omega)| < 1 \quad \forall \omega, \forall \Delta \in \mathbb{D}$$

où $S = (L + 1)^{-1}$ est la fonction de sensibilité. Par exemple, pour l'incertitude additive, $\tilde{g} = g + w_a \Delta$, la condition précédente devient :

$$\begin{aligned} |w_a \Delta k S| &< 1 \quad \forall \omega, \forall \Delta \in \mathbb{D} \\ \Leftrightarrow \|w_a k S\|_\infty &< 1 \end{aligned}$$

et pour l'incertitude multiplicative à l'entrée, $\tilde{g} = g(1 + w_e \Delta)$, elle devient :

$$\begin{aligned} |g w_e \Delta k S| &< 1 \quad \forall \omega, \forall \Delta \in \mathbb{D} \\ \Leftrightarrow \|w_e T\|_\infty &< 1. \end{aligned}$$

En se référant au tableau 4-1 et sachant que pour les systèmes monovariables, $S_e = S$ et $T_e = T$, on vérifie bien que les résultats précédents sont conformes au théorème Th.3.

EXERCICE 4-6

Le système $G(s) = (s + a)/(s - a)$, $a \in [1, 3]$, est commandé en boucle fermée par l'intégrateur k/s . Représenter le schéma qui montre le système nominal, les incertitudes et leurs pondérations. Dédurre les matrices M et D et la condition de la stabilité robuste.

Factorisation première et robustesse

Si certains pôles du modèle sont voisins de l'axe des imaginaires, ils mettent un doute quant à leur position effective par rapport à cet axe. Pour le système réel ces pôles peuvent être aussi bien stables qu'instables et il ne sera plus raisonnable de supposer que le nombre des pôles instables est le même pour toutes les matrices de transfert $\tilde{G}(s)$ de $\mathcal{G}$. Or les théorèmes précédents sont déduits en supposant que les fonctions de pondérations $w(s)$ et toutes les matrices Δ de $\mathbb{D}$ sont stables. Mais ceci implique pour certaines formes d'incertitudes ($\tilde{G} = G + w_a \Delta$ ou $\tilde{G} = (1 + w_s \Delta)G$) que toutes les matrices $\tilde{G}$ ont le même nombre de pôles instables que G . De telles formes sont donc inadéquates pour des systèmes ayant des pôles voisins de l'axe des imaginaires. On arrive à une conclusion similaire quand le modèle possède des zéros voisins de l'axe des imaginaires avec une incertitude de type inverse ($\tilde{G} = (1 + w_{is} \Delta)^{-1}G$).

La représentation de l'incertitude par factorisation première est une technique qui permet aux matrices $\tilde{G}$ d'avoir des nombres différents de pôles ou de zéros à prp tout en maintenant la condition de stabilité des matrices d'incertitude Δ et des fonctions de pondération $w(s)$.

Avant de donner cette représentation, introduisons d'abord la notion de factorisation première à travers un exemple simple.

Factorisation première

Considérons un système monovariante de fonction de transfert

$$g(s) = \frac{s^2 - 4}{s(s-1)(s+3)}.$$

Ce système possède deux pôles instables 0 et 1 et un zéro à prp en 2 (phase non minimale). La factorisation première de g consiste à l'écrire sous la forme

$$g(s) = n(s) \frac{1}{m(s)} \quad (4-31)$$

où n et m sont des fonctions de transfert stables et propres ($\lim_{s \rightarrow \infty} < \infty$) n'ayant pas en commun un zéro à prp. Cette dernière restriction évite d'associer à la fonction de transfert $1/m(s)$ des pôles instables qui n'existent pas dans g . D'autre part, la stabilité de n et m nous oblige à placer tous les zéros à prp de g au numérateur de n et tous les pôles instables de g au numérateur de m . Ceci sera assuré si nous écrivons n et m sous la forme

$$\begin{aligned} n(s) &= (s^2 - 4)q(s), \\ m(s) &= s(s-1)(s+3)q(s), \end{aligned}$$

où la fonction de transfert $q(s)$ est stable (pour que n et m soient stables), à phase minimale (pour que les zéros communs à n et m ne soient pas à prp) et d'ordre ≥ 3 (pour que n et m soient propres). Le plus simple est d'écrire

$$\begin{aligned} n(s) &= \frac{s^2 - 4}{(s+a)(s+b)(s+c)}, \\ m(s) &= \frac{s(s-1)(s+3)}{(s+a)(s+b)(s+c)}, \end{aligned}$$

où les pôles a, b, c sont réels ou conjugués à prp. On voit que la factorisation (4-31) n'est pas unique mais elle le devient si l'on ajoute la contrainte

$$n(-s)n(s) + m(-s)m(s) = 1 \quad (4-32)$$

qui détermine par identification les paramètres de q . En posant $f = [n \ ; \ m]$ et $f^* = f^T(-s)$, l'équation (4-32) s'écrit $f^* f = 1$ et on dit que la factorisation première vérifiant la contrainte (4-32) est *normalisée*.

Ce qui précède peut être généralisé au cas multivariable en remplaçant n et m par des matrices (voir exercice 2-14). Cependant, comme le produit matriciel n'est pas commutatif, on doit distinguer entre la factorisation première à droite et la factorisation première à gauche. Celle de droite normalisée se définit par

$$G(s) = N_d(s)M_d^{-1}(s) \quad (4-33)$$

$$\text{avec} \quad N_d^*(s)N_d(s) + M_d^*(s)M_d(s) = I \quad (4-34)$$

et celle de gauche par

$$G(s) = M_g^{-1}(s)N_g(s) \quad (4-35)$$

$$\text{avec} \quad N_g(s)N_g^*(s) + M_g(s)M_g^*(s) = I \quad (4-36)$$

où la notation $H^*(s)$ signifie $H^T(-s)$. Les matrices de transfert M_d et N_d (resp. M_g et N_g) doivent être stables et propres n'ayant pas en commun des zéros à prp. En général il n'est pas simple de déterminer manuellement M et N mais l'instruction « ncfmr » (normalized cofactor model reduction) de Matlab les fournit sous forme d'équations d'état qu'on peut convertir en matrices de transfert par l'instruction « zpkr ». Par exemple, le programme suivant détermine les matrices $N(s)$ et $M(s)$ de la factorisation première à gauche d'une fonction de transfert $G(s)$. Le lecteur peut vérifier que ces matrices sont propres, stables sans zéro commun à prp et que $M^{-1}(s)N(s) = G(s)$.

```
>> s=tf('s');
>> G = [-1/(s-1) 0; 2/(s+2) (s-2)/(s+1)^2];
>> [GR,info]=ncfmr(G);
Please enter the desired order:
Original model returned.
>> N = zpkr(info.GL(:,1:2)); % GL = [N M]
>> M = zpkr(info.GL(:,3:4));
```

Représentation de l'incertitude

Passons maintenant à la représentation par factorisation première de l'incertitude sur G . Elle peut se faire à partir de (4-33) ou (4-35) en associant une incertitude additive à chacune des matrices M et

N . Partant de (4-35), l'incertitude sur G par factorisation première se définit par l'ensemble de matrices

$$\mathcal{G} = \left\{ \tilde{G}(s) \mid \tilde{G} = (M_g + E_M)^{-1}(N_g + E_N) \right\} \quad (4-37)$$

où les matrices d'incertitude $E_M(s)$ et $E_N(s)$ sont stables telles que, $\forall \omega$, la norme-2 de la matrice globale $E(j\omega) = [E_N(j\omega) \ E_M(j\omega)]$ ne dépasse pas une certaine valeur $|w_f(j\omega)|$. On a donc $E = w_f \Delta$ où $w_f(s)$ est une fonction de pondération qu'on choisit stable et $\Delta(s) = [\Delta_N(s) \ \Delta_M(s)]$ une certaine matrice stable non structurée telle que $\|\Delta\|_\infty \leq 1$.

Ces matrices Δ constituent donc un ensemble de type $\mathbb{D}$. Bien que la fonction de pondération $w_f(j\omega)$ ne possède pas une interprétation physique claire, nous verrons qu'elle peut servir pour définir la marge de stabilité du système.

Contrairement à d'autres formes d'incertitudes, les matrices $\tilde{G}(s)$ de l'ensemble (4-37) n'ont pas nécessairement le même nombre de pôles instables ou le même nombre de zéros à prp. En effet, bien que $M_g + E_M = M_g + w_f \Delta_M$ soit stable $\forall \Delta \in \mathbb{D}$, ses zéros (pôles de $\tilde{G}$) peuvent traverser l'axe des imaginaires quand Δ_M varie. Il en est de même des zéros de $N_g + E_N$ (zéros de $\tilde{G}$).

