

# Chapitre 4

## VISION ET TRAJECTOIRE D'UN ROBOT

### A- VISION

Pour éviter les obstacles, manipuler les objets ou optimiser son parcours, un robot doit être capable de détecter les objets se trouvant dans son entourage. La vision par caméra est un moyen de perception très efficace ayant un vaste champ d'observation permettant de distinguer les objets et de déterminer leurs positions. Nous montrons dans la première partie de ce chapitre comment l'image d'un objet est saisie par une caméra, comment calibrer celle-ci pour déterminer les paramètres nécessaires à l'analyse de l'image et par quels programmes peut-on traiter l'image pour distinguer entre les différents objets et préciser leurs positions. Ces informations permettent au robot d'accomplir sa tâche en suivant, sans secousses, une trajectoire qui évite les obstacles et optimise un critère temporel ou spatial donné. La planification de la trajectoire sera envisagée à la deuxième partie de ce chapitre.

#### 4-1 CAPTEUR VISUEL

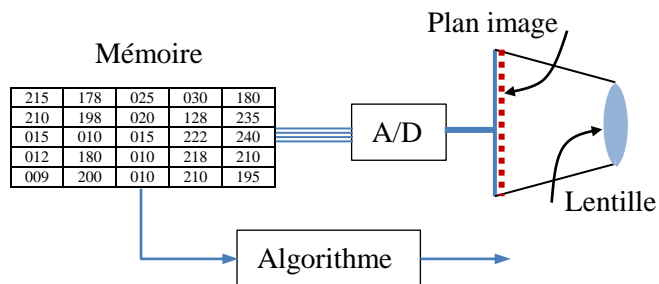


Fig. 4-1 Système de vision d'un robot

La caméra d'un robot est essentiellement constituée d'un système optique assimilable à une lentille mince convergente et d'une plaque, appelée, plan image (ou rétine), comportant sur sa surface un étalage de cellules photosensibles en CCD (Charge-

Coupled Device) ou en CMOS (fig. 4-1). Chaque cellule transforme la lumière en tension électrique proportionnelle au nombre des photons reçus par la cellule. Un convertisseur A/D associe à cette tension un nombre binaire qui lui est proportionnel, généralement compris entre 0 et 255. Une mémoire sous forme d'un tableau retient les valeurs associées aux différentes cellules et un algorithme traite ces valeurs afin de distinguer entre les objets photographiés et déterminer leurs positions et leurs orientations.

**Formation de l'image.** Pour montrer comment l'image d'un objet se forme sur le plan image de la caméra, rappelons d'abord les propriétés suivantes d'une lentille mince convergente.

- En traversant la lentille, tous les rayons incidents parallèles à l'axe de la lentille convergent vers un même point F appelé *foyer* ou *point focal* de la lentille.
- Tout rayon passant par le centre C de la lentille, appelé *centre optique*, traverse la lentille sans modifier sa direction.
- L'image d'un objet ponctuel P est l'intersection Q de deux rayons émanant de P, l'un parallèle à l'axe de la lentille et l'autre passant par son centre C. Tout autre rayon émanant de P et qui traverse la lentille passe aussi par Q (fig.4-2).

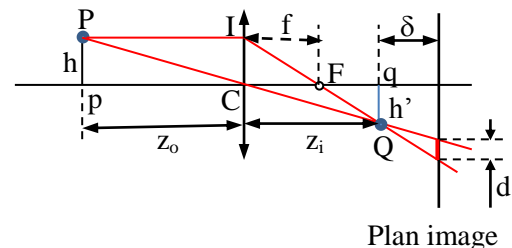


Fig. 4-2 Image d'un objet ponctuel

Des triangles semblables  $PpC$  et  $QqC$  et des triangles semblables  $CIF$  et  $QqF$ , on a :

$$\frac{h'}{h} = \frac{z_i}{z_o} \quad \text{et} \quad \frac{h'}{h} = \frac{z_i - f}{f}$$

d'où la position de l'image est liée à celle de l'objet par la relation :

$$\frac{1}{z_o} + \frac{1}{z_i} = \frac{1}{f}. \quad (4-1)$$

Sachant que la *distance focale*  $f$  ( $< z_i$ ) d'une lentille est constante, l'équation (4-1) montre que l'image s'éloigne de  $F$  quand l'objet se rapproche de  $C$ . D'autre part, pour une position donnée  $z_o$  du point objet  $P$ , si le plan image est placé à une distance de la lentille  $z_i$  vérifiant (4-1), l'image de  $P$  sera un point net  $Q$ , mais si ce plan est placé en  $z_i \pm \delta$ , l'image de  $P$  sera un cercle (image floue) ayant, d'après les triangles semblables de sommet commun  $Q$  et de hauteurs  $\delta$  et  $z_i$ , un diamètre  $d = h\delta/z_i$ . Par conséquent, pour obtenir une image suffisamment nette, il est nécessaire que  $h$  soit très petit. Pour cette raison, on place devant la lentille un diaphragme (barrière) comportant un petit trou (trou d'aiguille) de diamètre  $2\varepsilon$  tel que  $\varepsilon/f \ll 1$  (fig. 4-3). Par ce dispositif, tout rayon qui traverse la lentille passe presque par le centre optique  $C$  et poursuit son chemin jusqu'au plan image sans dévier.

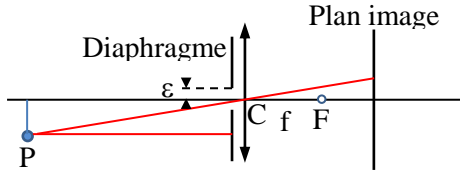


Fig. 4-3 Modèle du trou d'aiguille.

**Projection perspective.** En général, la position  $z_o$  de l'objet est beaucoup plus grande que la distance focale  $f$ . Par conséquent, d'après (4-1), les images de tous les points suffisamment éloignés de la caméra se situent en  $z_i \approx f$ . Il suffit donc que le plan image soit confondu avec le plan focal pour obtenir des images nettes de tous ces points. À remarquer d'autre part que le sens de l'image est opposé à celui de l'objet. Pour que l'image soit de même sens que l'objet, on suppose fictivement que le plan image se trouve à une distance  $f$  devant la caméra. L'intersection  $O$  de l'axe de la lentille avec ce plan est appelée *point principal* (fig. 4-4).

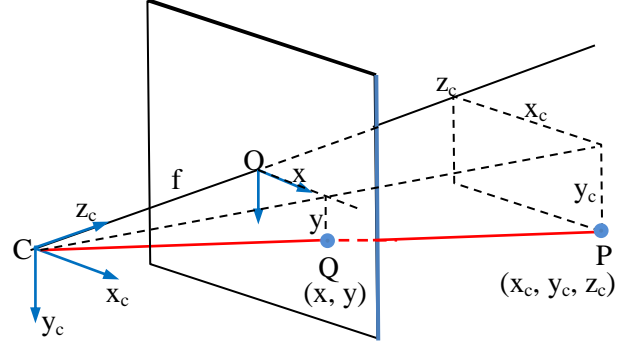


Fig. 4-4 Image d'un point  $P$  sur le plan image fictif

Rattachons à la caméra un repère  $L_c = (C, x_c, y_c, z_c)$ ,  $z_c$  étant porté par l'axe de la caméra, et au plan image fictif un repère  $L_o = (O, x, y)$ ,  $x$  et  $y$  étant parallèles à  $x_c$  et  $y_c$ . En considérant sur la figure 4-4 les triangles semblables de sommet commun  $C$  et de bases  $x$  et  $x_c$  (ou  $y$  et  $y_c$ ), les coordonnées de l'image  $Q$ , appelée *projection perspective* de  $P$ , sont liées aux coordonnées de l'objet  $P$  par les relations :

$$x = f \frac{x_c}{z_c} \quad \text{et} \quad y = f \frac{y_c}{z_c}. \quad (4-2)$$

Soit une droite  $D$  passant par un point  $P_0 = (x_{c0}, y_{c0}, z_{c0})$  et de vecteur directeur  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ . Un point  $P$  de cette droite a pour coordonnées

$$x_c = x_{c0} + \lambda v_1, \quad y_c = y_{c0} + \lambda v_2, \quad z_c = z_{c0} + \lambda v_3$$

où  $\lambda \in \mathbb{R}$ . En remplaçant dans (4-2), on déduit que l'image  $\Delta$  de  $D$  a pour équations paramétriques

$$x = f \frac{x_{c0} + \lambda v_1}{z_{c0} + \lambda v_3} \quad \text{et} \quad y = f \frac{y_{c0} + \lambda v_2}{z_{c0} + \lambda v_3}. \quad (4-3)$$

En posant  $x_0 = f \frac{x_{c0}}{z_{c0}}$  et  $y_0 = f \frac{y_{c0}}{z_{c0}}$

les coordonnées de l'image  $Q_0$  de  $P_0$ , il est facile de vérifier que  $\Delta$  est une droite d'équation

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f \cdot v_2 - y_0 v_3}{f \cdot v_1 - x_0 v_3}. \quad (4-4)$$

On voit que la pente de  $\Delta$  ne dépend pas seulement de la direction  $\vec{v}$  de  $D$  mais aussi du point  $P_0$  par

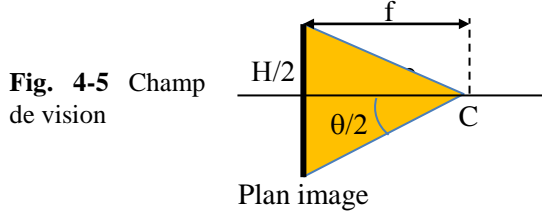
lequel passe D. Par conséquent, les images  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  de deux droites parallèles  $D_1$  et  $D_2$  ne sont pas parallèles sauf si  $v_3 = 0$  c.à.d. si  $D_1$  et  $D_2$  sont parallèles au plan image. Dans ce cas particulier  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  auront la même pente  $v_2/v_1$  que  $D_1$  et  $D_2$ . c.à.d. elles seront parallèles à ces droites.

D'autre part, quand  $\lambda \rightarrow \infty$ , les relations (4-3) montrent que l'image Q de P tend vers

$$Q_L = (x_L, y_L) = f \begin{bmatrix} \frac{v_1}{v_3} & \frac{v_2}{v_3} \end{bmatrix}. \quad (4-5)$$

Le point limite  $Q_L$  ne dépend donc pas de  $P_0$  mais seulement de la direction  $\vec{v}$  de D. Ceci signifie que les images de droites parallèles convergent toutes vers un même point  $Q_L$  appelé *point de fuite*.

Le *champ de vision* vertical de la caméra se définit par l'angle  $\theta$  sous lequel le centre optique C voit la hauteur H du plan image c.à.d. c'est l'angle du secteur vertical dont les rayons arrivent au plan image. Le champ de vision horizontal se définit de la même manière.



La figure 4-5 montre que

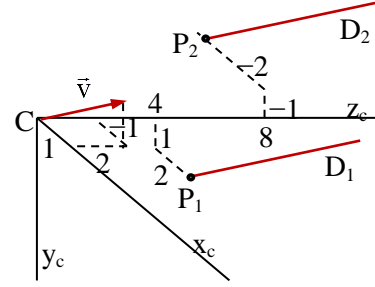
$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{H}{2f} \Rightarrow \theta = 2 \operatorname{arctg} \frac{H}{2f}. \quad (4-6)$$

Il est donc d'autant plus grand que la distance focale est petite.

#### Exemple 4-1

Considérons une caméra de distance focale  $f = 2$  cm et dont le plan image a une hauteur  $H = 3$  cm et une largeur  $L = 4$  cm. Ses champs vertical et horizontal de vision sont, d'après (4-6) :

$$\theta_v = 2 \operatorname{arctg} \frac{3}{2(2)} = 73.74^\circ \text{ et } \theta_h = 2 \operatorname{arctg} \frac{4}{2(2)} = 90^\circ.$$



Soient deux droites parallèles  $D_1$  et  $D_2$  de vecteur directeur  $\vec{v} = (1, -1, 2)$  et passant respectivement par  $P_1 = (2, 1, 4)$  et  $P_2 = (-2, -1, 8)$ . D'après (4-2), les images de ces points sont :

$$Q_1 = 0.02 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = (1 \ 0.5) \text{ cm}$$

$$\text{et } Q_2 = 0.02 \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} = (-0.5 \ -0.25) \text{ cm}$$

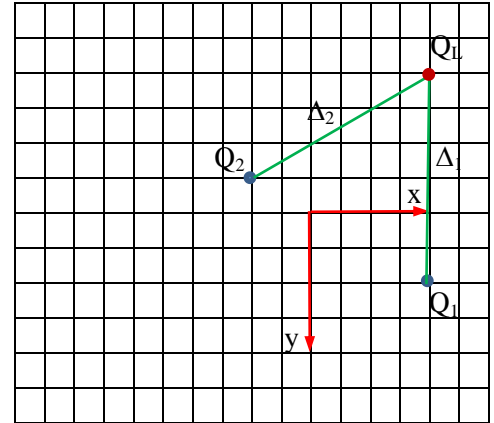
et, d'après (4-5), le point de fuite de  $D_1$  et  $D_2$  est :

$$Q_L = (1 \ -1) \text{ cm}.$$

Les pentes des images de ces droites sont donc

$$m_1 = \frac{-1 - 0.5}{1 - 1} = -\infty \quad \text{et} \quad m_2 = \frac{-1 + 0.25}{1 + 0.5} = -\frac{1}{2}$$

qu'on peut aussi déduire de (4-4).



#### Plan image discret.

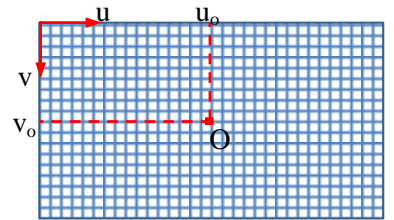


Fig. 4-6 Plan image discret

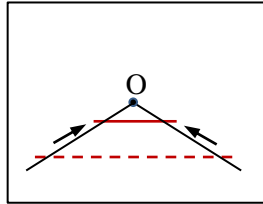
Comme nous l'avons signalé au début du chapitre, le plan image est pavé de cellules photosensibles à

chacune correspond un pixel dans l'image définitive. La position d'une cellule (ou pixel) se définit par le numéro de sa colonne et le numéro de sa ligne par rapport au coin supérieur gauche du plan image comme le montre la figure 4-6. Ces numéros sont les coordonnées discrétisées  $(u, v)$  du pixel et désignons par  $(u_o, v_o)$  les coordonnées discrétisées du point principal  $O$ . La fabrication moderne des semi-conducteurs permet d'admettre qu'une cellule est exactement rectangulaire de largeur  $s_u$  et de hauteur  $s_v$ . Sous cette hypothèse, actuellement acceptable, et tenant compte de (4-2), les coordonnées du point objet sont liées aux coordonnées discrétisées de son image par les équations

$$\begin{aligned} u &= u_o + \frac{x}{s_u} = u_o + \alpha_u \frac{x_c}{z_c}, \\ v &= v_o + \frac{y}{s_v} = v_o + \alpha_v \frac{y_c}{z_c} \end{aligned} \quad (4-7)$$

où  $\alpha_u = f/s_u$  et  $\alpha_v = f/s_v$  sont des mesures en nombre de pixels de la distance focale. Souvent les cellules sont carrées et  $\alpha_u = \alpha_v$ . L'équation (4-7) montre que les images des objets sont d'autant plus voisines du point principal que ces objets sont éloignés de la caméra. La figure 4-6 représente une tige qui se déplace sur deux rails parallèles à l'axe  $z_c$  ( $v_1 = v_2 = 0 \rightarrow Q_L = O$ ) en s'éloignant de la caméra.

**Fig. 4-6** Image d'une tige qui s'éloigne de la caméra



Pour des objets situés sur un plan parallèle au plan image à une distance  $z_c$  constante de la caméra, les équations (4-7) sont linéaires et peuvent s'écrire sous forme matricielle :

$$z_c \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_u & 0 & u_o \\ 0 & \alpha_v & v_o \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}. \quad (4-8)$$

En posant  $Q_h = [z_c u \quad z_c v \quad z_c]^T$  la position en *coordonnées homogènes discrétisées* de l'image du point objet  $P = [x_c \quad y_c \quad z_c]$ , l'équation précédente s'écrit sous la forme compact :

$$Q_h = \mathbf{K}P \quad (4-9)$$

où la matrice  $\mathbf{K}$  qui définit la distance focale par  $\alpha_u$  ou  $\alpha_v$  et la position du point principal par  $u_o$  et  $v_o$  est appelée *matrice des paramètres intrinsèques* ou de *calibrage* de la caméra.

Souvent en pratique le point objet  $P$  se définit dans un repère inertiel  $L_\Omega = (\Omega, x_0, y_0, z_0)$  par un vecteur  $P^\Omega = (x_0, y_0, z_0)$ . Par transformation homogène on a :

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ 1 \end{pmatrix} = (\mathbf{R} \parallel \vec{t}) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad P = \mathbf{T}P_h^\Omega \quad (4-10)$$

$\mathbf{R}$  étant la matrice de rotation du repère inertiel  $L_\Omega$  par rapport au repère de la caméra  $L_c$ ,  $\vec{t} = \overrightarrow{C\Omega}$  et  $\mathbf{T}$  est appelée *matrice des paramètres extrinsèques*, définissant la position et l'orientation du repère  $L_\Omega$  par rapport à  $L_c$ .

De (4-9) et (4-10), on déduit que l'image en coordonnées homogènes discrétisées est liée à la position de l'objet par rapport au repère inertiel par la relation :

$$Q_h = \mathbf{KTP}_h^\Omega. \quad (4-11)$$

**Coordonnées normalisées.** D'après (4-7), les coordonnées non discrétisées d'un point du repère  $L_o = (O, x, y)$  de l'image sont liées aux coordonnées discrétisées par les relations :

$$x = s_u(u - u_o) \quad \text{et} \quad y = s_v(v - v_o).$$

Si l'on convient que l'unité de longueur est la distance focale ( $f = 1$ ) et sachant que  $s_u = f/\alpha_u$  et  $s_v = f/\alpha_v$ , les relations précédentes peuvent se grouper dans un vecteur homogène :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} u - u_o & v - v_o & 1 \\ \alpha_u & \alpha_v & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ 1 \end{pmatrix}^N = \bar{Q}. \quad (4-12)$$

Les deux premières composantes du vecteur  $\bar{Q}$  sont appelées *coordonnées normalisées* de l'image. D'autre part, on peut vérifier que l'inverse de la matrice  $\mathbf{K}$  définie en (4-8) est

$$\mathbf{K}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\alpha_u & 0 & -u_o/\alpha_u \\ 0 & 1/\alpha_v & -v_o/\alpha_v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4-13)$$

d'où, d'après (4-12) et la définition du vecteur homogène discrétisé  $Q_h$ , on a  $z_c \bar{Q} = \mathbf{K}^{-1} Q_h$ . De (4-9) on déduit que la position du point objet par rapport à la caméra s'obtient en multipliant le vecteur des coordonnées normalisées de l'image par  $z_c$ , c.à.d.

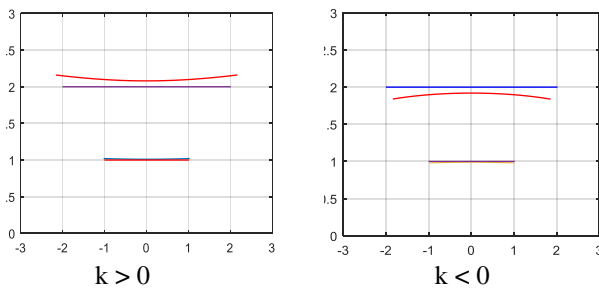
$$z_c \bar{Q} = P = \mathbf{T} P_h^\Omega. \quad (4-14)$$

**Distorsion.** Dans ce qui précède, nous avons admis que la fabrication de la lentille de la caméra est parfaite et que les rayons passent exactement par le centre optique C. Or ceci n'est pas tout à fait vrai et on constate généralement un déplacement des points images de leur position théorique surtout loin du point principal O. Ce déplacement se décompose en radial et tangentiel mais le déplacement radial est nettement le plus dominant. Pour la plupart des caméras, la formule suivante permet d'obtenir avec une bonne approximation la position corrigée  $\bar{r}_c$  de l'image à partir de sa position théorique  $\bar{r}$  :

$$\bar{r}_c = (1 + k r^2) \bar{r} \quad (4-15)$$

$$\bar{r}_c = \begin{pmatrix} u_c - u_o \\ v_c - v_o \end{pmatrix}, \quad \bar{r} = \begin{pmatrix} u - u_o \\ v - v_o \end{pmatrix}, \quad r = \|\bar{r}\|.$$

où  $k$  est un réel positif ou négatif.



**Fig. 4-7** Distorsion d'un segment

Les figures 4-7 montrent comment la distorsion (en

rouge) de l'image théorique d'un segment (en bleu) s'accroît quand les points de ce segment s'éloignent du point principal. On voit que la distorsion (positive ou négative) du segment voisin du point principal est négligeable tandis que celle de l'autre segment est assez significative.

## 4-2 CALIBRAGE DE LA CAMÉRA

En robotique, il est généralement nécessaire de connaître avec suffisamment de précision les paramètres intrinsèques c.à.d. la matrice  $\mathbf{K}$  et les paramètres extrinsèques c.à.d. la matrice  $\mathbf{T} = [\mathbf{R} \mid \bar{t}]$ . Les éléments de  $\mathbf{K}$  (distance focale et point principal) se modifient quand on répare ou réajuste la caméra et  $\mathbf{T}$  dépend de la pose de la caméra par rapport au repère inertiel. Le calibrage consiste à déterminer ces matrices à partir de l'image d'un certain nombre de points dont la position  $P_h^\Omega$  par rapport à un repère inertiel  $L_\Omega$  est connue. Plusieurs méthodes ont été proposées mais celle de Zhang est actuellement la plus employée à cause de sa simplicité expérimentale qui ne nécessite que l'image de points dessinés sur une surface plane (utilisant par exemple une grille d'échec) qu'on déplace pour obtenir un certain nombre de vues différentes.

**Homographie.** Soit un point P sur une surface plane S à laquelle est rattaché un repère inertiel orthonormé  $L_\Omega$  dont les axes  $x_0$  et  $y_0$  appartiennent à cette surface. Le vecteur homogène représentant P est donc de la forme  $P_h^\Omega = [x_0 \ y_0 \ 0 \ 1]^T$  et, d'après (4-11), la position de l'image Q de P en coordonnées homogènes discrétisées est donnée par le vecteur

$$Q_h = z_c \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{K} [\bar{r}^1 \ \bar{r}^2 \ \bar{r}^3 \mid \bar{t}] \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4-16)$$

$$= \mathbf{K} [\bar{r}^1 \ \bar{r}^2 \mid \bar{t}] \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{H} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où  $\bar{r}^i$  est la  $i^{\text{ème}}$  colonne de la matrice de rotation  $\mathbf{R}$  et la matrice  $\mathbf{H}_{3 \times 3}$  est appelée *homographie*.

Connaissant la position du point P par rapport à  $L_\Omega$  et la position (u, v) de son image il s'agit d'abord de déterminer les éléments de  $\mathbf{H}$  puis de déduire de  $\mathbf{H}$  les matrices  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{R}$  et le vecteur  $\vec{t}$ .

Commençons donc par estimer  $\mathbf{H}$ . En désignant par  $\vec{h}_i^T$  la  $i^{\text{ème}}$  ligne de cette matrice et par  $\vec{\xi}$  le vecteur  $[x_0 \ y_0 \ 1]^T$ , l'équation (4-16) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \vec{h}_1^T \vec{\xi} - z_c u \\ \vec{h}_2^T \vec{\xi} - z_c v \\ \vec{h}_3^T \vec{\xi} - z_c \end{pmatrix} = 0.$$

De la troisième ligne on tire  $z_c = \vec{h}_3^T \vec{\xi}$  d'où  $\vec{h}_3$  est proportionnel à l'inconnu  $z_c$ . En remplaçant  $z_c$  par son expression dans les deux premières équations et en arrangeant les termes, on obtient :

$$\begin{pmatrix} \vec{\xi}^T & 0 & -u\vec{\xi}^T \\ 0 & \vec{\xi}^T & -v\vec{\xi}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{h}_1 \\ \vec{h}_2 \\ \vec{h}_3 \end{pmatrix} = 0. \quad (4-17)$$

Ce système de deux équations à 9 inconnues est insuffisant pour obtenir les éléments de  $\mathbf{H}$  d'une manière unique (à un facteur  $\mu$  près dépendant de  $z_c$ ). La caméra doit capter, pour une position donnée de la surface S, les images d'au moins 3 autres points de cette surface (en fait pas moins que 20 points pour obtenir des valeurs précises). Soit n le nombre de ces points et désignons par  $\vec{\xi}_k$ ,  $k=1, \dots, n$ , leurs positions par rapport à  $L_\Omega$  et par  $(u_k, v_k)$  les positions en pixels de leurs images. Pour la pose considérée de la surface S par rapport à la caméra l'homographie  $\mathbf{H}$  ne se modifie pas et les équations relatives aux différents points peuvent se grouper en une seule équation matricielle :

$$\begin{pmatrix} \vec{\xi}_1^T & 0 & -u_1\vec{\xi}_1^T \\ 0 & \vec{\xi}_1^T & -v_1\vec{\xi}_1^T \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vec{\xi}_n^T & 0 & -u_n\vec{\xi}_n^T \\ 0 & \vec{\xi}_n^T & -v_n\vec{\xi}_n^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{h}_1 \\ \vec{h}_2 \\ \vec{h}_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{notée} \quad \mathbf{Q}\vec{h} = 0. \quad (4-18)$$

Comme le vecteur  $\vec{h}$  se définit à un facteur près, on peut le choisir unitaire. Il doit vérifier le mieux l'équation (4-18) en minimisant  $\|\mathbf{Q}\vec{h}\|^2 = \vec{h}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \vec{h}$ .

La meilleure solution  $\vec{h}$  est le vecteur propre unitaire de  $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}$  qui correspond à la plus petite valeur propre  $\lambda$  de cette matrice ( $\lambda$  est nécessairement positive dont la racine carrée est appelée valeur singulière de  $\mathbf{Q}$  (voir le ch.3 de la partie IV, commande multi-variable).

Ayant l'homographie  $\mathbf{H} = \mathbf{K}[\vec{r}^1 \ \vec{r}^2 \ \vec{t}]$ , il s'agit maintenant d'en extraire la matrice des paramètres intrinsèques  $\mathbf{K}$  et la matrice des paramètres extrinsèques  $\mathbf{T} = [\mathbf{R} \ \vec{t}]$ .

**Extraction de  $\mathbf{K}$ .** Désignons par  $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$  les colonnes d'une homographie  $\mathbf{H} = \mathbf{K}[\vec{r}_1 \ \vec{r}_2 \ \vec{t}]$ , c.à.d.  $\vec{w}_1 = \mathbf{K}\vec{r}_1$ ,  $\vec{w}_2 = \mathbf{K}\vec{r}_2$ ,  $\vec{w}_3 = \mathbf{K}\vec{t}$ . Sachant que  $\mathbf{R}$  est une matrice orthonormée, on a :  $\vec{r}_1^T \vec{r}_1 = \vec{r}_2^T \vec{r}_2 = 1$  et  $\vec{r}_1^T \vec{r}_2 = 0$  d'où, en remplaçant  $\vec{r}_1$  par  $\mathbf{K}^{-1}\vec{w}_1$  et  $\vec{r}_2$  par  $\mathbf{K}^{-1}\vec{w}_2$  et en convenant que  $\mathbf{K}^{-T} = (\mathbf{K}^{-1})^T$ , on obtient les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \vec{w}_1^T \mathbf{B} \vec{w}_1 - \vec{w}_2^T \mathbf{B} \vec{w}_2 &= 0, \\ \vec{w}_1^T \mathbf{B} \vec{w}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4-19)$$

où, d'après (4-13),

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1/\alpha_n^2 & 0 & -u_0/\alpha_u^2 \\ 0 & 1/\alpha_v^2 & -v_0/\alpha_v^2 \\ -u_0/\alpha_n^2 & -v_0/\alpha_v^2 & u_0^2/\alpha_u^2 + v_0^2/\alpha_v^2 + 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4-19')$$

En désignant les 5 inconnues de la matrice  $\mathbf{B}$  par  $b_{11}, b_{13}, b_{22}, b_{23}, b_{33}$  et les composantes connues de  $\vec{w}_1$  et  $\vec{w}_2$  respectivement par  $a_i$  et  $c_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , les équations (4-19) s'écrivent sous la forme :

$$\mathbf{A}\vec{b} = 0 \quad (4-20)$$

avec



$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_1^2 - c_1^2 & a_1 c_1 \\ 2(a_1 a_3 - c_1 c_3) & 2a_3 c_1 \\ (a_2^2 - c_2^2) & a_2 c_2 \\ 2(a_2 a_3 - c_2 c_3) & 2a_3 c_2 \\ (a_3^2 - c_3^2) & a_3 c_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{13} \\ b_{22} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix}.$$

Ici aussi, les deux équations (4-20) ne suffisent pas pour obtenir d'une manière unique les 5 composantes inconnues de  $\vec{b}$ . Il faut au moins deux autres homographies (en fait pas moins que 20 pour obtenir des valeurs précises) qu'on obtient en déplaçant et en orientant de différentes manières la surface  $S$  contenant les points objets. Soit  $m$  le nombre de ces homographies et désignons par  $\mathbf{A}_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , les matrices de l'équation (4-20) correspondantes. Comme la matrice des paramètres intrinsèques (c.à.d.  $\vec{b}$ ) ne se modifie pas d'une prise de vue à une autre, les  $2m$  équations se groupent sous la forme matricielle :

$$\mathcal{A}\vec{b} = 0, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_m \end{pmatrix}. \quad (4-21)$$

La meilleure solution  $\vec{b}$  est le vecteur propre de  $\mathcal{A}^T \mathcal{A}$  qui correspond à la plus petite valeur propre  $\lambda$ . Ayant  $\vec{b}$  c.à.d.  $\mathbf{B} = \mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}^{-1}$ , il reste à extraire la matrice  $\mathbf{K}$  de  $\mathbf{B}$ . Ceci se fait en appliquant la décomposition de Cholesky : toute matrice carrée  $\mathbf{B}$  symétrique et définie positive est égale à  $\mathbf{R}^T \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{R}$  étant une matrice triangulaire supérieure. Pour le voir, considérons le cas où  $\mathbf{B}$  est  $3 \times 3$  et déterminons la matrice triangulaire  $\mathbf{R}$  telle que  $\mathbf{B}_3 = \mathbf{R}_3^T \mathbf{R}_3$ . Cette égalité s'écrit :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \vec{a}^T \\ \vec{a} & \mathbf{B}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & \vec{0}^T \\ \vec{r} & \mathbf{R}_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & \vec{r}^T \\ \vec{0} & \mathbf{R}_2 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} r_{11}^2 & r_{11} \vec{r}^T \\ r_{11} \vec{r} & \vec{r} \vec{r}^T + \mathbf{R}_2^T \mathbf{R}_2 \end{pmatrix}$$

où  $\mathbf{R}_2$  est une matrice triangulaire supérieure  $2 \times 2$ . Il est facile de démontrer que

$\mathbf{B}_3 > 0$  (définie positive)  $\Rightarrow a_{11} > 0$  et  $\mathbf{B}_2 > 0$ .