Voyons maintenant que devient la condition de la stabilité robuste pour une représentation de l'incertitude par factorisation première. Remarquons d'abord qu'en remplaçant E par $w_f \Delta$ et en mettant M_g en facteur, une matrice de l'ensemble (4-37) peut s'écrire sous la forme

$$\tilde{G} = M_g^{-1}(I + w_f \Delta_M M_g^{-1})^{-1}(N_g + w_f \Delta_N)$$

et se représente par la figure 4-15.

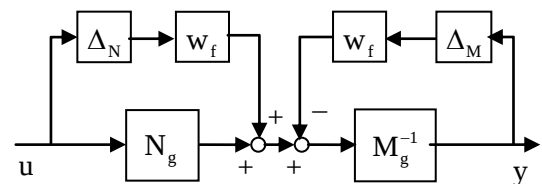


Fig. 4-15 Incertitude par factorisation première

En remplaçant dans la figure 4-12 la configuration (H, Δ) par le système incertain de la figure 4-15 et en mettant w_f en facteur, on obtient le diagramme de la boucle fermée (4-16).

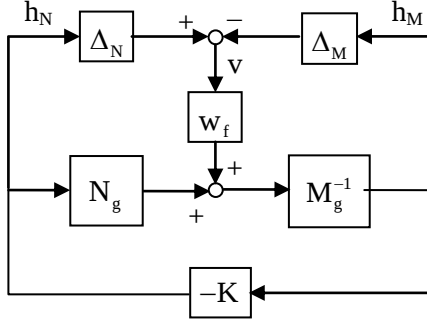


Fig. 4-16 Boucle fermée de la factorisation première

Pour retrouver la configuration (M, Δ) de la figure 4-13, déterminons les relations entre v , h_N et h_M indiqués sur la figure (4-16). On a :

$$\begin{aligned} v &= \Delta_N h_N - \Delta_M h_M, \\ h_N &= -KM_g^{-1}(N_g h_N + w_f v), \\ h_M &= M_g^{-1}(-N_g K h_M + w_f v). \end{aligned}$$

En posant $h = [h_N ; -h_M]$ et tenant compte de l'égalité $G = M_g^{-1}N_g$, les équations précédentes s'écrivent sous la forme $v = \Delta h$ et $h = Mv$ avec $M = M'w_f$ où

$$M' = -\begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} (I + GK)^{-1} M_g^{-1} = -\begin{bmatrix} KSM_g^{-1} \\ SM_g^{-1} \end{bmatrix}. \quad (4-38)$$

Comme les matrices d'incertitude $\Delta = [\Delta_N \ \Delta_M]$ forment un ensemble de type $\mathbb{D}$, on déduit du théorème Th.3 que si K stabilise M' , la stabilité de la boucle fermée de la figure 4-16 sera robuste si et seulement si

$$\|M'w_f\|_{\infty} < 1.$$

Si $1/\|M'\|_{\infty} = \varepsilon$, le système restera stable pour toute fonction de pondération de l'incertitude $w_f(j\omega)$ telle que $\|w_f(j\omega)\|_{\infty} < \varepsilon$. Le nombre

$$\varepsilon = 1/\|M'\|_{\infty} \quad (4-39)$$

peut être vu comme une mesure de la marge de stabilité du système. Nous reviendrons à la factorisation première au chapitre suivant où elle jouera un rôle important dans la synthèse d'une commande robuste.

EXERCICE 4-7

Que devient la formule (4-38) si l'on factorise $G(s)$ à droite.

4-4 Robustesse structurée

Nous avons vu que la matrice d'incertitude Δ d'un système est structurée si elle est diagonale en blocs, chaque bloc Δ_i étant relative à une source d'incertitude de ce système.

Exemple 4-5

La figure 4-17 schématise les sources d'incertitudes d'un système nominal $G = [g_1 \ g_2]$ ayant deux entrées et une sortie et entraîné par deux actionneurs identiques de premier ordre. Les incertitudes inverses aux entrées proviennent de l'imprécision sur la valeur du pôle des actionneurs (voir éq (4-13')). L'incertitude additive autour de G se déduit en estimant, pour chaque fréquence ω , l'erreur de modélisation maximum $w_3(j\omega)$.

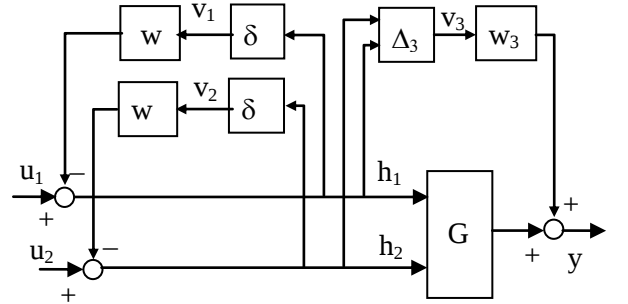


Fig. 4-17 Sources d'incertitude du système G

Pour obtenir la matrice d'incertitude globale Δ sous forme diagonale en blocs on associe à chaque matrice d'incertitude partielle Δ_i une entrée et une sortie. Dans le cas considéré en posant

$$h = [h_1 ; h_2 ; h_3] \quad \text{avec} \quad h_3 = [h_1 ; h_2], \\ v = [v_1 ; v_2 ; v_3],$$

la matrice Δ aura la forme

$$\Delta = \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta I_2 & 0 \\ 0 & \Delta_3 \end{pmatrix}$$

où $|\delta| \leq 1$ et Δ_3 est une matrice 1×2 avec $\|\Delta_3\|_{\infty} \leq 1$.

D'autre part, les 4 sous-matrices H_{ij} de la matrice H de la configuration générale de l'incertitude (fig. 4-5) s'obtiennent par inspection de la figure 4-17 :

$$\text{de } v \text{ à } h \rightarrow H_{11} = \begin{pmatrix} -w & 0 & 0 \\ 0 & -w & 0 \\ -wI_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{de } u \text{ à } h \rightarrow H_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ I_2 \end{pmatrix},$$

$$\text{de } v \text{ à } y \rightarrow H_{21} = [-wg_1 \quad -wg_2 \quad w_3],$$

$$\text{et de } u \text{ à } y \rightarrow H_{22} = G.$$

D'une manière générale, un bloc Δ_i de Δ peut être non structuré ou de la forme δI_r où $\delta \in \mathbb{C}$ (δ est libre d'être réel ou complexe) et I_r la matrice unité de dimension r . La structure S d'une matrice d'incertitude globale se définit par les dimensions de ses différents blocs. On écrit :

$$S = \{r_1, \dots, r_s, (m_1, n_1), \dots, (m_p, n_p)\}$$

où r_i est la dimension d'un bloc de type $\delta_i I_{r_i}$ et m_k, n_k sont respectivement les nombres des lignes et des colonnes du $k^{\text{ème}}$ bloc non structuré. La structure de la matrice d'incertitude Δ de l'exemple précédent est $S = \{2, (1, 2)\}$ puisque Δ est constitué d'un bloc δI_2 et d'un bloc non structuré Δ_3 ayant une ligne et deux colonnes.

Dans la suite, nous désignerons par $\mathbb{E}_S$ l'ensemble des matrices stables Δ ayant la structure S et par $\mathbb{D}_S$ l'ensemble de ces matrices dont la norme est inférieure ou égale à 1 :

$$\mathbb{D}_S = \{\Delta \in \mathbb{E}_S \mid \|\Delta\|_\infty \leq 1\}. \quad (4-50)$$

Valeur singulière structurée

Les théorèmes Th.1 et Th.2 de la section précédente s'appliquent à l'ensemble $\mathbb{D}_S$ puisqu'il est du type $\mathbb{D}_c$ (et $\mathbb{D}_r$) (voir (4-26)). Ce n'est pas le cas pour le théorème Th.3 puisqu'il découle de l'égalité (4-29) qui n'est valable que pour les incertitudes non structurées (voir la remarque à la suite de la démonstration de cette égalité). Or les théorèmes Th.1 ou Th.2 ne conviennent pas pour tester la stabilité robuste car ils nécessitent la véri-

fication des relations (4-27) ou (4-28) pour chaque matrice $\Delta \in \mathbb{D}_S$. Il nous faut, comme pour le théorème Th.3, une condition nécessaire et suffisante ne dépendant pas de Δ . D'abord, en posant

$$\mu[M(j\omega)] = \max_{\Delta \in \mathbb{D}_S} \rho[M(j\omega)\Delta(j\omega)], \quad (4-51)$$

le Th.2 se ramène au critère suivant de la stabilité robuste des systèmes de commande à incertitude structurée.

Th.4 Si $M(s)$ est stable, la boucle (M, Δ) sera stable $\forall \Delta \in \mathbb{D}_S$ si et seulement si

$$\mu[M(j\omega)] < 1, \forall \omega. \quad (4-52)$$

La fonction μ définie par (4-51) est appelée *valeur singulière structurée* de M . Elle correspond à une structure S donnée des matrices d'incertitude Δ et il convient de la désigner par μ_S au lieu de μ quand une confusion est possible. L'exemple suivant montre la dépendance de μ de la structure S des incertitudes.

Exemple 4-6

Supposons que, pour une fréquence donnée,

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Si $S = \{2\}$, c'est-à-dire si les Δ sont de la forme δI_2 , $|\delta| \leq 1$, on a :

$$\begin{aligned} \mu(M) &= \max_{|\delta| \leq 1} |\delta| \rho(M) = \rho(M) \\ &= \max \{|\lambda| \mid \det(\lambda I - M) = 0\} \\ &= \max \{|\lambda| \mid \lambda^2 - \lambda = 0\} = 1. \end{aligned}$$

b) Si $S = \{1, 1\}$, c'est-à-dire si les Δ sont de la forme $\text{diag}(\delta_1, \delta_2)$ avec $|\delta_i| \leq 1$, on a :

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - M\Delta) &= \lambda^2 - (-\delta_1 + 2\delta_2)\lambda \\ \Rightarrow \mu(M) &= \max_{\Delta \in \mathbb{D}_S} |-\delta_1 + 2\delta_2| = \max_{\Delta \in \mathbb{D}_S} (|\delta_1| + 2|\delta_2|) \end{aligned}$$

d'où $\mu(M) = 3$.

c) Si $S = \{(2, 2)\}$, c'est-à-dire si les Δ sont non structurées, d'après (4-29) on a :

$$\mu(M) = \bar{\sigma}(M) = \sqrt{\lambda_m}$$

où λ_m est la plus grande valeur propre de M^*M .

On obtient $\mu(M) = \sqrt{10}$.

Interprétation de μ

Montrons d'abord que si une matrice Δ_m de $\mathbb{D}_S$ maximise $\rho(M\Delta)$ pour une fréquence donnée ω , sa norme-2 est égale à 1. En d'autres termes,

$$[\mu(M) = \rho(M\Delta_m), \Delta_m \in \mathbb{D}_S] \Rightarrow \bar{\sigma}(\Delta_m) = 1. \quad (4-53)$$

□ La matrice $\Delta' = \Delta_m / \bar{\sigma}(\Delta_m)$ appartient à $\mathbb{D}_S$ car elle a la structure S et $\bar{\sigma}(\Delta') = 1$. Si $\bar{\sigma}(\Delta_m) < 1$, on aurait $\rho(M\Delta') = \rho(M\Delta_m) / \bar{\sigma}(\Delta_m) > \rho(M\Delta_m)$ ce qui contredit l'hypothèse ■

Montrons d'autre part que, pour ω fixé,

$$\rho(Mk\Delta_m) = \max_{\Delta \in \mathbb{E}_{Sk}} [\rho(M\Delta)], \quad \mathbb{E}_{Sk} = \{\Delta \in \mathbb{D}_S \mid \bar{\sigma}(\Delta) = k\}$$

$$\square \quad \forall \Delta \in \mathbb{E}_{Sk}, \quad \bar{\sigma}(\Delta/k) = 1$$

$$\Rightarrow \Delta/k \in \mathbb{D}_S \text{ et } \rho(M\Delta/k) \leq \mu(M) = \rho(M\Delta_m).$$

$$\Rightarrow \forall \Delta \in \mathbb{E}_{Sk}, \quad \rho(M\Delta) \leq \rho(Mk\Delta_m).$$

$$\text{Mais } \bar{\sigma}(k\Delta_m) = k\bar{\sigma}(\Delta_m) = k \Rightarrow k\Delta_m \in \mathbb{E}_{Sk}$$

$$\Rightarrow \rho(Mk\Delta_m) = \max(\rho(M\Delta) \mid \Delta \in \mathbb{E}_{Sk}) \quad \blacksquare$$

Maintenant, si $\mu(M) = \rho(M\Delta_m) \neq 0$, $\rho(Mk\Delta_m)$ croît strictement avec k . Partant de $k = 0$, choisissons dans $\mathbb{E}_S$ des matrices Δ dont la norme k est de plus en plus grande. Tant que $\rho(Mk\Delta_m) < 1$, on a $\rho(M\Delta) < 1$ et $\det(I - M\Delta) \neq 0 \quad \forall \Delta \in \mathbb{E}_{Sk}$. Mais, quand k arrive à une valeur k_m pour laquelle $\rho(Mk_m\Delta_m) = 1$, nous obtenons

$$k_m \mu(M) = 1 \text{ et } \det(I - Mk_m\Delta_m) = 0.$$

Donc si $\mu(M) \neq 0$, $\mu(M) = 1/k_m$ où k_m est la plus petite norme des matrices Δ de $\mathbb{E}_S$ qui annulent $\det(I - M\Delta)$. En d'autres termes,

$$\mu(M) = 1/k_m$$

$$\text{avec } k_m = \min_{\Delta \in \mathbb{E}_S} (\bar{\sigma}(\Delta) \mid \det(I - M\Delta) = 0). \quad (4-54)$$

Si un tel k_m n'existe pas, $\mu(M) = 0$ ($k_m = \infty$).

EXERCICE 4-8

1) Soit $\Delta = \text{diag}(\delta_1, \delta_2)$ (de structure $S = \{1, 1\}$). Écrire l'expression de $\bar{\sigma}(\Delta)$.

2) Si M est une matrice singulière 2×2 , déterminer la plus petite incertitude Δ de structure S qui annule $\det(I - M\Delta)$ et déduire la valeur de $\mu(M)$.
3) Vérifier le résultat en calculant $\mu(M)$ à partir de sa définition (4-51).

De retour au théorème Th.1, la nouvelle définition (4-54) signifie que $\mu(M)$ est l'inverse de la taille de la plus petite matrice d'incertitude Δ de $\mathbb{E}_S$ qui déstabilise la boucle fermée (M, Δ) . Plus $\mu(M)$ est petit, plus la marge de stabilité est grande puisqu'il faudra des grandes incertitudes Δ pour déstabiliser le système. On définit donc la marge de stabilité par

$$mg = k_m = \min_{\omega} [\mu(M)]^{-1}. \quad (4-55)$$

EXERCICE 4-9

Montrer que la marge de stabilité mg diminue si l'on ne tient pas compte de la structure de l'incertitude Δ et on la suppose non structurée.

Calcul numérique de μ

La difficulté dans le critère (4-52) de la stabilité robuste des systèmes à incertitude structurée réside dans le calcul numérique de $\mu(M)$. En effet, la fonction $\rho(M\Delta)$ de la définition (4-51) de $\mu(M)$ comporte en général plus qu'un maximum local dans $\mathbb{D}_S$ ce qui rend difficile la détermination de la matrice Δ_m pour laquelle $\rho(M\Delta)$ atteint son maximum absolu. Le calcul de $\mu(M)$ à partir de (4-54) présente aussi des difficultés numériques. La technique généralement employée pour évaluer approximativement $\mu(M)$ consiste à trouver deux valeurs suffisamment voisines α et β telles que $\alpha \leq \mu(M) \leq \beta$. On a d'abord la propriété suivante.

P1. μ est toujours compris entre ρ et $\bar{\sigma}$:

$$\rho(M) \leq \mu(M) \leq \bar{\sigma}(M). \quad (4-56)$$

Preuve

Pour toute structure d'incertitude S , la matrice unité $I \in \mathbb{D}_S$ d'où, d'après (4-51),

$$\mu(M) \geq \rho(MI) = \rho(M).$$

D'autre part, $\mathbb{D}_S \subset \mathbb{D} \quad \forall S$ d'où, d'après (4-51) et (4-29),

$$\mu(M) = \max_{\Delta \in \mathbb{D}_S} \rho(M\Delta) \leq \max_{\Delta \in \mathbb{D}} \rho(M\Delta) = \bar{\sigma}(M) \quad \blacksquare$$

Malheureusement, l'intervalle $[\rho(M), \bar{\sigma}(M)]$ est généralement trop large pour tirer de (4-56) une valeur de $\mu(M)$ suffisamment précise. En effet, pour la matrice M de l'exemple (4-6), nous avons obtenu $\rho(M)=1$ et $\bar{\sigma}(M)=\sqrt{10}$. Il faut donc trouver pour $\mu(M)$ une borne inférieure α plus grande que $\rho(M)$ et une borne supérieure β plus petite que $\bar{\sigma}(M)$. Dans ce but, établissons les deux propriétés P2 et P3 suivantes en attirant l'attention que le produit de 2 matrices de même structure S est une matrice de structure S et que si A est une matrice (n, m) et B une matrice (m, n) , les matrices AB et BA ont les mêmes valeurs propres puisque $ABv = \lambda v \Rightarrow BA(Bv) = \lambda(Bv)$.