De la première ligne de l'équation précédente et du bloc de la deuxième ligne, on tire :

$$r_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad \vec{r} = \frac{1}{r_{11}} \vec{a} \quad \text{et} \quad \mathbf{R}_2^T \mathbf{R}_2 = \mathbf{B}_2 - \vec{r} \vec{r}^T. \quad (4-22)$$

Il reste à déterminer les éléments de  $\mathbf{R}_2$  en appliquant (4-22) à la matrice définie positive

$$\mathbf{B}_2 - \vec{r} \vec{r}^T = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} - \frac{1}{a_{11}} \begin{pmatrix} a_{12}^2 & a_{12} a_{13} \\ a_{12} a_{13} & a_{13}^2 \end{pmatrix}.$$

On obtient :

$$r_{22} = \sqrt{a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}}, \quad r_{23} = \frac{1}{r_{22}} \left( a_{23} - \frac{a_{12} a_{13}}{a_{11}} \right) \quad (4-23) \\ \text{et} \quad r_{33} = \sqrt{a_{33} - \frac{a_{13}^2}{a_{11}} - r_{23}^2}.$$

Ceci complète le calcul de  $\mathbf{R}_3$ . Cette procédure peut se généraliser à  $\mathbf{B}_n \forall n$  mais comme  $\mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}^{-1} = \mathbf{B}_3$ , on a :  $\mathbf{K} = \mathbf{R}_3^{-1}$ .

#### Exemple 4-2

Supposons qu'une expérience nous donne

$$\vec{b}^T = 10^{-3} [1/4000 \quad -1 \quad 1/4000 \quad -3/4 \quad 7250]$$

d'où

$$\mathbf{B} = 10^{-3} \begin{pmatrix} 10^{-3}/4 & 0 & -1 \\ 0 & 10^{-3}/4 & -3/4 \\ -1 & -3/4 & 7250 \end{pmatrix}.$$

En appliquant (4-22) et (4-23), on obtient :

$$r_{11} = \frac{1}{2000}, \quad r_{12} = 0, \quad r_{13} = \frac{-1}{r_{11}} = -2 \\ r_{22} = \sqrt{\frac{10^{-3}}{4000} - 0} = \frac{1}{2000}, \quad r_{23} = 2000 \left( -\frac{3}{4} 10^{-3} - 0 \right) = -\frac{3}{2}, \\ r_{33} = \sqrt{7.25 - \frac{10^{-6}}{10^{-6}/4} - \frac{9}{4}} = 1$$

Donc

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2000} & 0 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2000} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2000 & 0 & 4000 \\ 0 & 2000 & 3000 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ce résultat s'obtient aussi en comparant  $\mathbf{B}$  à son expression (4-19'). Si les pixels du plan image sont carrés de côté  $s_u = s_v = 5 \mu\text{m}$  et le point principal est au milieu de ce plan, la distance focale est

$$f = \alpha_u s_u = 2000 \times 5 \times 10^{-6} = 10^{-2} \text{ m} \quad (1 \text{ cm})$$

et les dimensions du plan image sont

$$L = 2u_o s_u = 8000 \times 5 \times 10^{-6} = 4(10^{-2}) \text{ m} \quad (4 \text{ cm}),$$

$$H = 2v_o s_v = 6000 \times 5 \times 10^{-6} = 3(10^{-2}) \text{ m} \quad (3 \text{ cm}).$$

**Extraction de  $\mathbf{R}$  et  $\vec{t}$ .** Soit  $\mathbf{H}$  une homographie relative à une pose donnée de la surface  $S$ . Comme  $\mathbf{H}$  est défini à un facteur  $\mu$  près, on a :

$$\mu \mathbf{H} = \mathbf{K} \mathbf{T} = \mathbf{K} [\vec{r}_1 \quad \vec{r}_2 \quad \vec{t}] \quad (4-24)$$

où  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{K}$  sont des matrices maintenant connues. Comme ci-dessus, désignons par  $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$  les colonnes de  $\mathbf{H}$ . De (4-24) on tire :

$$\vec{r}_1 = \mu \mathbf{K}^{-1} \vec{w}_1, \quad \vec{r}_2 = \mu \mathbf{K}^{-1} \vec{w}_2, \quad \vec{t} = \mu \mathbf{K}^{-1} \vec{w}_3 \quad (4-25)$$

et pour avoir  $\vec{r}_1^T \vec{r}_1 = \vec{r}_2^T \vec{r}_2 = 1$ , il est nécessaire que

$$\mu = 1 / \sqrt{\vec{w}_1^T \mathbf{B} \vec{w}_1} = 1 / \sqrt{\vec{w}_2^T \mathbf{B} \vec{w}_2}, \quad (4-26)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}^{-1}.$$

$$\text{Enfin} \quad \vec{r}_3 = \vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2. \quad (4-27)$$

En général,  $\vec{w}_1^T \mathbf{B} \vec{w}_1 \neq \vec{w}_2^T \mathbf{B} \vec{w}_2$  et les égalités (4-26) ne seront pas satisfaites d'où  $\mu$  reste inconnu et les formules (4-25) et (4-27) ne définissent  $\mathbf{T}$  qu'à un facteur  $\mu$  près. Il existe des méthodes algébriques de localisation des objets, appelées PnP (perspective from n points), qui déterminent  $\mathbf{T}$  d'une manière

rapide et précise. Le lecteur peut par exemple se référer à l'article suivant :

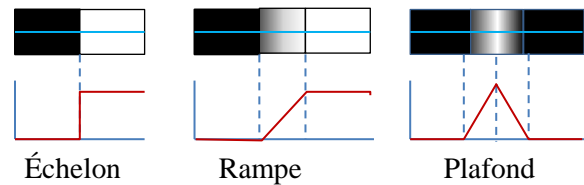
«Lepetit, Moreno Noguer, Fua, (2009) EPnP: An Accurate  $O(n)$  Solution to the PnP Problem, International Journal of Computer Vision».

Jusqu'ici nous n'avons considéré que la formation de l'image et le calibrage de la camera. Nous passons dans les paragraphes suivants à l'analyse de l'image pour séparer les régions représentant les objets afin de les identifier et déterminer leurs poses.

### 4-3 DÉTECTION DES CONTOURS

Nous avons vu que l'image d'une caméra est mémorisée sous forme d'un tableau contenant des entiers, entre 0 et 255, proportionnels aux intensités lumineuses reçues par les cellules photosensibles du plan image. À chaque case du tableau correspond un pixel de l'image finale ayant un niveau de gris allant du noir, si la valeur de la case est 0, au blanc si cette valeur est 255.

Un contour est la ligne qui sépare deux régions de l'image ayant deux niveaux de gris assez différents de sorte que sur cette ligne l'intensité varie rapidement en passant d'une région à l'autre. La figure 4-8 montre la variation de l'intensité  $I(x)$  le long d'un axe  $x$  (en vert) pour différents types de bordures entre les régions. Il est évident qu'à l'image se superpose généralement l'effet des bruits causés par la discrétisation des signaux, par les erreurs de transmission ou provenant de la scène photographiée elle-même.



**Fig. 4-8.** Différents types de bordure

La détection correcte d'une bordure doit répondre à un certain nombre de critères dont les plus importants sont :

- Maximiser la probabilité de rejeter les points qui ne font pas partie de la bordure.
- Maximiser la probabilité d'accepter tous les points de la bordure.
- Minimiser l'erreur de localisation de la bordure.



Généralement le niveau du gris varie rapidement sur la bordure et il est donc raisonnable de localiser celle-ci à l'extrémum de la dérivée de l'intensité  $I(x)$  c.à.d. au point où sa dérivée seconde change de signe. La figure 4-9 illustre ces deux propriétés qui sont à la base des techniques de détection des contours développées par la suite.

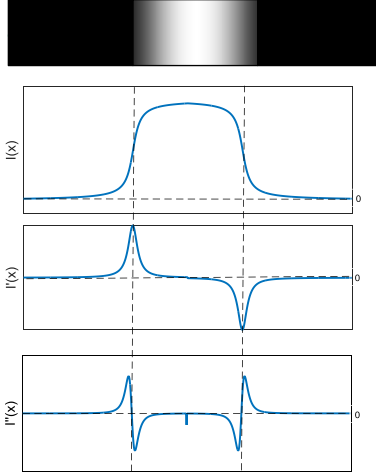


Fig. 4-9 Bases de la détection des bordures

**Emploi du gradient.** Le domaine de définition de l'intensité  $I(x, y)$  est le plan de l'image et ses dérivées premières selon  $x$  et  $y$  forment son gradient  $\nabla I = [\delta I / \delta x \quad \delta I / \delta y]^T$  qui a, au point considéré, la direction de la variation maximum de  $I$ . En fait, le domaine de  $I$  est discrétisé et la position d'un pixel se définit par un couple  $(i, j)$  de deux entiers,  $i$  est le numéro (du haut en bas) de la ligne du pixel et  $j$  est le numéro (de gauche à droite) de sa colonne. La discrétisation  $I'_x$  et  $I'_y$  des dérivées partielles de  $I$  peut être effectuées par différents opérateurs dont les plus connus sont ceux de Prewitt, Sobel et Roberts. Ces opérateurs assurent en même temps un certain filtrage des bruits.

#### Opérateur de Prewitt.

Cet opérateur estime les dérivées partielles de l'intensité  $I$  au point  $(i, j)$  par

$$I'_x = \frac{1}{3} [I(i-1, j+1) - I(i-1, j-1) + I(i, j+1) - I(i, j-1) + I(i+1, j+1) - I(i+1, j-1)]$$

et

$$I'_y = \frac{1}{3} [I(i+1, j-1) - I(i-1, j-1) + I(i+1, j) - I(i-1, j) + I(i+1, j+1) - I(i-1, j+1)].$$

Le calcul de  $I'_x$  et  $I'_y$  au point  $(i, j)$  revient à multiplier élément par élément le tableau  $I_{ij}$  suivant

$I(i-1, j-1)$	$I(i-1, j)$	$I(i-1, j+1)$
$I(i, j-1)$	$I(i, j)$	$I(i, j+1)$
$I(i+1, j-1)$	$I(i+1, j)$	$I(i+1, j+1)$

respectivement par les tableaux :

$h_x$			$h_y$		
$1/3$	-1	0	1	$1/3$	-1
	-1	0	1		0
	-1	0	1		1

appelés *masques*. À remarquer que

$$I'_x = \sum_{n=-1}^{+1} \sum_{m=-1}^{+1} h_x(n, m) I(i+n, j+m)$$

d'où  $I'_x = I_{ij} * h_x$  par définition du produit de convolution de  $I_{ij}$  et  $h_x$ . De même  $I'_y = I_{ij} * h_y$ . Nous admettons qu'à l'extérieur de l'image les valeurs de l'intensité sont nulles.

#### Opérateur de Sobel.

Il ne diffère de l'opérateur de Prewitt que par la pondération des cases situées dans la même ligne et la même colonne que  $(i, j)$ . En d'autres termes les masques de cet opérateur sont :

$h_x$			$h_y$		
$1/3$	-1	0	1	$1/3$	-1
	-2	0	2		0
	-1	0	1		1

#### Opérateur de Roberts.

Cet opérateur associe à la case  $(i, j)$  les dérivées partielles au point  $(i + 1/2, j + 1/2)$  approximées par

$$I'_x = I(i, j) - I(i+1, j+1),$$

$$I'_y = I(i+1, j) - I(i, j+1),$$

dont les masques sont :

$$h_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad h_y = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**Filtrage.** Avant de calculer les dérivées, il est nécessaire de commencer par filtrer les bruits qui se superposent à l'image car la dérivée d'un bruit peut surpasser les maximums de la dérivée de l'intensité propre ce qui cache les points du contour. La figure 4-10 montre que, si le long d'une droite l'intensité est un échelon bruité, la dérivée ne détecte pas la position du saut c.à.d. le point de passage d'une région à une autre.

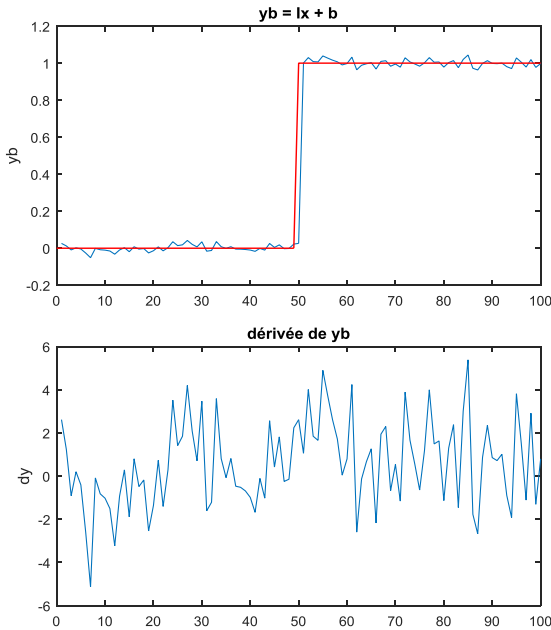


Fig. 4-10 Dérivation d'un échelon bruité.