P2. Si U est une matrice unitaire ($U^*U = I$) qui appartient à $\mathbb{E}_S$

$$\mu(MU) = \mu(M). \quad (4-57)$$

Preuve

D'après (4-54),

$$\mu(MU) = 1/k_{mu},$$

$$\text{avec } k_{mu} = \min_{\Delta \in \mathbb{E}_S} (\bar{\sigma}(\Delta) | \det(I - MU\Delta) = 0).$$

Mais $U \in \mathbb{E}_S \Rightarrow (\Delta' = U\Delta \in \mathbb{E}_S \quad \forall \Delta \in \mathbb{E}_S)$ et on a $\bar{\sigma}(\Delta') = \bar{\sigma}(\Delta)$ car $\Delta'^* \Delta' = \Delta^* U^* U \Delta = \Delta^* \Delta$. Donc

$$k_{mu} = \min_{\Delta' \in \mathbb{E}_S} (\bar{\sigma}(\Delta') | \det(I - M\Delta') = 0) = k_m$$

d'où l'égalité (4-57). $\blacksquare$

P3. Si D est une matrice inversible qui commute avec Δ ($D\Delta = \Delta D$), $\Delta \in \mathbb{E}_S$, on a :

$$\mu(D^{-1}MD) = \mu(M). \quad (4-58)$$

Preuve

$$\begin{aligned} \mu(D^{-1}MD) &= \max_{\Delta \in \mathbb{D}_S} \rho(D^{-1}MD\Delta) \\ &= \max_{\Delta \in \mathbb{D}_S} \rho(D\Delta D^{-1}M) \quad \text{car } \lambda(AB) = \lambda(BA) \\ &= \max_{\Delta \in \mathbb{D}_S} \rho(\Delta D D^{-1}M) = \max_{\Delta \in \mathbb{D}_S} \rho(\Delta M) \\ &= \mu(M) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Désignons maintenant par $\mathcal{U}$ l'ensemble des matrices unitaires $U \in \mathbb{E}_S$ et par $\mathcal{D}$ l'ensemble des

matrices D inversibles qui commutent avec Δ . La propriété suivante définit un intervalle contenant $\mu(M)$ dont la largeur est beaucoup plus petite que celle de l'intervalle (4-56).

P4.

$$\alpha = \max_{U \in \mathcal{U}} \rho(MU) \leq \mu(M) \leq \min_{D \in \mathcal{D}} \bar{\sigma}(D^{-1}MD) = \beta.$$

Preuve

Tenant compte de (4-57) et (4-56), on a :

$$\begin{aligned} \mu(M) &= \mu(MU) \geq \rho(MU) \quad \forall U \in \mathcal{U} \\ \Rightarrow \mu(M) &\geq \max_{U \in \mathcal{U}} \rho(MU) = \alpha. \end{aligned}$$

De même, (4-58) et (4-56) impliquent

$$\begin{aligned} \mu(M) &= \mu(D^{-1}MD) \leq \bar{\sigma}(D^{-1}MD) \quad \forall D \in \mathcal{D} \\ \Rightarrow \mu(M) &\leq \min_{D \in \mathcal{D}} \bar{\sigma}(D^{-1}MD) = \beta. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

On peut démontrer que $\alpha = \mu(M)$ mais la maximisation de $\rho(MU)$, présentent les mêmes difficultés que la maximisation de $\rho(M\Delta)$ de la définition (4-51). Par contre, le calcul de β est plus simple car on démontre que la fonction matricielle $\bar{\sigma}(D^{-1}MD)$ est convexe sur $\mathcal{D}$ et elle ne possède donc qu'un seul minimum (le minimum absolu). Il s'avère que ce minimum β est en général très voisin de α et donc de $\mu(M)$.

EXERCICE 4-10

Pour le couple (M, Δ) de l'exercice 4-9,

1) Déterminer l'ensemble $\mathcal{U}$ des matrices unitaires $U \in \mathbb{E}_S$ et l'ensemble $\mathcal{D}$ des matrices D inversibles qui commutent avec Δ .

2) Calculer

$$\alpha = \max_{U \in \mathcal{U}} \rho(MU) \quad \text{et} \quad \beta = \min_{D \in \mathcal{D}} \bar{\sigma}(D^{-1}MD).$$

Conclure et comparer avec l'exercice 4-9.

Remarque. Pour se conformer encore mieux à la réalité physique, on impose parfois à certains blocs $\delta_i I_{r_i}$ de Δ d'être réels ($\delta_i \in \mathbb{R}$ et ne peut pas être complexe) et on dit dans ce cas que la structure S de Δ est *mixte*. Avec cette restriction supplémentaire, le théorème Th.2 et toutes ses conséquences ne s'appliquent plus à $\mathbb{D}_S$ puisque, pour S mixte, cet ensemble n'est plus de type $\mathbb{D}_c$ (voir 4-26). Le traitement de la structure mixte nécessite donc certaines modifications de la théorie exposée ci-dessus. Vu sa complexité surtout en ce qui con-

cerne le calcul de μ , nous ne rentrons pas dans les détails de cette généralisation mais nous signalons que Matlab est muni d'un programme qui calcule les bornes de μ dans toutes les situations (structure de type $\mathbb{D}_c$, mixte ou diagonale entièrement réelle).

L'instruction « mussv » (μ structured singular value) de Matlab calcule les bornes α et β de $\mu(M)$ pour une structure donnée des incertitudes. La matrice M peut être constante ou dépendante de la fréquence. Dans ce dernier cas, les bornes de $\mu(M)$ sont calculées pour chaque fréquence. La structure se définit dans Matlab par une matrice S à 2 colonnes et autant de lignes que de blocs dans Δ . Si le $i^{\text{ème}}$ bloc est de type δI_r , la $i^{\text{ème}}$ ligne de S est de la forme $[\varepsilon r \ 0]$ avec $\varepsilon = -1$ si δ est réel et $\varepsilon = 1$, si δ est libre d'être complexe ou réel. Si le $i^{\text{ème}}$ bloc est non structuré ayant m lignes et n colonnes, la $i^{\text{ème}}$ ligne de S est de la forme $[m \ n]$.

Exemple 4-7

Introduisons la matrice de transfert

$$M(s) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{s+1} & \frac{4}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{s+2} & \frac{2}{s+1} \end{pmatrix}$$

```
>> s = tf('s');
>> M = [-1/(s+1) 4/((s+1)*(s+2))
        -2/(s+2) 2/(s+1)];
```

On obtient $M_f = M(j\omega)$, $\omega \in (0, 10)$ rd/sec, en écrivant :

```
>> w = 0 : 0.1 : 10;
>> Mf = frd(M, w); % frequency response data
```

Définissons les structures de l'exemple 4-6.

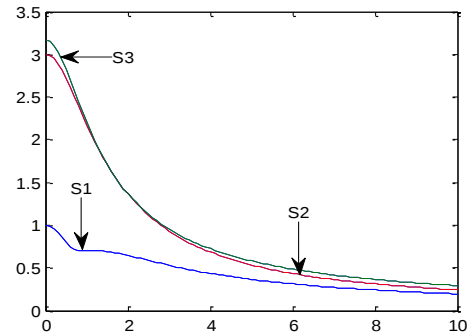
```
>> S1 = [2 0]; S2 = [1 0; 1 0]; S3 = [2 2];
```

Calculons à l'aide de « mussv » les bornes α et β de $\mu(M)$ pour chaque structure S_i et chaque fréquence ω .

```
>> brn1 = mussv(Mf, S1);
>> brn2 = mussv(Mf, S2);
>> brn3 = mussv(Mf, S3);
```

Représentons ces bornes en fonction de ω .

```
>> plot(brn1,'b',brn2,'r',brn3,'g')
```



À l'échelle de la figure, on ne voit qu'une seule courbe par structure ce qui montre que les 2 bornes α et β sont presque confondues avec $\mu(M)$ quelle que soit la fréquence.

L'exemple suivant montre que quand l'incertitude est structurée, il est important de tenir compte de cette structure.