Filtrer le bruit consiste à atténuer ses variations en remplaçant la valeur de chaque pixel par une moyenne pondérée des valeurs des pixels avoisinants. Supposons que le long d'un axe  $x$  l'intensité bruité est la suite  $I_b(i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Le filtrage de  $I_b(i)$  par les pondérations  $g(k)$ ,  $-r \leq k \leq r$ , remplace  $I_b(i)$  par

$$I(i) = \sum_{k=-r}^r g(k) I_b(i+k), \quad \sum_{k=-r}^r g(k) = 1 \quad (4-28)$$

c.à.d. l'intensité filtrée  $I$  est le produit de convolution de  $I_b$  par le filtre  $g$  dont le rayon du

masque est  $r$ . En général, pour ne pas trop modifier la valeur du pixel, le poids doit décroître au fur et à mesure qu'on s'éloigne de ce pixel. La distribution normale bidimensionnelle de Gauss de moyenne l'origine et d'écart type  $\sigma$ ,  $N([0, 0], \sigma I)$ , jouit de cette propriété ayant la forme d'une cloche (fig.4-11). Elle est définie par la fonction

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \quad (4-29)$$

et les valeurs de sa discrétisation,  $g(k_1, k_2)$ , constituent les pondérations de filtrage. Ces valeurs s'obtiennent en remplaçant dans (4-29)  $x$  par  $k_1 s$  et  $y$  par  $k_2 s$  où  $s$  est le côté d'un pixel supposé carré. Or, pour  $x > 3\sigma$  (ou  $y > 3\sigma$ ), les valeurs de  $g$  deviennent négligeables. On peut donc se contenter d'un masque carré  $g$  de côté  $2r + 1 \leq 6\sigma/s$  pour filtrer l'intensité  $I_b$  par le Gaussien  $g$ . En augmentant la valeur de  $\sigma$  le poids central  $g(0, 0)$  du filtre diminue et  $r$  augmente ce qui élimine mieux le bruit mais modifie plus la valeur de  $I$  et rend le contour plus flou. Il faut donc choisir une valeur de  $\sigma$  qui assure un bon compromis entre le filtrage du bruit et la précision de localisation du contour. Souvent, un filtrage acceptable s'obtient pour  $s \leq \sigma < 2s$  ce qui revient à adopter un masque de côté  $2r + 1 = 5, 7, 9$ , ou 11 pixels.

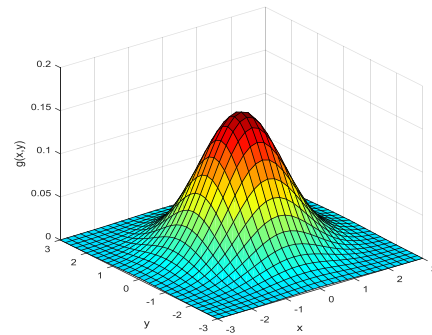


Fig. 4-11 Distribution de Gauss

Ayant l'intensité filtrée  $I = I_b * g$ , ses dérivées partielles s'obtiennent en appliquant l'un des opérateurs de dérivation ( $h_x, h_y$ ) donnés ci-dessus. En d'autres termes,

$$I'_x = (I_b * g) * h_x \quad \text{et} \quad I'_y = (I_b * g) * h_y.$$

Mais, il est facile de démontrer que le produit de convolution est associatif ce qui permet d'écrire :

$$I'_x = I_b * gh_x \quad \text{et} \quad I'_y = I_b * gh_y \quad (4-30)$$

où  $gh_\alpha = g * h_\alpha$ ,  $\alpha = x$  ou  $y$ , est un nouveau opérateur appelé *dérivée du Gaussien*.

**Détecteur de contours de Canny.** En un point de l'image, la direction du gradient  $\nabla I$  de l'intensité  $I$  est celle de la variation maximum de  $I$  et sa norme est d'autant plus grande que cette variation est rapide. Ceci nous permet d'accepter qu'en un point du contour la norme du gradient est maximum et sa direction est orthogonale au contour. Cette remarque est à la base du détecteur de Canny dont l'algorithme se subdivise en 5 étapes.

1) Calcul des dérivées partielles filtrées.  
Par application des relations (4-30).

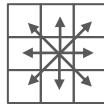
2) Calcul du module et de la direction du gradient.  
Le carré de la norme Euclidienne du gradient est

$$m(i, j) = \|\nabla I\|^2 = I'^2_x(i, j) + I'^2_y(i, j) \quad (4-31)$$

et sa direction est définie par l'angle

$$\theta(i, j) = \text{Arg}(\nabla I) = \text{atan2}(I'_y(i, j), I'_x(i, j)). \quad (4-32)$$

Cette direction sera approximée par celle d'un vecteur  $\vec{v}$  joignant le centre du pixel  $(i, j)$  au centre d'un pixel voisin (fig. ci-contre), c.à.d. on remplace  $\theta$  par



$$\theta_a(i, j) = k\pi/4 \quad \text{tel que} \quad |k\pi/4 - \theta(i, j)| \text{ min} \quad (4-33)$$

d'où  $\vec{v} = [\delta_x \ \delta_y]^T$  (4-33)  
avec

$$\delta_x = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 2 \text{ ou } 6 \\ 1 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad \text{et} \quad \delta_y = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0 \text{ ou } 4 \\ 1 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

3) Élimination des pixels non maximums.

Un pixel n'est pas un point du contour et on lui associe la valeur 0 si le module de son gradient est strictement inférieur à ceux des deux pixels voisins

situés dans le sens positif et négatif de ce gradient. En d'autres termes, si

$$m(i, j) < \min[m(i + \delta_x, j + \delta_y), m(i - \delta_x, j - \delta_y)]$$

alors  $m(i, j) \rightarrow 0$ .

4) Seuils d'hystérésis.

On choisit deux seuils : haut  $H$  et bas  $B$  et soit  $m$  le module du gradient d'un pixel. Si  $m$  est supérieur à  $H$ , le pixel appartient au contour, on lui associe la valeur 2 et on dit qu'il est fort. Si  $m$  est entre  $B$  et  $H$ , on associe au pixel la valeur 1 et on dit qu'il est faible. Enfin si  $m$  est plus petit que  $B$ , il n'appartient pas au contour et on lui associe la valeur 0. Donc

$$m(i, j) \rightarrow \begin{cases} 2 & \text{si } m(i, j) \geq H, \\ 1 & \text{si } B \leq m(i, j) < H, \\ 0 & \text{si } m(i, j) < B. \end{cases}$$

5) Connexion des pixels du contour

Si un pixel est faible (de valeur 1) et l'un de ses 8 voisins est fort il devient lui aussi un point fort du contour en lui associant la valeur 2. Ceci se répète jusqu'à ce qu'aucun pixel faible ne soit en connexion à un pixel fort. Tous les pixels faibles qui restent reçoivent la valeur 0 et le contour sera constitué des pixels de valeur 2.

#### Exemple 4-4

Le tableau suivant contient les modules des gradients des pixels et, en indice, les valeurs  $k$  de leurs directions  $\theta_a$  définies dans (4-33).

2 <sub>7</sub>	4 <sub>0</sub>	12 <sub>0</sub>	2 <sub>4</sub>	6 <sub>4</sub>
5 <sub>0</sub>	9 <sub>2</sub>	2 <sub>2</sub>	4 <sub>3</sub>	3 <sub>2</sub>
3 <sub>7</sub>	7 <sub>1</sub>	6 <sub>6</sub>	3 <sub>6</sub>	5 <sub>5</sub>
3 <sub>0</sub>	9 <sub>5</sub>	2 <sub>4</sub>	9 <sub>0</sub>	1 <sub>4</sub>
1 <sub>1</sub>	1 <sub>2</sub>	8 <sub>4</sub>	2 <sub>2</sub>	3 <sub>3</sub>

Élimination des pixels non maximums (règle 3)).

0	0	12	0	6
0	9	0	0	0
0	7	6	0	0
0	9	0	9	0
0	0	8	0	0

Seuils d'hystérésis :  $B = 4$ ,  $H = 8$  (règle 4)).

0	0	2	0	1
0	2	0	0	0
0	1	1	0	0
0	2	0	1	0
0	0	2	0	0

Connexion des pixels du contour (règle 5)).

0	0	2	0	0
0	2	0	0	0
0	2	2	0	0
0	2	0	2	0
0	0	2	0	0

**Emploi du Laplacien.** Nous avons vu qu'une droite traverse le contour d'une région en un point où la dérivée seconde de l'intensité  $I$  est nulle. D'une manière plus générale, si un point du plan de l'image appartient au contour, le Laplacien de  $I$  en ce point est nul. En d'autres termes la fonction

$$\nabla^2 I = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} \quad (4-34)$$

change de signe en traversant un contour. L'intensité  $I$  de l'image étant discrète, l'équation (4-34) sera remplacée par

$$\nabla^2 I = (I * h_x) * h_x + (I * h_y) * h_y \quad (4-35)$$

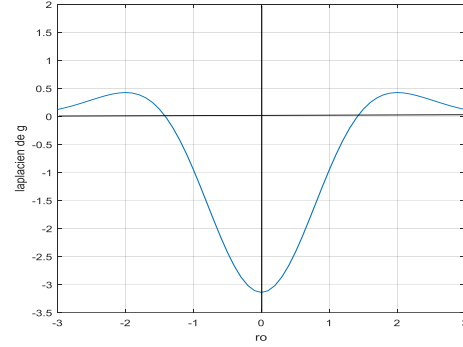
où  $h_\alpha$  est un opérateur de dérivation discrétisée selon  $\alpha = x$  ou  $y$ . En supposant comme ci-dessus que  $I$  est le résultat du filtrage par un Gaussien  $g(x, y)$  de l'intensité bruitée  $I_b$  de l'image c.à.d.  $I = I_b * g$ , par associativité et distributivité du produit de convolution l'équation (4-35) s'écrit :

$$\begin{aligned} \nabla^2 I &= I_b * [(g * h_x) * h_x + (g * h_y) * h_y] \\ &= I_b * \nabla^2 g. \end{aligned} \quad (4-36)$$

L'opérateur  $\nabla^2 g$  est appelé le Laplacien du Gaussien (LoG). Ce masque s'obtient en remplaçant dans l'expression (4-29)  $x^2 + y^2$  par  $\rho^2$  et en calculant les dérivées secondes par rapport à  $x$  et  $y$  ce qui donne :

$$\nabla^2 g = \frac{1}{2\pi\sigma} \left( \frac{\rho^2 - 2\sigma^2}{\sigma^4} \right) e^{-\rho^2/2\sigma^2} \quad (4-37)$$

où  $\rho$  est la distance entre le pixel et l'origine.



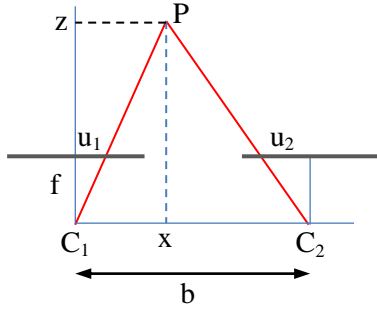
Algorithme LoG de Marr-Hildteth. Basé sur ce qui précède cet algorithme est constitué de 4 étapes.

- 1) Choix de la valeur de  $\sigma$  entre  $s$  et  $2s$ ,  $s$  étant le côté d'un pixel. Le côté du masque  $\nabla^2 g$  sera constitué de  $2r + 1 < 6\sigma/s$  pixels.
- 2) Calcul des éléments du masque  $\nabla^2 g(k_1, k_2)$  en remplaçant dans (4-37)  $\rho^2$  par  $(k_1 s)^2 + (k_2 s)^2$ .
- 3) Calcul de  $I_b * \nabla^2 g(k_1, k_2)$  par masquage pour chaque pixel de l'image.
- 4) Un pixel est un point du contour si les deux conditions suivantes sont toutes les deux satisfaites :
  - a) Le signe de la valeur  $\alpha$  du pixel obtenue en 3) est opposé à celui  $-\beta$  d'un des 8 pixels voisins.
  - b) La pente  $|\alpha + \beta|$  est supérieure à un seuil  $H$ . En augmentant  $H$ , la probabilité d'accepter un point hors contour diminue mais la probabilité de rejeter un point du contour augmente. Un compromis acceptable s'obtient par tâtonnement.

## 4-4 STÉRÉO-VISION

Les contours délimitent les objets de la scène et les séparent mais ils ne déterminent pas l'éloignement de leurs points de la caméra. Or, comme nous l'avons signalé précédemment, une seule image de la scène ne suffit pas pour déterminer les profondeurs  $z_c$  de ces points. Pour déduire  $z_c$ , il faut au moins deux prises de vue de la même scène qui ne soient pas très différentes afin de pouvoir reconnaître sur les deux images les projections d'un même point.

**Profondeur.** Considérons d'abord deux caméras identiques 1 et 2 d'axes optiques parallèles distants de  $b$  et soit, dans le plan de ces axes, un point  $P$  de coordonnées  $x$  et  $z$  par rapport à un repère dont l'axe  $x$  joint les centres optiques  $C_1$  et  $C_2$  des caméras et l'axe  $z$  est celui de la caméra 1 (fig. 4-12).



**Fig. 4-12** Projections d'un point sur les plans images de deux caméras parallèles

Les projections perspectives du point  $P$  sur les plans images sont appelées *paire conjuguée* ou points *correspondants*. Désignons par  $u_1$  et  $u_2$  leurs distances du point principal de leur plan image. Par triangles semblables, on déduit de la figure 4-12 que

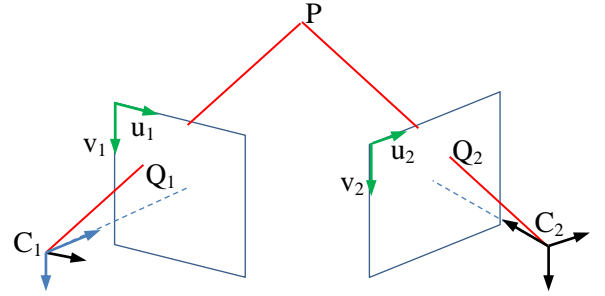
$$\frac{z}{f} = \frac{x}{u_1} \quad \text{et} \quad \frac{z}{f} = -\frac{b-x}{u_2}$$

et en éliminant  $x$ , on tire que la profondeur de  $P$  est

$$z = f \frac{b}{u_1 - u_2}. \quad (4-38)$$

L'écart  $u_1 - u_2$  entre les éloignements des images du point principal est appelé *disparité*. Elle est d'autant plus grande que  $P$  est proche des caméras.

La formule (4-38) est obtenue en admettant des hypothèses peu réalistes. D'abord il est techniquement impossible d'avoir deux caméras parfaitement identiques ayant exactement la même distance focale et des axes tout à fait parallèles. D'autre part en pratique, on ne vise pas seulement les points de la scène qui sont dans le plan des axes des caméras mais tous les points de la scène simultanément. Pour ces raisons, il est nécessaire de considérer le cas général où les caméras et le point  $P$  ont des positions quelconques (fig.4-13).



**Fig. 4-13** Projections d'un point sur les plans images de deux caméras non parallèles

Pour résoudre ce problème, il est nécessaire de calibrer préalablement les deux caméras. Nous supposons donc connues leurs matrices  $\mathbf{K}_1$  et  $\mathbf{K}_2$  des paramètres intrinsèques et leurs matrices  $\mathbf{T}_1$  et  $\mathbf{T}_2$  des paramètres extrinsèques. Rappelons que le calibrage donne  $\mathbf{T}_1$  et  $\mathbf{T}_2$  à des facteurs  $\mu_1$  et  $\mu_2$  près. D'autre part, pour simplifier les calculs, le repère inertiel  $L_\Omega$  sera choisi confondu avec le repère  $L_1$  de la caméra 1 d'où la matrice de rotation de  $L_1$  est  $\mathbf{R}_1 = \mathbf{I}$ , sa position est  $\vec{t}_1 = 0$  et  $\mathbf{P}_h^\Omega = [x \ y \ z \ 1]^T$  où  $x, y, z$  sont les coordonnées du point  $P$  par rapport à  $L_1$ . Par conséquent, en appliquant la relation (4-11) aux deux caméras, on obtient :

$$\begin{aligned} \lambda_1 \mathbf{Q}_{1h} &= \mathbf{K}_1 [\mathbf{I} \ 0] \mathbf{P}_h^\Omega, \\ \lambda_2 \mathbf{Q}_{2h} &= \mathbf{K}_2 [\mathbf{R} \ \vec{t}] \mathbf{P}_h^\Omega \end{aligned} \quad (4-39)$$

où  $\mathbf{Q}_{1h} = [u_1 \ v_1 \ 1]^T$  et  $\mathbf{Q}_{2h} = [u_2 \ v_2 \ 1]^T$  sont les projections en coordonnées homogènes du point  $P$  et où  $\mathbf{R}$  et  $\vec{t}$  sont la matrice de rotation et la position de  $L_2$  par rapport à  $L_1$ . Enfin,  $\lambda_1 = z/\mu_1$ ,  $\lambda_2 = z_{c2}/\mu_2$ ,  $z_{c2}$  étant la profondeur de  $P$  par rapport à  $L_2$ . En résolvant par valeurs singulières les 6 équations (4-39) à 5 inconnues,  $x, y, z, \lambda_1$  et  $\lambda_2$ , on obtient la position  $(x, y, z)$  de  $P$  par rapport à  $L_1$ .

En (4-39) nous avons admis que les points  $Q_1$  et  $Q_2$  forment un pair conjugué c.à.d. ils sont les images d'un même point  $P$ . Or, comment s'assurer qu'un point  $Q_2$  d'une image est le conjugué d'un point  $Q_1$  d'une autre image de la même scène ? Cette question soulève le problème fondamental de la recherche des points *correspondants*. Une première étape dans cette recherche consiste à déterminer l'*épipolaire* de  $Q_1$  c.à.d. le lieu géométrique du conjugué  $Q_2$  de  $Q_1$ .

**Épipolaire.** Soit  $Q_1 = (u_1, v_1)$  un point de l'image 1 et  $D_1$  la droite qui joint  $C_1$  à  $Q_1$  (fig. 4-14). Tout point  $P = (x, y, z)$  appartenant à  $D_1$  est lié à  $Q_1$  par la relation

$$\lambda_1 Q_{1h} = \lambda_1 \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{K}_1 [\mathbf{I} \ 0] \begin{pmatrix} P \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{K}_1 P \quad (4-40)$$

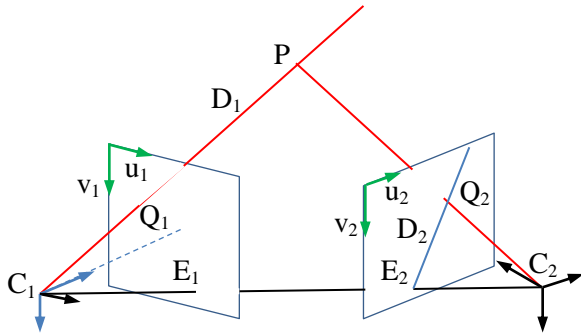
$$\Rightarrow P = \lambda_1 \mathbf{K}_1^{-1} Q_{1h}.$$

L'image  $Q_2$  de  $P$  sur le plan image de la caméra 2 vérifie

$$\lambda_2 Q_{2h} = \mathbf{K}_2 [\mathbf{R} \ \vec{t}] \begin{pmatrix} P \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{K}_2 \mathbf{R} P + \mathbf{K}_2 \vec{t}.$$

Tenant compte de (4-40), on déduit que l'épipolaire de  $Q_1$  est la droite  $D_2$  d'équation

$$\lambda_2 Q_{2h} = \lambda_1 \mathbf{K}_2 \mathbf{R} \mathbf{K}_1^{-1} Q_{1h} + \mathbf{K}_2 \vec{t}. \quad (4-41)$$



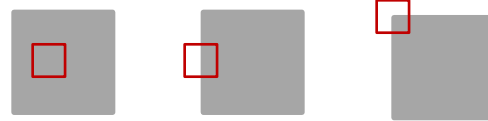
**Fig. 4-14** L'épipolaire  $D_2$  du point  $Q_1$

L'épipolaire  $D_2$  est la projection perspective de la droite  $D_1$  sur le plan image de la caméra 2. On remarque que l'origine de tous les épipolaires est l'image  $E_2 = \mathbf{K}_2 \vec{t}$  de  $C_1$ .

Ainsi, ayant choisi un point  $Q_1$  du plan image de la caméra 1, il suffit de chercher son conjugué  $Q_2$  sur son épipolaire  $D_2$  et non pas dans tout le plan image de la caméra 2. En plus, la recherche de  $Q_2$  sera facilitée si le voisinage immédiat du point  $Q_1$  possède certaines particularités détectables dans l'image 2. Souvent,  $Q_1$  est un coin c.à.d. un point où la pente d'un contour varie rapidement ou il est un «blob» c.à.d. le centre d'une goutte ou d'une petite tache faisant contraste avec le fond avoisinant. Nous

terminons la partie sur la vision des robots par une technique permettant de déterminer un coin dans une image laissant au lecteur intéressé le soin de consulter des ouvrages spécialisés pour découvrir les techniques de détection des blob et approfondir ses connaissances en matière de correspondance.

**Détection de coins.** La figure 4-15 montre graphiquement comment peut-on détecter un coin à travers une petite fenêtre centrée au pixel à examiner.



**Fig. 4-15** Principe de la détection d'un coin.

- Si le pixel est à l'intérieur d'une région de couleur uniforme  $A$ , le niveau moyen du gris  $I_{\text{moy}}$  ne varie pas quand la fenêtre se déplace légèrement dans une direction quelconque.
- Si le pixel est sur le contour de  $A$ ,  $I_{\text{moy}}$  varie quand la fenêtre se déplace perpendiculairement au contour mais il ne se modifie pas quand la fenêtre se déplace le long du contour.
- Si le pixel est un coin de  $A$ ,  $I_{\text{moy}}$  varie quelle que soit la direction du déplacement de la fenêtre.

Ces constatations sont à la base du détecteur de Moravec amélioré par Harris et Stephens.

#### Détecteur de coins de Harris.

Quand le centre d'une fenêtre se déplace légèrement de  $(\delta_x, \delta_y)$ , la variation du niveau de gris à travers cette fenêtre peut être mesurée par la *somme des carrés des différences* (SCD) entre les intensités de ses pixels :

$$\text{SCD}(\delta_x, \delta_y) = \sum_{(x,y) \in \Omega} [I(x + \delta_x, y + \delta_y) - I(x, y)]^2 \quad (4-42)$$

où  $\Omega$  est l'ensemble des pixels de la fenêtre. En remplaçant le terme entre crochets de (4-42) par son approximation de Taylor, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{SCD}(\delta_x, \delta_y) &\approx \sum_{\Omega} [I'_x(x, y) \delta_x + I'_y(x, y) \delta_y]^2 \\ &= \sum_{\Omega} (I'^2_x \delta_x^2 + I'^2_y \delta_y^2 + 2I'_x I'_y \delta_x \delta_y) \end{aligned}$$

qui s'écrit sous la forme matricielle :



$$\text{SCD}(\delta_x, \delta_y) \approx [\delta_x \ \delta_y] \mathbf{M} \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \end{bmatrix} \quad (4-43)$$

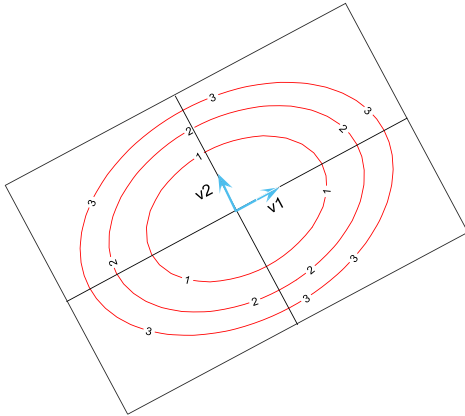
avec

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \sum_{\Omega} I_x'^2 & \sum_{\Omega} I_x' I_y' \\ \sum_{\Omega} I_x' I_y' & \sum_{\Omega} I_y'^2 \end{pmatrix}.$$

La matrice  $\mathbf{M}$  étant symétrique et définie positive (voir (4-42)), ses valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont positives et ses vecteurs propres  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  forment une base orthonormée. En désignant par  $[\xi_x \ \xi_y]$  l'écriture de  $[\delta_x \ \delta_y]$  dans cette base, l'équation (4-43) devient :

$$\begin{aligned} \text{SCD}(\xi_x, \xi_y) &\approx [\xi_x \ \xi_y] \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \xi_x \\ \xi_y \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1 \xi_x^2 + \lambda_2 \xi_y^2. \end{aligned} \quad (4-44)$$

On voit que la variation du niveau du gris à travers la fenêtre est d'autant plus grande que les valeurs propres sont grandes. Les courbes de niveau de la fonction SCD sont des ellipses dont les axes sont proportionnels à  $1/\sqrt{\lambda_1}$  et  $1/\sqrt{\lambda_2}$ .



La figure ci-dessus montre que la variation du SCD est maximum quand la fenêtre se déplace dans le sens du petit axe (relatif à la plus grande valeur propre) et elle est minimum quand la fenêtre se déplace dans le sens du grand axe. Par conséquent,

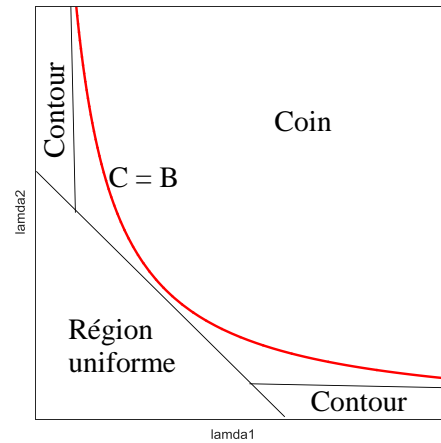
- Si les deux valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont petites, la relation (4-44) montre que le SCD sera presque nul d'où le pixel examiné est à l'intérieur d'une région uniforme.

- Si  $\lambda_1 \ll \lambda_2 \approx 0$  ou  $\lambda_2 \ll \lambda_1 \approx 0$ , le pixel appartient à un contour puisque la variation du niveau du gris est négligeable quand la fenêtre se déplace selon le grand axe c.à.d. le long du contour mais importante quand la fenêtre se déplace selon le petit axe perpendiculaire au contour.
- Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont toutes les deux grandes, le pixel examiné est un coin car le SCD varie dans toutes les directions.

La figure 4-16 représente ces trois domaines ainsi qu'une courbe voisine de leurs limites. Cette courbe, proposée par Harris, est définie par

$$C(\mathbf{M}) = \det(\mathbf{M}) - \kappa \text{trace}(\mathbf{M}) = B$$

où  $\mathbf{M}$  est la matrice définie en (4-43),  $\kappa$  un paramètre compris entre 0.05 et 0.15 et  $B$  un seuil choisi par tâtonnement. Pour un pixel donné, si  $C(\mathbf{M}) < B$ , le pixel n'est pas un coin. Par contre, il est un coin si  $C(\mathbf{M}) > B$  et s'il est aussi supérieur aux valeurs de  $C(\mathbf{M})$  des 8 pixels voisins. Ceci économise le temps en évitant le calcul des valeurs propres.



**Fig. 4-16** Les domaines du plan  $(\lambda_1, \lambda_2)$

## B- PLANIFICATION DE LA TRAJECTOIRE

Planifier une trajectoire d'un robot revient à associer à chaque instant du mouvement la position et l'orientation de l'outil ainsi que sa vitesse et son accélération. Pour que cette trajectoire soit possible, il doit exister en chaque instant  $t$  de cette trajectoire

un vecteur d'articulation  $\vec{q}(t)$  qui confère à l'outil la configuration désirée en cet instant. Nous commençons par définir les espaces d'articulation et de configuration de l'outil avant de donner quelques méthodes de planification de la trajectoire.

## 4-5 ESPACE D'ARTICULATION ET ESPACE OPÉRATIONNEL

Pour un robot à  $n$  articulations, la cinématique directe détermine la fonction  $\vec{w}$  qui associe à tout vecteur d'articulation  $\vec{q} \in \mathbb{R}^n$  un vecteur de configuration de l'outil  $\vec{w}(\vec{q}) \in \mathbb{R}^6$  :

$$\vec{w} : \vec{q} \rightarrow \vec{w}(\vec{q}) = \begin{pmatrix} \vec{p}(\vec{q}) \\ \vec{r}(\vec{q}) \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs  $\vec{p}(\vec{q})$  et  $\vec{r}(\vec{q})$  définissent respectivement la position et l'orientation de l'outil pour un vecteur d'articulation  $\vec{q}$ . Rappelons que le sens de  $\vec{r}(\vec{q})$  est celui de l'axe de roulis de l'outil et son module  $\mu$  est en relation bijective avec la rotation de l'outil autour de cet axe ( $\mu = \exp(\theta/\pi)$  voir (2-10)).

Le domaine de définition  $Q$  de la fonction  $\vec{w}$ , appelé *espace d'articulation* du robot, est l'ensemble de tous les vecteurs d'articulation  $\vec{q}$  admissibles c'est-à-dire de toutes les combinaisons des valeurs  $q_1, \dots, q_n$  que les articulations du robot peuvent avoir.

Le domaine  $W$  des valeurs de la fonction  $\vec{w}$ , appelé *espace opérationnel* ou *domaine de travail et de dextérité*, est l'ensemble des configurations  $\vec{w}(\vec{q})$  relatives aux vecteurs  $\vec{q}$  admissibles :

$$W = \{ \vec{w}(\vec{q}) | \vec{q} \in Q \}.$$

Cette section est destinée à fournir, à travers des exemples, des techniques permettant de définir les espaces d'articulation et opérationnel  $Q$  et  $W$  d'un robot donné.