Exemple 4-8

Considérons un système à deux entrées et une sortie modélisé par la fonction de transfert

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{5}{s+1} & \frac{-1}{s+2} \end{bmatrix}.$$

Pour l'organe de commande de type PI (proportionnel intégral)

$$K(s) = \frac{s+2}{s} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

la fonction de transfert de la boucle ouverte du système de commande nominal est :

$$L(s) = G(s)K(s) = \frac{4s+9}{s(s+1)}.$$

Il est facile de voir que la boucle fermée de ce système est nominalement stable.

Supposons maintenant que G est incertain et que la fonction de transfert du système réel est l'une des fonctions

$$\tilde{G}(s) = G(s)[I + w_e(s)\Delta]$$

avec $\Delta = \text{diag}(\delta_1, \delta_2)$, $\|\Delta\|_\infty \leq 1$

et
$$w_e(s) = \frac{0.5s + 0.5}{0.4s + 1}.$$

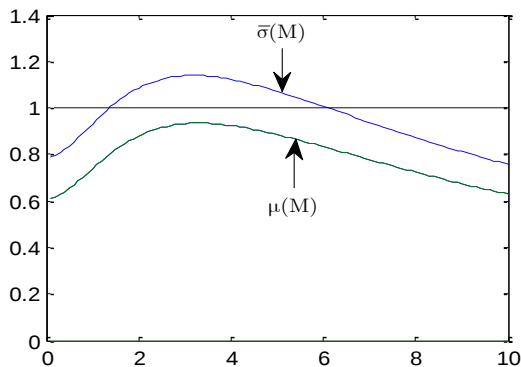
Il s'agit donc d'une incertitude à l'entrée multiplicative et structurée valant 0.5 (50 %) à faibles fréquence, 5/4 (125 %) à hautes fréquence et 1 (100 %) au voisinage de 2 rad/sec.

D'après le tableau 4-1, on a :

$$M = w_e T_e = w_e K G [I + K G]^{-1}.$$

On examine la robustesse de la stabilité de ce système en appliquant le théorème Th.4. D'autre part, pour voir que devient le résultat si l'on ne tient pas compte de la structure de Δ , on applique le théorème Th.3 ou, ce qui revient au même, le théorème Th.4 pour la structure $\{(2,2)\}$. Écrivons donc le programme suivant.

```
>> G = [5/(s+1) -1/(s+2)];
>> K = [(s+2)/s (s+2)/s]';
>> we = (0.5*s+0.5)/(0.4*s+1);
>> M = we*K*G*inv(eye(2)+K*G);
>> w = 0 : 0.1 : 10;
>> Mf = frd(M,w); % réponse fréquentielle
>> S = [1 0 ; 1 0];
>> brn = mussv(Mf,S);
>> plot(brn)
>> hold
>> sig = svd(Mf);
>> plot(sig)
```



Comme $\mu(M) < 1, \forall \omega$, la stabilité du système est robuste. Si l'on ne tient pas compte de la structure de Δ , comme $\|M\|_\infty > 1$, on arrive à la fausse conclusion que la stabilité n'est pas robuste. Ainsi, en structurant les incertitudes, on peut améliorer la performance tout en conservant la robustesse de la stabilité.

4-5 Performance Robuste

Nous avons vu qu'un système de commande peut être représenté par la configuration (N, Δ) de la figure 4-10. Δ est la matrice d'incertitude et $N(s)$ incorpore tous les autres organes du schéma détaillé de la figure 4-8 : le système commandé G , l'organe de commande K , les fonctions de pondération des incertitudes w_i et les filtres d'entrée et de sortie W_{wi} et W_{zi} . L'entrée du système de commande (N, Δ) est le vecteur w des perturbations généralisées w_i (entrées exogènes) et sa sortie est le vecteur z des variables de performance z_i . La fonction de transfert liant w à z est donnée par (voir (4-21))

$$\begin{aligned} T_{wz} &= F_h(N, \Delta) \\ &= N_{22} + N_{21} \Delta (I - N_{11} \Delta)^{-1} N_{12}. \end{aligned} \quad (4-59)$$

Nous avons signalé à la section 4-2 que le système de commande est performant si les variables $z_i = w_{zi} \tilde{z}_i$ restent petites pour toutes les entrées physiquement possibles $\tilde{w}_i = w_{wi} w_i$. Il est commode de normaliser w_i et z_i afin d'obtenir un critère de performance indépendant de l'intensité de ces variables. Dans ce but, on ajuste les gains statiques des filtres fictifs w_{wi} d'entrée de sorte que $\|w\|_2 \leq 1$ pour tout vecteur $\tilde{w}$ possible et on ajuste les gains statiques des filtres w_{zi} de sortie de sorte que si $\|z\|_2 < 1$ les variables $\tilde{z}_i$ seront considérées petites. Comme $\|z\|_2 \leq \|T_{zw}\|_\infty \|w\|_2$ (voir (3-88)), le système, ainsi normalisé, sera jugé performant si

$$\|T_{zw}\|_\infty = \|F_h(N, \Delta)\|_\infty < 1. \quad (4-60)$$

On dit que la performance est robuste si la relation (4-60) est vraie pour toutes les matrices d'incertitude $\Delta \in \mathbb{D}_S$.

Il va de soit que la performance sans la stabilité est dépourvue de sens. Nous allons donc supposer qu'on a préalablement déterminé un organe de commande K qui stabilise $T_{zw}, \forall \Delta \in \mathbb{D}_S$. Sous cette condition, on déduit du théorème Th.3 que la relation (4-60) sera vérifiée $\forall \Delta \in \mathbb{D}_S$ si et seulement si la boucle fermée (T_{zw}, Δ_p) est stable pour toute matrice non structurée $\Delta_p \in \mathbb{D}$. En remplaçant dans cette boucle T_{zw} par sa configuration $(N,$

Δ), elle se représente par la figure 4-18a équivalente à la configuration 4-18b avec $h' = [h ; z]$ et $v' = [v ; w]$.

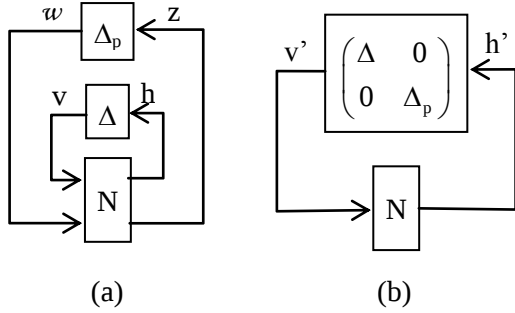


Fig. 4-18 Boucles de performance

Ainsi, la robustesse en performance du système de commande T_{zw} est équivalente à la robustesse en stabilité de la boucle $(N, \hat{\Delta})$ où

$$\hat{\Delta} = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_p \end{pmatrix} \quad (4-61)$$

est une matrice structurée comportant un bloc Δ structuré ou non et un autre bloc Δ_p non structuré (plein). Par conséquent, le théorème suivant découle directement du théorème Th.4.

Th.5 Si $N(s)$ est stable et la stabilité de T_{zw} est robuste, la performance du système de commande est robuste si et seulement si, pour la structure $\hat{S}$ de $\hat{\Delta}$,

$$\sup_{\omega} \mu_{\hat{S}}[N(j\omega)] < 1. \quad (4-62)$$

La condition sur la stabilité robuste de T_{zw} peut être supprimée du théorème Th.5 grâce aux remarques suivantes et leur conséquence.

Remarques

1) Comme nous l'avons signalé au début de la section 4-3, les filtres W_{wi} et W_{zi} des entrées exogènes et des variables de performance sont toujours choisis stables et la stabilité de T_{zw} se ramène à celle de la boucle fermée (M, Δ) de la figure 4-13. Or cette boucle s'obtient en supprimant de la configuration (N, Δ) de la figure 4-10 l'entrée w et la sortie z , ce qui signifie que $M = N_{11}$. Par conséquent, si N est (intérieurement) stable, il en est de même de N_{11} et, d'après le théorème Th.4, la condition nécessaire et suffi-

sante de la stabilité robuste de T_{zw} peut aussi s'écrire

$$\sup_{\omega} \mu_S[N_{11}(j\omega)] < 1 \quad (4-63)$$

où S est la structure de Δ .