**Espace d'articulation.** On impose généralement des contraintes sur les variables d'articulation afin

d'éviter les collisions entre les membres du robot ou avec les obstacles que ces membres peuvent rencontrer durant leur mouvement. Un vecteur  $\vec{q}$  est *admissible* si ses composantes vérifient toutes les contraintes imposées. L'espace d'articulation  $Q$  est constitué de l'ensemble des vecteurs  $\vec{q}$  admissibles. Il est évident que moins les contraintes sont restrictives, plus l'espace d'articulation  $Q$  est large c'est-à-dire plus le robot a de possibilités de manœuvre.

### Exemple 4-5

La figure 4-17 représente un robot Scara placé devant un mur. Introduisons les contraintes à imposer aux variables d'articulation afin d'éviter la collision avec le mur ou entre les membres.

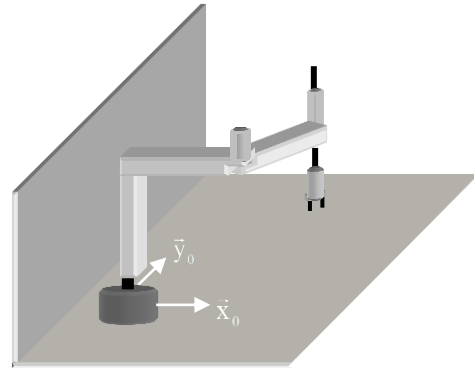
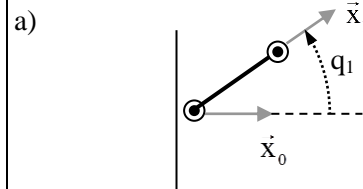
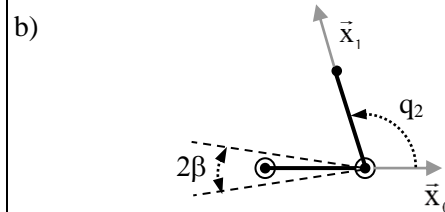


Figure 4-17 Mur derrière un robot Scara



Pour que le premier membre ne touche pas le mur, on impose à la rotation  $q_1$  de la première articulation la contrainte :

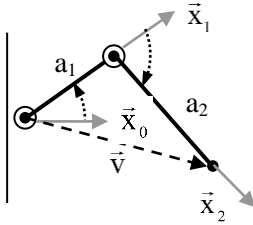
$$-\frac{\pi}{2} \leq q_1 \leq +\frac{\pi}{2}. \quad (4-45)$$



Pour que le deuxième membre ne rentre pas en collision avec le premier, on choisit un petit angle  $\beta$  de chaque côté du premier membre et on impose à la rotation  $q_2$  la contrainte :

$$-\pi + \beta \leq q_2 \leq \pi - \beta. \quad (4-46)$$

c)



Pour que le deuxième membre ne touche pas le mur, on impose à la projection sur  $\vec{x}_0$  du vecteur  $\vec{v}$  représenté sur la figure de rester positive, c.à.d

$$a_1 \cos q_1 + a_2 \cos(q_1 - q_2) \geq 0. \quad (4-47)$$

d) L'articulation de translation  $q_3$  doit être limitée par une valeur inférieure  $h$  pour que le moteur de roulis ne touche pas le deuxième membre et par une valeur supérieure  $H$  pour que l'outil ne pénètre pas dans le plan horizontal supportant le robot :

$$h \leq q_3 \leq H. \quad (4-48)$$

e) L'outil peut tourner librement et aucune contrainte sur  $q_4$  n'est nécessaire.

L'espace d'articulation  $Q$  est l'ensemble des vecteurs  $\vec{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4]^T$  dont les composantes vérifient les inégalités (4-45) à (4-48). Chacune des composantes  $q_3$  et  $q_4$  peut varier indépendamment des autres articulations et son domaine est un simple intervalle. Par contre, les composantes  $q_1$  et  $q_2$ , qui appartiennent aux intervalles définis par (4-45) et (4-46), sont liées par la contrainte (4-47). Leur domaine est à l'intérieur de la courbe de niveau

$$a_1 \cos q_1 + a_2 \cos(q_1 - q_2) = 0 \quad (4-49)$$

qu'on peut représenter par l'instruction « contour » de Matlab en tenant compte des limites des variables  $q_1$  et  $q_2$  (fig.4-18).

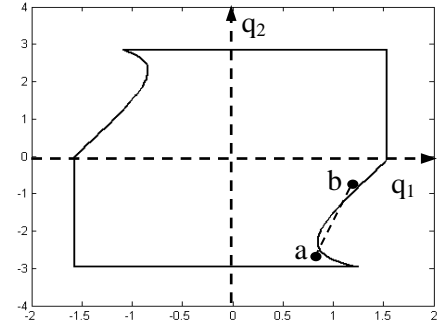


Figure 4-18 Domaine des articulations  $q_1$  et  $q_2$

On voit sur cette figure que le domaine obtenu n'est pas convexe, c'est-à-dire qu'un segment joignant deux points admissibles  $a$  et  $b$  peut avoir des points inadmissibles. Ceci signifie que pour passer d'un point admissible à un autre, on n'est pas sûr de pouvoir suivre une droite dans l'espace d'articulation, ce qui complique parfois la commande du robot. Dans ce cas, on peut éliminer une partie du domaine admissible et se contenter d'un sous-ensemble convexe, comme le montre la figure 4-19 où les parties non linéaires de la frontière sont remplacées par leurs tangentes en  $(-\pi/2, 0)$  et  $(\pi/2, 0)$ .

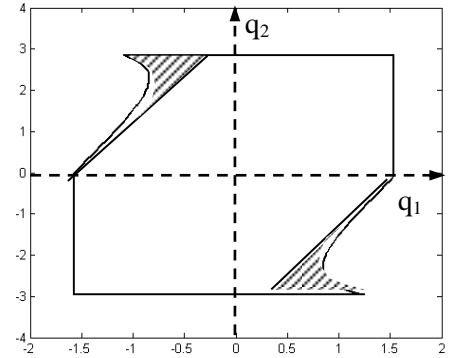


Figure 4-19 Sous-domaine convexe

La pente  $dq_2/dq_1$  de ces tangentes s'obtient par différentiation de (4-49) :

$$-[a_1 \sin q_1 + a_2 \sin(q_1 - q_2)]dq_1 + a_2 \sin(q_1 - q_2)dq_2 = 0.$$

Pour  $q_2 = 0$ ,  $dq_2/dq_1 = (a_1 + a_2)/a_2 = m$  et les équations des tangentes sont :

$$q_2 = \begin{cases} m(q_1 - \pi/2) & \text{si } q_1 > 0, \\ m(q_1 + \pi/2) & \text{si } q_1 < 0. \end{cases}$$

D'où à la place de la contrainte (4-47) on a maintenant

$$-m\frac{\pi}{2} \leq mq_1 - q_2 \leq m\frac{\pi}{2}. \quad (4-50)$$

Les contraintes linéaires (4-45), (4-46), (4-48) et (4-50) peuvent se grouper sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} -\pi/2 \\ -\pi + \beta \\ -m\pi/2 \\ h \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ m & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \pi/2 \\ \pi - \beta \\ m\pi/2 \\ H \end{pmatrix}.$$

Cet exemple montre que si toutes les contraintes sont choisies linéaires, la définition de l'espace d'articulation peut s'écrire sous la forme :

$$Q = \{ \vec{q} \mid \vec{L}_{\min} \leq \vec{C} \cdot \vec{q} \leq \vec{L}_{\max} \} \quad (4-51)$$

où  $\vec{C}$  est une matrice  $m \times n$  et  $\vec{L}_{\min}, \vec{L}_{\max}$  sont des vecteurs dont le nombre  $m$  des composantes est égal au nombre des contraintes. Un tel espace est nécessairement convexe c'est-à-dire tout point d'un segment joignant deux points de  $Q$  est aussi un point de  $Q$ . En d'autres termes,  $\forall \vec{q}^1, \vec{q}^2 \in Q, \forall \lambda \in [0, 1]$ ,

$$\vec{q} = \lambda \vec{q}^1 + (1 - \lambda) \vec{q}^2 \in Q. \quad (4-52)$$

En effet, d'après (4-51), on a :

$$\begin{aligned} \lambda \vec{L}_{\min} &\leq \lambda \vec{C} \cdot \vec{q}^1 \leq \lambda \vec{L}_{\max} \\ \text{et } (1 - \lambda) \vec{L}_{\min} &\leq (1 - \lambda) \vec{C} \cdot \vec{q}^2 \leq (1 - \lambda) \vec{L}_{\max} \end{aligned}$$

et en additionnant ces inégalités membre à membre on obtient :

$$\vec{L}_{\min} \leq \vec{C} \cdot \vec{q} \leq \vec{L}_{\max} \quad \text{d'où} \quad \vec{q} \in Q.$$

**Espace opérationnel.** Aux points de départ ou d'arrivée ou en un point particulier de la trajectoire, on exige dans certaines applications que la direction de l'outil du robot soit selon un vecteur unitaire  $\vec{r}_0$ .

Mais ceci n'est possible que dans un sous-ensemble de l'espace de configuration

$$W = \{ \vec{w}(\vec{q}) = [\vec{p}(\vec{q}) \quad \vec{r}(\vec{q})]^T \mid \vec{q} \in Q \}.$$

Le *domaine de dextérité*  $Y(\vec{r}_0)$  est l'ensemble des positions  $\vec{p}(\vec{q})$  où l'outil peut être orienté selon un vecteur  $\vec{r}_0$  donné. En d'autres termes :

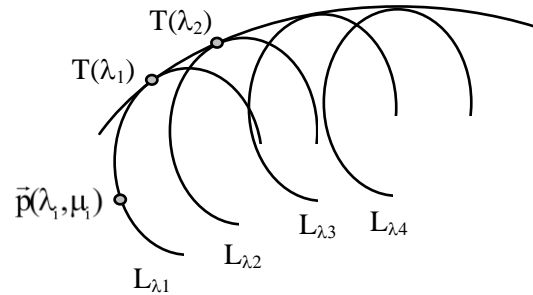
$$Y(\vec{r}_0) = \{ \vec{p}(\vec{q}) \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{q} \in Q \text{ et } \vec{r}(\vec{q}) = \lambda \vec{r}_0, \lambda \in \mathbb{R} \}.$$

Le domaine de travail  $Y$  du robot est l'ensemble de positions accessibles par l'outil. Il est égal à l'union des domaines de dextérité :

$$Y = \bigcup_{\vec{r}_0} Y(\vec{r}_0).$$

Souvent, un domaine de dextérité  $Y(\vec{r}_0)$  peut se déduire d'une surface plane limitée par les enveloppes d'un ensemble de courbes, chacune étant le lieu de la pointe  $p$  de l'outil quand une seule des articulations du robot varie. Avant d'en donner un exemple, rappelons la définition d'une enveloppe et son expression analytique.

L'*enveloppe* d'une famille de courbes  $\{L_\lambda\}$  est une courbe  $T$  tangente à toutes les courbes de cette famille (fig. 4-20).



**Figure 4-20** Enveloppe d'une famille de courbes

Désignons par  $\vec{p}(\lambda_i, \mu_i)$  un point de la courbe  $L_{\lambda_i}$  dont la position sur cette courbe est définie par la valeur  $\mu_i$  d'un paramètre.

Soi  $\vec{T}(\lambda) = \vec{p}(\lambda, \mu)$  (4-53)

le point de contact de l'enveloppe T avec une courbe  $L_\lambda$ . La tangente à T en ce point est confondue avec la tangente à  $L_\lambda$ . Par conséquent, les deux vecteurs  $\delta\vec{p}/\delta\lambda$  et  $\delta\vec{p}/\delta\mu$  sont colinéaires d'où, en tout point de T,

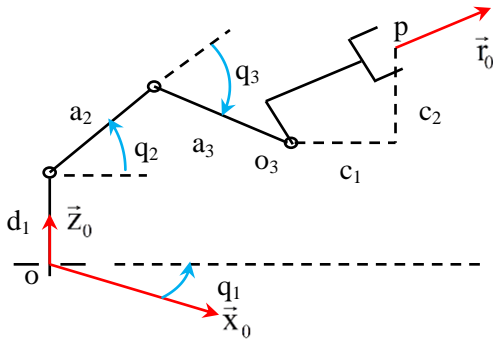
$$\det \begin{bmatrix} \frac{\delta\vec{p}}{\delta\lambda} & \frac{\delta\vec{p}}{\delta\mu} \end{bmatrix} = 0. \quad (4-54)$$

Cette équation est une relation  $\mu = \mu(\lambda)$  entre  $\mu$  et  $\lambda$ . En remplaçant dans (4-53)  $\mu$  par son expression, on obtient l'équation paramétrique de l'enveloppe :

$$\vec{T}(\lambda) = \vec{p}[\lambda, \mu(\lambda)]. \quad (4-55)$$

#### Exemple 4-6

Déterminons le domaine de dextérité  $Y(\vec{r}_0)$  relatif à une orientation  $\vec{r}_0$  de l'outil d'un robot Rhino. Si ce vecteur n'est pas colinéaire avec  $\vec{z}_0$ , il définit avec ce dernier un plan vertical faisant un angle  $q_1$  (à  $\pi$  près) avec le plan  $(\vec{x}_0, \vec{z}_0)$  et contenant tous les membres du robot. Par conséquent, à l'orientation  $\vec{r}_0$  de l'outil correspond un angle d'articulation  $q_1$  constant.



**Figure 4-21** Robot Rhino dont l'outil est orienté selon  $\vec{r}_0$

Soient  $c_1$  et  $c_2$  les composantes, horizontale et verticale, du vecteur joignant l'articulation  $o_3$  du 4<sup>ème</sup> membre à la pointe p de l'outil. Comme  $\vec{r}_0$  est toujours parallèle à lui-même, l'inclinaison du 4<sup>ème</sup>

membre ne se modifie pas et  $c_1$  et  $c_2$  restent constants.

En déterminant à partir de la figure 4-21 les expressions des projections, horizontale et verticale, du vecteur  $\vec{p}$  joignant l'origine o du robot à la pointe p de l'outil, on obtient (le sens positif des angles  $q_2$  et  $q_3$  est le sens horaire) :

$$\vec{p}(q_2, q_3) = [a_2 C_2 + a_3 C_{23} + c_1 \quad d_1 - a_2 S_2 - a_3 S_{23} + c_2]^T. \quad (4-56)$$

Pour une valeur donnée de  $q_2$  et quand seul  $q_3$  varie, p décrit une courbe  $L_{q_2}$  définie par (4-56). En variant maintenant  $q_2$ , on obtient une famille  $\{L_{q_2}\}$  de courbes dont l'union est le domaine de dextérité relatif à l'orientation  $\vec{r}_0$ . Ce domaine est limité par les enveloppes de  $\{L_{q_2}\}$  qui s'obtiennent en commençant par écrire :

$$\det \left( \frac{\delta\vec{p}}{\delta q_2}, \frac{\delta\vec{p}}{\delta q_3} \right) = \begin{vmatrix} -a_2 S_2 - a_3 S_{23} & -a_3 S_{23} \\ -a_2 C_2 - a_3 C_{23} & -a_3 C_{23} \end{vmatrix} = a_2 a_3 (S_2 C_{23} - C_2 S_{23}) = -a_2 a_3 S_3 = 0$$

d'où

$$q_3 = k\pi, \quad k = -1, 0 \text{ ou } 1.$$

Ceci montre que lorsque p est sur la frontière de  $Y(\vec{r}_0)$ , le 3<sup>ème</sup> membre est en prolongement du 2<sup>ème</sup> membre ou en superposition. Un tel point est donc singulier dans  $Y(\vec{r}_0)$ .