2) La performance nominale se définit en annulant la matrice d'incertitude Δ dans (4-60). Comme, d'après (4-59), $F_h(N, 0) = N_{22}$, le système nominal est considéré performant si

$$\|N_{22}\|_{\infty} = \sup_{\omega} \bar{\sigma}[N_{22}(j\omega)] < 1. \quad (4-64)$$

Conséquence

• Si la performance d'un système est robuste, sa stabilité l'est aussi. En effet, $\mu_{\hat{S}}(N) = \max_{\hat{\Delta}} \rho(N\hat{\Delta})$. Or, d'après la formule de Schur, les valeurs propres de $N\hat{\Delta}$ vérifient :

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - N\hat{\Delta}) &= \det(\lambda I - N_{11}\Delta) \cdot \det(A) \\ &= \det(\lambda I - N_{22}\Delta_p) \cdot \det(B) = 0 \end{aligned}$$

où A et B sont des matrices dépendantes de λ . On en déduit que toute valeur propre λ de $N_{11}\Delta$ ou de $N_{22}\Delta_p$ est aussi une valeur propre de $N\hat{\Delta}$. D'où, par définition de la fonction μ ,

$$\mu_{\hat{S}}(N) \geq \max \{ \mu_S(N_{11}), \mu_{S_p}(N_{22}) \}.$$

Par conséquent, la condition (4-62) implique (4-63) et en plus elle implique (4-64) puisque, Δ_p n'étant pas structurée, $\mu_{S_p}(N_{22}) = \bar{\sigma}(N_{22})$.

Conclusion

Pour analyser la robustesse d'une politique de commande il est d'abord nécessaire que le système de commande nominal soit intérieurement stable, c'est-à-dire que les 4 sous-matrices de $N(s)$ soient stables. Sous cette condition, le système de commande sera robuste en stabilité et en performance si la relation (4-62) est satisfaite. Si elle ne l'est pas, la performance n'est pas robuste mais la stabilité peut l'être selon que la condition (4-63) soit vérifiée ou non. De même, il va de soit qu'un système de commande peut être nominalement performant sans que cette performance soit robuste et ceci arrive quand la condition (4-64) est vérifiée mais pas la condition (4-62). L'exemple

suivant détaille l'analyse de la robustesse d'un système de commande.

Exemple récapitulatif

Soit

$$\tilde{G}(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{s-1}{(s+1)(s+\beta)} \\ \frac{\alpha}{s+2} & \frac{3}{s+1} \end{pmatrix}$$

le modèle d'un système à 2 entrées, 2 sorties où α et β sont des paramètres incertains valant respectivement 1 et 2 à 20% près. Le modèle nominal $G(s)$ s'obtient donc en remplaçant dans la matrice $\tilde{G}(s)$ α par 1 et β par 2. Les éléments incertains de $\tilde{G}(s)$ s'écrivent :

$$\tilde{g}_{21} = g_{21}(1 + w_\alpha \delta_\alpha) \quad \text{et} \quad \tilde{g}_{12} = g_{12}(1 + w_\beta \delta_\beta)^{-1}$$

où $g_{ij}(s)$ sont les éléments de la matrice nominale $G(s)$, $|\delta_\alpha| \leq 1$, $|\delta_\beta| \leq 1$ et

$$w_\alpha = 0.2, \quad w_\beta = \frac{0.4}{s+2} \quad (4-65)$$

(voir (4-13')) donnant l'expression d'une fonction de transfert ayant un pôle incertain).

Une autre incertitude provenant des dynamiques négligées s'introduit sous la forme multiplicative

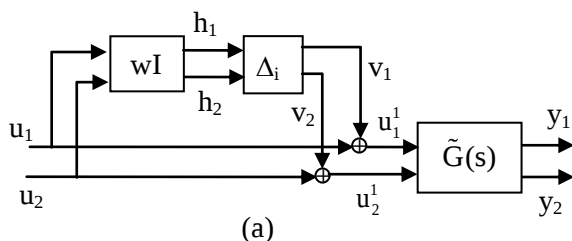
$$\tilde{\tilde{G}}(s) = \tilde{G}(s)[I + w(s)\Delta_i(s)]$$

où $\Delta_i \in \mathbb{D}$ et

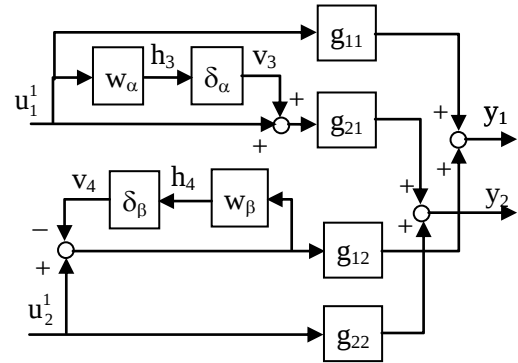
$$w(s) = 2 \frac{0.1s + 0.1}{0.1s + 2}. \quad (4-66)$$

L'incertitude relative maximum due aux dynamiques négligées est donc de 10% à faibles fréquences, de 200% à hautes fréquences et de 100% autour de la fréquence 10 rad/sec.

Le modèle incertain $\tilde{\tilde{G}}(s)$ est représenté par la figure 4-19a et la figure 4-19b détaille $\tilde{G}(s)$ avec ses incertitudes paramétriques.



(a)



(b)

Fig. 4-19 Incertitude paramétrique et multiplicative.

Par inspection de ces figures, on tire :

$$h_1 = w u_1,$$

$$h_2 = w u_2,$$

$$h_3 = w_\alpha (u_1 + v_1),$$

$$h_4 = w_\beta (u_2 + v_2 - v_4),$$

$$y_1 = g_{11}(u_1 + v_1) + g_{12}(u_2 + v_2 - v_4),$$

$$y_2 = g_{21}(u_1 + v_1 + v_3) + g_{22}(u_2 + v_2).$$

Les matrices de transfert Δ et H de ce système (voir fig. 4-5) sont donc données par :

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_i & 0 & 0 \\ 0 & \delta_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \delta_\beta \end{pmatrix}, \quad \Delta_i \in \mathbb{C}^{2 \times 2}, \quad \|\Delta_i\|_\infty \leq 1, \quad |\delta_\alpha| \leq 1, \quad |\delta_\beta| \leq 1.$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w \\ w_\alpha & 0 & 0 & 0 & w_\alpha & 0 \\ 0 & w_\beta & 0 & -w_\beta & 0 & w_\beta \\ \hline g_{11} & g_{12} & 0 & -g_{12} & g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} & g_{21} & 0 & g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \quad (4-67)$$

Nous allons établir à partir du modèle nominal une commande LQR avec intégration de l'erreur, c.à.d. de type $u = K_i z - K_c x$ avec $\dot{z} = e = \tilde{r} - y$ (voir section 2-7), puis examiner la robustesse de cette commande. Pour déterminer les matrices K_i et K_c , il est d'abord nécessaire d'associer des équations d'état à la matrice de transfert $G(s)$. La

réalisation de Jordan de cette matrice de transfert est la suivante (voir section 1-3) :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette réalisation est minimale étant contrôlable et observable. Supposons que l'indice de performance à minimiser est donné par

$$J = \int_0^{\infty} 2y_1^2 + y_2^2 + u_1^2 + u_2^2 dt$$

$$= \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

où

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les matrices K_c de retour d'état et la matrice K_i d'intégration se calculent par les instructions suivantes où

$$Ac = \hat{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix}, \quad Bc = \hat{B} = \begin{pmatrix} B \\ -D \end{pmatrix},$$

$$Qc = \hat{Q} = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}, \quad Kch = \hat{K} = [K_c \quad -K_i].$$

>> % Commande

>> A = [-1 0 0 0; 0 -2 0 0; 0 0 -2 0; 0 0 0 -1];

>> B = [1 -2; 0 3; 1 0; 0 3];

>> C = [1 1 0 0; 0 0 1 1];

>> D = zeros(2,2);

>> Q = [2 2 0 0; 2 2 0 0; 0 0 1 1; 0 0 1 1];

>> R = eye(2);

>> Ac = [A zeros(4,2); -C eye(2)];

>> Bc = [B; -D];

>> Qc = [Q zeros(4,2); zeros(2,4); eye(2)];

>> [Kch, P, lam] = lqr(Ac, Bc, Qc, R);

>> Kc = Kch(:, 1:4);

>> Ki = -Kch(:, 5:6);

On obtient :

$K_c =$

$$\begin{pmatrix} 2.9033 & 2.1280 & 0.0514 & 0.0038 \\ -0.6384 & -0.4086 & 1.2274 & 1.5240 \end{pmatrix}$$

$K_i =$

$$\begin{pmatrix} 5.9732 & 0.0714 \\ -1.2804 & 3.3455 \end{pmatrix}$$

Afin d'éviter la mesure de l'état x ou de l'estimer à l'aide d'un observateur, déterminons la commande u en fonction seulement de l'erreur e qui ne nécessite que la mesure de la sortie y . En posant

$$v = K_i z = (K_i / s) e,$$

on a :

$$u = v - K_c x \quad \text{et}$$

$$\dot{x} = Ax + B(v - K_c x)$$

d'où

$$u = K(s)e \quad \text{avec}$$

$$K(s) = [I - K_c(sI - A + BK_c)^{-1}B] \frac{K_i}{s} \quad (4-68)$$

$$= (I - K_v) \frac{K_i}{s}$$

Comme l'état x déduit à partir du modèle peut être différent de l'état du système réel, l'organe de commande $K(s)$ donné par (4-68) n'est pas équivalent à la commande LQR qu'on sait qu'elle est très robuste (voir 3-61'). Pour examiner l'efficacité de $K(s)$, définissons les signaux de référence et de perturbation possibles ainsi que les variables de performance.

a) Les transformées de Laplace des références effectives possibles sont de la forme :

$$\tilde{r} = w_r(s).r = \frac{5}{0.2s + 1} r, \quad (4-69)$$

où $r = [r_1; r_2]$ est un signal vectoriel quelconque vérifiant $\|r(t)\|_2 \leq 1$. La norme $\mathcal{L}_2$ de toute référence $\tilde{r}$ vérifie

$$\|\tilde{r}\|_2 \leq \|w_r\|_{\infty} \|r\|_2 \leq 5$$

et les fréquences significatives contenues dans $\tilde{r}$ sont inférieures à 25 rad/sec. Si, par exemple, r est

constant sur $[0, T]$ de valeur $\rho = [\rho_1 ; \rho_2]$ et nul ailleurs, sa transformée de Laplace est :

$$r = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \rho \quad \text{et} \quad \tilde{r} = \frac{5(1 - e^{-Ts})}{s(0.2s + 1)} \rho.$$

L'amplitude de $\tilde{r}(t)$ est donc 5ρ et sa forme diffère légèrement de celle de r : sa montée en 0 et sa descente en T ne sont pas en saut comme c'est le cas pour r , mais exponentielles avec une constante de temps 0.2 sec. Ceci rend $\tilde{r}$ plus conforme à la réalité physique. À noter que ρ et T doivent vérifier la contrainte :

$$\|r(t)\|_2^2 = \int_0^T \|\rho\|^2 dt = T(\rho_1^2 + \rho_2^2) \leq 1.$$

b) Les perturbations à la sortie du système commandé sont données par

$$\tilde{d} = w_d(s)d(s) = \frac{2}{0.2s + 1} d(s) \quad (4-70)$$

où $d = [d_1 ; d_2]$ est un signal vectoriel quelconque vérifiant $\|d(t)\|_2 \leq 1$. La norme $\mathcal{L}_2$ de toute perturbation $\tilde{d}$ vérifie

$$\|\tilde{d}\|_2 \leq \|w_d\|_\infty \|d\|_2 \leq 2$$

et les fréquences significatives contenues dans $\tilde{d}$ sont inférieures à 10 rad/sec.

c) On désire que l'erreur e entre la référence $\tilde{r}$ et la sortie y soit telle que

$$\|z_e\|_2 \leq 1 \quad \text{avec} \quad z_e(s) = w_{ze}(s)e(s) = \frac{s + 2}{10(s + \varepsilon)} e(s), \quad (4-71)$$

ε étant une petite valeur ($= 0.01$) introduite afin que le filtre w_{ze} soit stable. En négligeant ε , (4-71) implique que l'erreur doit être nulle (ou presque) pour les faibles fréquences (en régime stationnaire) mais peut augmenter jusqu'à 10 pour des fréquences supérieures à 2 rad/sec.

d) Pour ne pas trop solliciter les actionneurs à hautes fréquences, on impose au signal de commande u la contrainte suivante :

$$\|z_u\|_2 \leq 1 \quad \text{avec} \quad z_u = w_{zu}(s)u(s) = \frac{s}{5(s + 10)} u(s). \quad (4-72)$$

Sous cette condition, $\|u(\omega)\|$ sera inférieur à 5 pour les fréquences $\omega \geq 10$ rad/sec.

En groupant maintenant le système commandé incertain (4-67) à l'organe de commande (4-68) et aux filtres (4-69), (4-70) des entrées exogènes et (4-71), (4-72) des variables de performances, on obtient le système représenté par la figure 4-20.

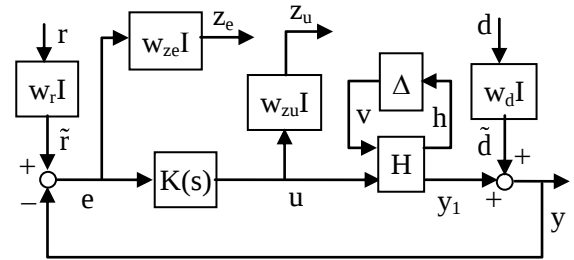


Fig. 4-20 Schéma détaillé de la commande $K(s)$ d'un système incertain perturbé

La matrice N de la configuration (N, Δ) de ce système a pour entrées v et $w = [r ; d]$ et pour sorties h et $z = [z_e ; z_u]$. Pour déterminer les 4 éléments N_{ij} de cette matrice, supprimons Δ et commençons par exprimer l'erreur e en fonction de v et de $\tilde{w} = [\tilde{r} \quad \tilde{d}] = [w_r \quad w_d]$. On a

$$\begin{aligned} e &= \tilde{r} - y = \tilde{r} - (H_{21}v + H_{22}u + \tilde{d}) \\ &= \tilde{r} - H_{21}v - H_{22}Ke - \tilde{d} \end{aligned}$$

d'où

$$e = (I + H_{22}K)^{-1}(\tilde{r} - \tilde{d} - H_{21}v).$$

Sachant que $H_{22} = G$ et que $(I + GK)^{-1}$ est la fonction de sensibilité S , on écrit :

$$\begin{aligned} e &= -SH_{21}v + Sw_r r - Sw_d d \\ &= -SH_{21}v + [S \quad -S] W_w w \end{aligned}$$

où

$$W_w = \begin{pmatrix} w_r I_2 & 0 \\ 0 & w_d I_2 \end{pmatrix}.$$

En remplaçant cette expression de e dans les équations

$$h = H_{11}v + H_{12}Ke$$

$$z = \begin{pmatrix} z_e \\ z_d \end{pmatrix} = W_z \begin{pmatrix} I \\ K \end{pmatrix} e$$

où

$$W_z = \begin{pmatrix} w_{ze} I_2 & 0 \\ 0 & w_{zu} I_2 \end{pmatrix},$$

on obtient :

$$h = N_{11}v + N_{12}w$$

$$z = N_{21}v + N_{22}w$$

avec

$$N_{11} = H_{11} - H_{12}KSH_{21},$$

$$N_{12} = H_{12} [KS \quad -KS] W_w,$$

$$N_{21} = -W_z \begin{pmatrix} S \\ KS \end{pmatrix} H_{21}, \quad (4-73)$$

$$N_{22} = W_z \begin{pmatrix} S & -S \\ KS & -KS \end{pmatrix} W_w.$$

Ces expressions sont utiles pour montrer l'effet de la sensibilité et des incertitudes sur la réponse du système. Cependant, nous pouvons obtenir N en supprimant Δ de la figure 4-20 et en connectant les autres organes à l'aide de l'instruction « sysic » comme le montre le programme ci-dessous. Ayant N, nous appliquons ensuite le Th.5 pour tester la robustesse en performance et en stabilité de la politique K(s) considérée.

Les instructions suivantes effectuent les calculs nécessaires pour cette analyse.

% Définition de G

```
>> n = {1 [1 -1]; 1 3};
>> d = {[1 1] [1 3 2]; [1 2] [1 1]};
>> G = tf(n,d);
```

% Pondérations des incertitudes (voir 4-65, 4-66)

```
>> wa = 0.2;
>> wb = tf(0.4,[1 2]);
>> w = tf(2*[0.1 0.1],[0.1 2]);
```

% Matrice H (voir 4-67)

```
>> H11 = [0 0 0 0; 0 0 0 0; wa 0 0 0; 0 wb 0 -wb];
>> H12 = [w 0; 0 w; wa 0; 0 wb];
>> H21 = [G [0 -G(1,2); G(2,1) 0]];
>> H22 = G;
>> H = [H11 H12; H21 H22];
```

% Organe de commande (voir 4-68)

```
>> Kv = tf(ss(A-B*Kc, B, Kc, zeros(2,2)));
>> K = (eye(2)-Kv)*(Ki/tf('s'));
```

% Filtres (voir 4-69 à 4-72)

```
>> dg = 0.01; % valeur de delta
>> Wr = tf(5, [0.2 1])*eye(2);
>> Wd = tf(2, [0.2 1])*eye(2);
>> Wze = tf([1 2], 10*[1 dg])*eye(2);
>> Wzu = tf([1 0], 5*[1 10])*eye(2);
```