En remplaçant  $q_3$  par ses valeurs dans (4-56), on obtient l'expression paramétrique des enveloppes :

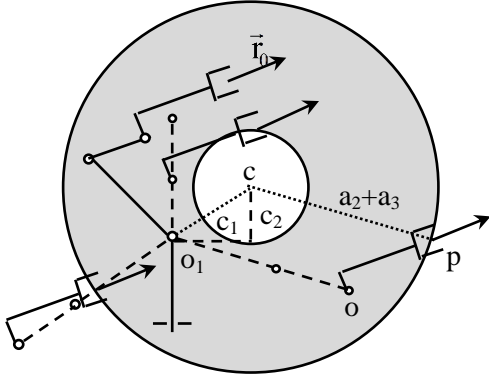
$$\vec{T}(q_2) = [(a_2 \pm a_3)C_2 + c_1 \quad d_1 - (a_2 \pm a_3)S_2 + c_2]^T. \quad (4.57)$$

Les composantes x et z de  $\vec{T}$  selon  $x_0$  et  $z_0$ , vérifient donc les équations cartésiennes :

$$(x - c_1)^2 + [z - (d_1 + c_2)]^2 = (a_2 \pm a_3)^2. \quad (4-58)$$

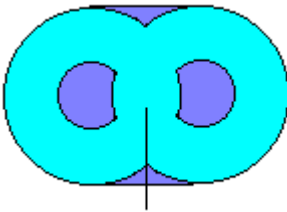
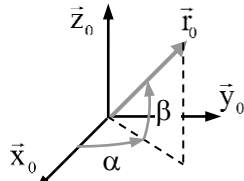
On voit que le domaine de dextérité  $Y(\vec{r}_0)$  est compris entre deux cercles du plan  $(\vec{z}_0, \vec{r}_0)$  centrés en  $c = (c_1, d_1 + c_2)$  et de rayons respectifs  $a_2 + a_3$  et

$|a_2 - a_3|$  comme la montre la figure 4-22. Cette figure montre aussi 4 configurations de dextérité  $\vec{r}_0$  : l'une place la pointe p à l'intérieur du domaine, 2 autres la placent sur la frontière extérieure et la dernière sur la frontière intérieure.



**Figure 4-22** Domaine de dextérité  $\vec{r}_0$  d'un robot Rhino

Le vecteur de dextérité  $\vec{r}_0$ , supposé unitaire, se définit par son azimut  $\alpha$  et sa latitude  $\beta$  par rapport au repère inertiel du robot. Quand  $\beta$  est maintenu fixe et  $\alpha$  varie de 0 à  $2\pi$ , le domaine représenté à la figure 4-22 tourne autour de l'axe  $z_0$  pour balaier un tore comme le montre la figure 4-23. C'est seulement dans ce domaine que l'outil peut avoir une inclinaison  $\beta$  par rapport au plan horizontal.



**Fig. 4-23** Domaine de l'inclinaison  $\beta$

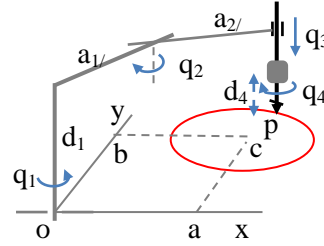
## 4-6 MOUVEMENT DANS L'ESPACE OPÉRATIONNEL

Dans plusieurs applications (découpage, soudure, peinture, ...) la trajectoire se définit dans l'espace opérationnel par une expression mathématique ou par

des segments connectant plusieurs points de cet espace. L'exemple suivant montre comment peut-on obtenir une trajectoire définie par son expression mathématique.

### Exemple 4-7

La pointe p de l'outil d'un robot Scara doit suivre avec une vitesse angulaire  $\omega$  constante un cercle horizontal de centre  $c = (a, b)$  et de rayon  $\rho$ , le plan de l'outil devant rester tangent au cercle (fig. 4-24).



**Fig.4-24** Trajectoire circulaire par un robot Scara

Supposons qu'à l'instant initial la pointe p de l'outil est sur le cercle au point  $(a + \rho, b)$  et son plan est perpendiculaire à l'axe x (l'angle entre la normale à ce plan et l'axe x est  $q_4 = 0$ ). Durant un temps t, p parcourt un arc de longueur  $\rho\omega t$  et le plan de l'outil tourne de  $q_4 = \omega t$ . En posant  $\omega t = 2\pi s$ , où  $s \in [0, 1]$  est l'abscisse curviligne relative de p, on a  $q_4/\pi = 2s$  et la configuration de l'outil à l'abscisse s s'écrit

$$\vec{w}(s) = [\vec{p}(s) \quad \vec{r}(s)]$$

où la position et le vecteur d'approche (vertical) de l'outil ont respectivement pour expressions :

$$\begin{aligned} \vec{p}(s) &= [a + \rho \cos 2\pi s \quad b + \rho \sin 2\pi s \quad 0], \\ \vec{r}(s) &= [0 \quad 0 \quad \exp(2s)]. \end{aligned} \quad (4-59)$$

La commande des articulations du robot doit dépendre de la pose de l'outil et non pas du temps t car le temps continue à croître même quand, pour une raison quelconque, l'outil ne bouge pas. Il est donc important de substituer le temps t par l'abscisse curviligne s.

Déterminons maintenant par cinématique inverse les variables d'articulation  $q_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , qui produisent la trajectoire définie en (4-59). D'abord nous savons que



$$q_4 = 2\pi s \quad (4-60)$$

et qu'il est facile de voir sur la figure (4-24) que

$$q_3 = d_1 - d_4. \quad (4-61)$$

D'autre part, la projection du robot sur le plan horizontal (figure ci-contre), montre que :

$$\overline{op}^2 = p_1^2 + p_2^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos q_2 \quad (4-62)$$

où  $p_1$  et  $p_2$  sont les deux premières composantes de  $\vec{p}(s)$  données en (4-59). Donc

$$q_2 = \pm \arccos \frac{p_1^2 + p_2^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2} \quad (4-63)$$

et nous optons pour le signe «+». Il reste à déterminer  $q_1$ . Or, la figure ci-dessus montre que

$$p_1 = a_1 C_1 + a_2 C_{1-2} = (a_1 + a_2 C_2) C_1 + a_2 S_1 S_2,$$

$$p_2 = a_1 S_1 + a_2 S_{1-2} = (a_1 + a_2 C_2) S_1 - a_2 C_1 S_2.$$

En résolvant ces équations en  $C_1$  et  $S_1$ , on obtient :

$$C_1 = \frac{p_1 \cdot (a_1 + a_2 C_2) - p_2 \cdot (a_2 S_2)}{(a_1 + a_2 C_2)^2 + (a_2 S_2)^2} = \frac{X}{A^2},$$

$$S_1 = \frac{p_2 \cdot (a_1 + a_2 C_2) + p_1 \cdot (a_2 S_2)}{(a_1 + a_2 C_2)^2 + (a_2 S_2)^2} = \frac{Y}{A^2},$$

d'où

$$q_1 = \text{atan2}(Y, X). \quad (4-64)$$

**Remarque.** Nous avons vu au chapitre 2 qu'aux points singuliers la vitesse et l'accélération des articulations dépassent la capacité de leurs actionneurs et il est nécessaire d'éviter ces points (voir section 2-4). Les points singuliers d'un robot Scara correspondent à  $q_2 = 0$  ou  $\pm\pi$  (voir figure 2-15) et l'équation (4-62) montre que ces points vérifient

$$\overline{op}^2 = (a_1 \pm a_2)^2$$

c.à.d. ce sont les points des cercles de centre  $o$  et de rayons  $a_1 + a_2$  et  $|a_1 - a_2|$ . La trajectoire doit être strictement à l'intérieur du domaine de travail du robot limité par ces deux cercles.

Souvent, ce qui intéresse l'utilisateur n'est pas la configuration de l'outil du robot à chaque instant mais l'arrivée de cet outil à une configuration finale désirée en un temps minimum en passant éventuellement par des configurations intermédiaires déterminées. Entre ces configurations, il s'agit d'établir un programme qui planifie une trajectoire

deux ou trois fois dérivable c'est-à-dire sans discontinuité en position, en vitesse et parfois en accélération dans le but de minimiser les secousses et les vibrations. En plus, les limites des moments ou des vitesses des actionneurs entraînant les articulations doivent être respectées et la trajectoire doit éviter la collision avec les obstacles fixes ou mobiles se trouvant dans le domaine de travail du robot. Nous commençons par le cas simple où la trajectoire joint une configuration initiale à une configuration finale en supposant qu'il n'existe pas d'obstacles et sans tenir compte des limites des actionneurs.

## 4-5 TRAJECTOIRE ENTRE DEUX POINTS.

Rappelons que la configuration de l'outil se définit par le vecteur  $\vec{w} = [\vec{p} \quad \vec{r}]^T$  où  $\vec{p}$  est la position de la pointe de l'outil par rapport à un repère inertiel et  $\vec{r}$  est le vecteur d'approche. Supposons qu'il s'agit de passer d'une configuration initiale  $\vec{w}_0$  à une configuration finale  $\vec{w}_f$ . Par cinématique inverse on obtient les vecteurs  $\vec{q}_0$  et  $\vec{q}_f$  de l'espace des articulations associés à  $\vec{w}_0$  et  $\vec{w}_f$ . Il est plutôt commode de définir la trajectoire dans l'espace des articulations que dans l'espace cartésien opérationnel. Ceci permet en particulier de s'assurer que la trajectoire est réalisable et qu'elle ne passe pas au voisinage des singularités.

**Trajectoire polynomiale D3.** Désignons par  $\vec{q}(t)$  le vecteur d'articulation en un instant  $t$  de la trajectoire et soit  $T$  la durée désirée pour passer de  $\vec{q}_0$  à  $\vec{q}_f$  avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0$  et finale  $\vec{v}_f$ . Pour que ceci se réalise, il suffit que chaque articulation  $q_k(t)$  varie durant  $T$  de  $q_{0k}$  à  $q_{fk}$  avec une vitesse initiale  $v_{0k}$  et finale  $v_{fk}$ . En d'autres termes, en posant  $\tau = t/T$ , les fonctions  $q_k(\tau)$  vérifient :

$$\begin{aligned} q_k(0) &= q_{0k}, & q_k(1) &= q_{fk}, \\ \dot{q}_k(0) &= v_{0k}, & \dot{q}_k(1) &= v_{fk}. \end{aligned} \quad (4-45)$$

Ces 4 conditions permettent de déduire les 4 coefficients d'une trajectoire polynomiale de 3<sup>em</sup> degré (infiniment dérivable) :

$$q_k(\tau) = \alpha_3 \tau^3 + \alpha_2 \tau^2 + \alpha_1 \tau + \alpha_0, \quad \tau \in [0,1].$$

En effet,

$$q_k(0) = q_{0k} \Rightarrow \alpha_0 = q_{0k},$$

$$\dot{q}_k(0) = v_{0k} \Rightarrow \alpha_1 = v_{0k}$$

$$q_k(1) = q_{1k} \Rightarrow \alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0 = q_{1k},$$

$$\dot{q}_k(1) = v_{1k} \Rightarrow 3\alpha_3 + 2\alpha_2 + \alpha_1 = v_{1k}.$$

$$\text{Donc} \begin{cases} \alpha_0 = q_{0k}, \\ \alpha_1 = v_{0k}, \\ \alpha_3 = -2\Delta q_k + v_{0k} + v_{1k} \\ \alpha_2 = 3\Delta q_k - 2v_{0k} - v_{1k} \end{cases} \quad \Delta q_k = q_{1k} - q_{0k}.$$

Dans le cas où l'outil est en arrêt au départ et doit s'arrêter à l'arrivée ( $v_{0k} = v_{1k} = 0$ ), l'équation de la trajectoire devient :

$$q_k(\tau) = q_{0k} + \Delta q_k (-2\tau^3 + 3\tau^2). \quad (4-36)$$

Remarquer qu'en revenant de  $q_{1k}$  à  $q_{0k}$ , le robot suit le même chemin mais en sens inverse. L'accélération au départ est  $6\Delta q_k$  et à l'arrivée est  $-6\Delta q_k$ . Ceci signifie que l'actionneur effectue un saut de force ou de couple à la mise en marche et à l'arrêt.

**Trajectoire polynomiale D5.** Supposons qu'on désire ajouter aux contraintes (4-45) deux autres exigences concernant les accélérations au départ et à l'arrivée :

$$\ddot{q}_k(0) = a_{0k} \quad \text{et} \quad \ddot{q}_k(1) = a_{1k}. \quad (4-47)$$

Ces 6 conditions permettent de déduire les 6 coefficients d'une trajectoire polynomiale de 5<sup>em</sup> degré :

$$q_k(\tau) = \alpha_5 \tau^5 + \alpha_4 \tau^4 + \alpha_3 \tau^3 + \alpha_2 \tau^2 + \alpha_1 \tau + \alpha_0.$$

Si l'on désire qu'à la mise en marche et à l'arrêt l'accélération soit nulle (sans secousse due à un saut de force ou de couple), c.à.d. si

$$v_{0k} = v_{1k} = a_{0k} = a_{1k} = 0,$$

on a :

$$q_k(0) = q_{0k} \Rightarrow \alpha_0 = q_{0k},$$

$$\dot{q}_k(0) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0,$$

$$\ddot{q}_k(0) = 0 \Rightarrow 2\alpha_2 = 0,$$

$$q_k(1) = q_{1k} \Rightarrow \alpha_5 + \alpha_4 + \alpha_3 = \Delta q_k,$$

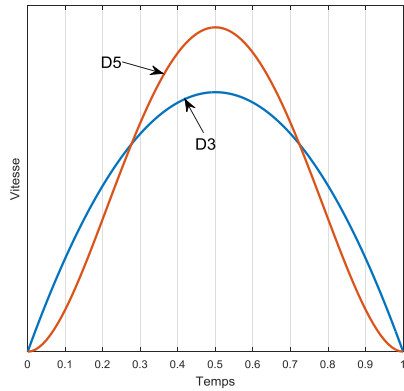
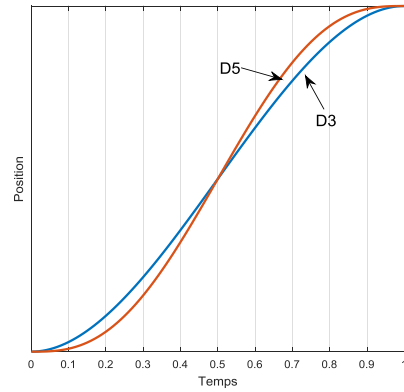
$$\dot{q}_k(1) = 0 \Rightarrow 5\alpha_5 + 4\alpha_4 + 3\alpha_3 = 0,$$

$$\ddot{q}_k(1) = 0 \Rightarrow 20\alpha_5 + 12\alpha_4 + 6\alpha_3 = 0.$$

De ces équations on déduit que la trajectoire de la  $k^{\text{ème}}$  articulation est :

$$q_k(\tau) = q_{0k} + \Delta q_k (6\tau^5 - 15\tau^4 + 10\tau^3). \quad (4-48)$$

Les graphes suivants comparent les trajectoires D3 et D5 en position et en vitesse.