% Matrice N et ses 4 blocs (voir fig. 4-20)

```
>> systemnames = 'H K Wr Wd Wze Wzu';
>> inputvar = '[v{4}; r{2}; d{2}]';
>> outputvar = '[H(1:4); Wze; Wzu]';
>> input_to_Wr = '[r]';
>> input_to_Wd = '[d]';
>> input_to_H = '[v; K+Wd]';
>> input_to_K = '[Wr-H(5,6)]';
>> input_to_Wze = '[Wr-H(5,6)]';
>> input_to_Wzu = '[K]';
>> N = sysic;
>> N11 = N(1:4,1:4); N12 = N(1:4,5:8);
>> N21 = N(5:8,1:4); N22 = N(5:8,5:8);
```

Les sous-matrices N_{ij} de N peuvent comporter des pôles et des zéros simplifiables (voir ch1, section 1-6). On commence donc par effectuer la simplification des N_{ij} par l'instruction « minreal » (minimum realization) avant de tester leur stabilité par la question « isstable » (est-il stable ?) dont la réponse vaut 1 si le système testé est stable et vaut 0 si ce système est instable.

```
>> N11 = minreal(N11); N12 = minreal(N12);
>> N21 = minreal(N21); N22 = minreal(N22);
>> [isstable(N11), isstable(N12);
    isstable(N21), isstable(N22)]
```

ans =

```
1 1
1 1
```

Ceci montre que le système nominal est intérieurement stable. Appliquons maintenant le théorème Th.5 pour analyser la robustesse de ce système en stabilité et en performance.

% Structure des incertitudes Δ , Δ_p , $\hat{\Delta}$ (voir 4-68)

```
>> S = [2 2; 1 0; 1 0];
>> Sp = [4 4];
>> Sc = [S; Sp];
```

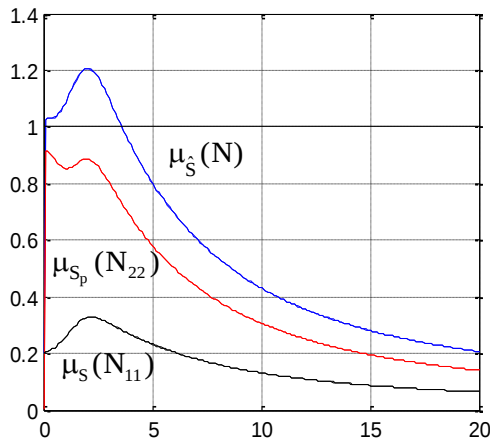
% Robustesse

```
>> w = 0 : 0.1 : 20;
>> Nf = frd(N,w);
>> brn = mussv(Nf,Sc);
```

```
>> plot(brn,'b')
>> hold
>> brn22 = mussv(N22f,Sp);
>> brn11 = mussv(N11f,S);
>> plot(brn22,'r',brn11,'k')
```

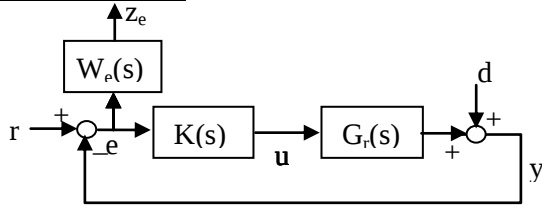
Le résultat est donné par la figure ci-dessous qui montre que la stabilité du système de commande est robuste ($\mu_s(N_{11}) < 1 \forall \omega$), qu'il est nominale-ment performant ($\mu_{Sp}(N_{22}) < 1 \forall \omega$) mais que cette performance n'est pas robuste puisqu'il existe des fréquences pour lesquelles $\mu_s(N) > 1$.

La marge de stabilité $MS = \min_{\omega} [\mu_s(N_{11})]^{-1} \cong 3$ signifiant grossièrement que les erreurs de modélisation peuvent encore augmenter 3 fois sans que le système de commande devienne instable. Ce système est donc très robuste en stabilité mais pas en performance.



La construction de politiques robustes en stabilité et en performance sera traitée dans les chapitres suivants.

EXERCICE 4-11



L'incertitude du procédé est modélisée par la forme multiplicative de sortie $G_r = (I + w\Delta)G$ et les entrées par $r = W_r w_r$ et $d = W_d w_d$. En supposant que la norme $\mathcal{L}_2$ de $w = [w_r; w_d]$ est inférieure à 1 et en posant $W = [W_r, -W_d]$, montrer que $\bar{\sigma}(W_e S) + \bar{\sigma}(wT)\bar{\sigma}(W) \leq 1 \Rightarrow \|z_e\|_2 \leq 1$, (système robuste en stabilité et performance).

AUTRES EXERCICES ET COMPLÉMENTS

4-12. 1) Écrire la fonction de transfert d'un système d'équations d'état

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ 0 & -b \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} u, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x.$$

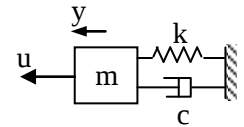
2) Sachant que

$$a = 1 + 0.1\delta_1, \quad b = 2 + 0.2\delta_2 \quad \text{et} \quad c = 3 + 0.3\delta_3$$

avec $|\delta_i| \leq 1$, construire un graphe représentant le système nominal et ses incertitudes.

3) Dédurre les matrices H et Δ de la configuration (H, Δ).

4-13. 1) Écrire les équations d'état du système ci-contre.



2) Montrer que sa fonction

de transfert y/u est égale à la transformation linéaire fractionnaire $G(s) = F_h(Q, E)$ où E dépend des paramètres m, k, c et Q est indépendant de ces paramètres.

4-14. L'incertitude de la boucle ouverte $L = GK = ND^{-1}$ d'un système de commande est modélisée par $L_r = N_r D_r^{-1}$ avec $N_r = N(I + w_n \Delta_1)$ et $D_r = D(I + w_d \Delta_2)$ où la norme de $\Delta = [\Delta_1, \Delta_2]$ est $\|\Delta\|_\infty \leq 1$. Montrer que ce système peut être représenté par le graphe ci-dessous et déterminer sa condition de stabilité.

4-15. Un double intégrateur $G(s) = 1/s^2$ est commandé en boucle unitaire par un organe de type PD, $k_1(s) = k_p + \tau_d s$.

1) Déterminer k_p et τ_d pour que les pôles de la boucle fermée soient $1 \pm j$. Pour que l'organe de commande soit propre, on remplace $k_1(s)$ par $k(s) = k_1(s)/(10k_p + \tau_d s)$.

2) En fait, le système commandé réel est $G_r(s) = a/s^2(1 + \tau s)$ où a et τ sont voisins de 1 et de 0 mais inconnus. Construire le graphe représentant le modèle $G(s)$ avec ses incertitudes.

3) Quelle condition doivent vérifier les paramètres a et τ pour que l'organe $k(s)$ ci-dessus stabilise le système réel $G_r(s)$?

4-16. Considérons la configuration (M, Δ) et supposons que $M = M_1 M_2$. Soit S la structure de Δ , S_1 celle de ΔM_1 et S_2 celle de $M_2 \Delta$. Montrer que

$$\mu_s(M) \leq \bar{\sigma}(M_1) \mu_{S_1}(M_2)$$

$$\text{et} \quad \mu_s(M) \leq \bar{\sigma}(M_2) \mu_{S_2}(M_1).$$

4-17. Soit la matrice carrée

$$M = \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

où les 4 blocs sont carrés de même dimension n .

1) En appliquant la formule de Schur donnée dans la section 3-5, montrer qu'une valeur propre de M est égale à la racine carrée d'une valeur propre de AB .

2) Si $S_1 = \{2n\}$ est la structure de l'incertitude Δ , montrer que $\mu_{S_1}(M) = \sqrt{\rho(AB)}$.

3) Soient U_A et V_A les matrices unitaires de la décomposition singulière de A et soient U_B et V_B celles de B . En posant

$$\Delta_A = U_B V_A^* \text{ et } \Delta_B = U_A V_B^*,$$

montrer que $\rho(A\Delta_B B\Delta_A) = \bar{\sigma}(A)\bar{\sigma}(B)$.

4) Si $S_2 = \{(n, n), (n, n)\}$ est la structure de Δ , montrer que $\mu_{S_2}(M) = \sqrt{\bar{\sigma}(A)\bar{\sigma}(B)}$.

5) Si $S_3 = \{(2n, 2n)\}$ est la structure de Δ , montrer que $\mu_{S_3}(M) = \max[\bar{\sigma}(A), \bar{\sigma}(B)]$.

6) En désignant par $mg(S)$ la marge de stabilité quand la structure de l'incertitude est S , vérifier que $mg(S_1) \geq mg(S_2) \geq mg(S_3)$. Ceci est-il intuitivement vrai ?