En suivant une trajectoire D5, un robot qui doit déplacer un objet d'un point à un autre, il le soulève et le dépose lentement mais accélère durant le trajet entre ces deux points.

**Trajectoire Polynomiale D2-1-2.** Dans l'espace des articulations, la composante  $q_k$  de cette

trajectoire joint un point initial  $(0, q_{0k})$  et un point final  $(1, q_{fk})$  par une droite

$$q_k(\tau) = \alpha_1 \tau + \alpha_0, \quad \tau \in [\tau_1, \tau_2]$$

connectée à deux paraboles

$$q_k(\tau) = \beta_2 \tau^2 + \beta_1 \tau + \beta_0, \quad \tau \in [0, \tau_1],$$

$$q_k(\tau) = \gamma_2 \tau^2 + \gamma_1 \tau + \gamma_0, \quad \tau \in [\tau_2, 1],$$

l'une durant le démarrage et l'autre durant le freinage. Les 8 coefficients de ces équations se déterminent par les 8 conditions suivantes.

Positions et vitesses initiale et finales :

$$q_k(0) = q_{0k}, \quad \dot{q}_k(0) = 0, \quad q_k(1) = q_{fk}, \quad \dot{q}_k(1) = 0.$$

Continuité en position et en vitesse :

$$q_k(\tau_i^-) = q_k(\tau_i^+), \quad \dot{q}_k(\tau_i^-) = \dot{q}_k(\tau_i^+), \quad i = 1, 2.$$

En effet, en supposant que la durée du démarrage est égale à la durée du freinage c.à.d.  $\tau_2 = 1 - \tau_1$ , on a :

$$q_k(0) = q_{0k} \Rightarrow \beta_0 = q_{0k}, \quad \dot{q}_k(0) = 0 \Rightarrow \beta_1 = 0,$$

$$q_k(1) = q_{fk} \Rightarrow \gamma_2 + \gamma_1 + \gamma_0 = q_{fk},$$

$$\dot{q}_k(1) = 0 \Rightarrow 2\gamma_2 + \gamma_1 = 0.$$

$$q_k(\tau_i^-) = q_k(\tau_i^+) \Rightarrow \begin{cases} \beta_2 \tau_1^2 + q_{0k} = \alpha_1 \tau_1 + \alpha_0, \\ \gamma_2 \tau_1^2 + q_{fk} = -\alpha_1 \tau_1 + \alpha_1 + \alpha_0. \end{cases}$$

$$\dot{q}_k(\tau_i^-) = \dot{q}_k(\tau_i^+) \Rightarrow \begin{cases} 2\beta_2 \tau_1 = \alpha_1, \\ \alpha_1 = -2\gamma_2 \tau_1. \end{cases}$$

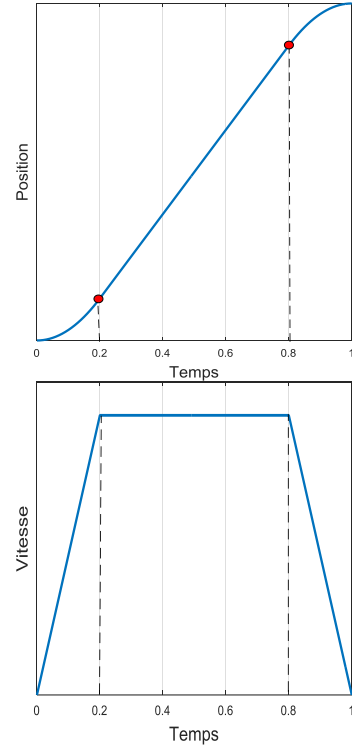
La résolution de ces équations donne :

$$\beta_2 = \frac{\Delta q_k}{2\tau_1(1-\tau_1)}, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_0 = q_{0k},$$

$$\gamma_2 = -\beta_2, \quad \gamma_1 = 2\beta_2, \quad \gamma_0 = q_{fk} - \beta_2,$$

$$\alpha_1 = 2\beta_2 \tau_1, \quad \alpha_0 = \frac{q_{0k} + q_{fk}}{2} - \beta_2 \tau_1.$$

Les graphes suivants montrent l'allure de la trajectoire d'une articulation et le profil trapézoïdal de sa vitesse.



## 4-6 TRAJECTOIRE VIA DES POINTS INTERMÉDIAIRES

Supposons que la composante  $\theta(t)$  de la trajectoire  $\vec{q}(t)$  dans l'espace des articulations doit passer par les points  $(t_0, q_0), (t_1, q_1), \dots, (t_{n-1}, q_{n-1}), (t_n, q_n)$  d'une manière continue en position, en vitesse et en accélération c.à.d. pour  $i = 1, \dots, n-1$ ,

$$\begin{aligned} \theta(t_0) &= q_0, \quad \theta(t_i) = q_i, \quad \theta(t_n) = q_n, \\ \dot{\theta}(t_i^-) &= \dot{\theta}(t_i^+), \quad \ddot{\theta}(t_i^-) = \ddot{\theta}(t_i^+). \end{aligned} \quad (4-49)$$

Le nombre de ces contraintes est  $4(n-1)+2 = 4n-2$ . Si entre deux points la trajectoire est un polynôme de 3<sup>ème</sup> degré, les  $n$  polynômes ont  $4n$  coefficients à déterminer. Ceci nous permet d'ajouter deux autres contraintes qui imposent une vitesse  $v_0$  au départ et une vitesse  $v_n$  à l'arrivée :

$$\dot{\theta}(t_0) = v_0 \quad \text{et} \quad \dot{\theta}(t_n) = v_n. \quad (4-50)$$

En posant  $d_i = t_i - t_{i-1}$ ,  $\tau = t - t_{i-1} \in [0, d_i]$ , le  $i^{\text{ème}}$  polynôme entre les instant  $t_{i-1}$  et  $t_i$  est de la forme :

$$\theta_i(\tau) = \alpha_{3i}\tau^3 + \alpha_{2i}\tau^2 + \alpha_{1i}\tau + \alpha_{0i}.$$

Les conditions (4-49) impliquent les égalités :

$$\begin{aligned}\alpha_{0(i+1)} &= q_i = \alpha_{0i} + \alpha_{1i}d_i + \alpha_{2i}d_i^2 + \alpha_{3i}d_i^3, \\ \alpha_{1(i+1)} &= \alpha_{1i} + 2\alpha_{2i}d_i + 3\alpha_{3i}d_i^2, \\ 2\alpha_{2(i+1)} &= 2\alpha_{2i} + 6\alpha_{3i}d_i.\end{aligned}\quad (4-51)$$

Sachant que  $\alpha_{0i} = q_{i-1}$  et que les vitesses aux instants  $t_{i-1}$  et  $t_i$  sont  $\alpha_{1i} = v_{i-1}$  et  $\alpha_{1(i+1)} = v_i$  (encore inconnues), les deux premières équations de (4-51) s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} d_i^2 & d_i^3 \\ 2d_i & 3d_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{2i} \\ \alpha_{3i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_i - q_{i-1} - v_{i-1}d_i \\ v_i - v_{i-1} \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\begin{aligned}\alpha_{2i} &= \frac{1}{d_i^2} [3(q_i - q_{i-1} - v_{i-1}d_i) - d_i(v_i - v_{i-1})], \\ \alpha_{3i} &= \frac{1}{d_i^3} [d_i(v_i - v_{i-1}) - 2(q_i - q_{i-1} - v_{i-1}d_i)]\end{aligned}\quad (4-52)$$

$$\Rightarrow \alpha_{2i} + 3\alpha_{3i}d_i = \frac{1}{d_i^2} [2d_i v_i + d_i v_{i-1} - 3(q_i - q_{i-1})]$$

et comme

$$\alpha_{2(i+1)} = \frac{1}{d_{i+1}^2} [3(q_{i+1} - q_i) - 2v_i d_{i+1} - d_{i+1} v_{i+1}],$$

la troisième équation de (4-51) donne l'équation suivante liant les inconnues  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , aux valeurs connues  $q_i$ ,  $d_i$ ,  $v_0$  et  $v_n$  :

$$\begin{aligned}d_{i+1}v_{i-1} + 2(d_{i+1} + d_i)v_i + d_i v_{i+1} \\ = \frac{3}{d_{i+1}d_i} [d_i^2(q_{i+1} - q_i) + d_{i+1}^2(q_i - q_{i-1})].\end{aligned}$$

Donc

$$A(\vec{d}) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{pmatrix} = \vec{b}(\vec{q}, \vec{d}, v_0, v_n) \quad (4-53)$$

où la matrice  $A$  et le vecteur  $\vec{b}$  sont donnés par

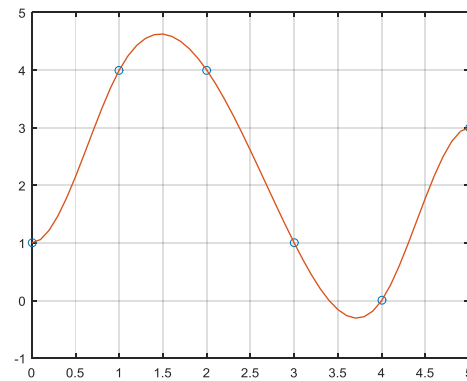
$A =$

$$\begin{pmatrix} 2(d_2 + d_1) & d_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ d_3 & 2(d_3 + d_2) & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_4 & 2(d_4 + d_3) & d_3 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & d_{n-1} & 2(d_{n-1} + d_{n-2}) & d_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & d_n & 2(d_n + d_{n-1}) \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{3}{d_2 d_1} [d_1^2(q_2 - q_1) + d_2^2(q_1 - q_0)] - d_2 v_0 \\ \frac{3}{d_3 d_2} [d_2^2(q_3 - q_2) + d_3^2(q_2 - q_1)] \\ \vdots \\ \frac{3}{d_{n-1} d_{n-2}} [d_{n-2}^2(q_{n-1} - q_{n-2}) + d_{n-1}^2(q_{n-2} - q_{n-3})] \\ \frac{3}{d_n d_{n-1}} [d_{n-1}^2(q_n - q_{n-1}) + d_n^2(q_{n-1} - q_{n-2})] - d_{n-1} v_n \end{pmatrix}$$

La solution  $[v_1 \dots v_{n-1}]^T$  de l'équation (4-53) existe et elle est unique ( $A$  est toujours inversible). Ayant cette solution, les coefficients du  $i^{\text{ème}}$  polynôme sont  $\alpha_{0i} = q_{i-1}$ ,  $\alpha_{1i} = v_{i-1}$  et les valeurs de  $\alpha_{2i}$  et  $\alpha_{3i}$  se déduisent de (4-52). L'ensemble de ces  $n$  polynômes cubiques constitue une courbe appelée *spline*. Elle est continue et ses deux premières dérivées sont aussi continues et s'obtient par l'instruction «spline(ti,[v0 qi vn],t,theta)» de Matlab :

```
ti = 0:5; qi = [1 4 4 1 0 3];
t = 0:1:5;
theta = spline(ti,[v0 qi 0],t);
plot(ti,qi,'o',t,theta)
```



**Remarques.**

- 1) Quand  $q_0 = q_n$  (mouvement cyclique), le nombre des polynômes d'interpolation est toujours  $n$  et le nombre des coefficients à déterminer est de nouveau  $4n$ . Pour avoir  $4n$  contraintes, on ajoute aux  $4n - 2$  contraintes (4-49) les deux suivantes qui imposent la continuité en vitesse et en accélération au recommencement du cycle :

$$\dot{\theta}(t_n^-) = \dot{\theta}(t_0^+), \quad \ddot{\theta}(t_n^-) = \ddot{\theta}(t_0^+). \quad (4-54)$$

- 2) Si, pour éviter un obstacle, on modifie la position de l'un des points intermédiaires, toute la trajectoire spline se modifie et peut toucher un autre obstacle située ailleurs. On dit qu'une interpolation jouit de la propriété de *localisme* si, en déplaçant un point intermédiaire, seules se modifient les courbes adjacentes à ce point tandis que les autres courbes se conservent. Cette propriété peut être satisfaite en employant l'interpolation de Bézier détaillée dans la section suivante.

## 4-7 TRAJECOIRES DE BÉZIER

Une courbe de Bézier est un polynôme de degré  $n$  dont les  $n + 1$  coefficients se déduisent de la position de  $n + 1$  points  $P_0, P_1, \dots, P_n$ . Un point de la courbe associé à un paramètre  $\tau \in [0, 1]$  est le barycentre des points  $P_i$  pondérés par  $g_i(\tau) = C_n^i \tau^i (1 - \tau)^{n-i}$  où  $C_n^i = n! / i!(n-i)!$ . Comme

$$1 = [(1 - \tau) + \tau]^n = \sum_{i=0}^n C_n^i \tau^i (1 - \tau)^{n-i},$$

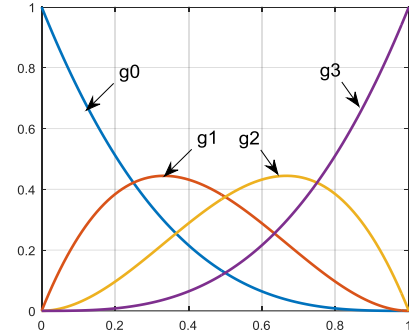
la somme des poids des  $P_i$  est égale à 1  $\forall \tau$  et toute la courbe (lieu du barycentre quand  $\tau$  varie) est à l'intérieur du polygone de sommets  $P_i$ . Dans ce qui suit, nous ne considérons que des courbes cubiques de Bézier, la généralisation à des degrés plus élevés ne posant pas des difficultés. Une telle courbe se définit donc par 4 points  $P_0 = (t_0, q_0)$ ,  $P_1 = (t_1, q_1)$ ,  $P_2 = (t_2, q_2)$  et  $P_3 = (t_3, q_3)$  et elle a pour équation

$$P(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ t \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^3 g_i(\tau) \begin{pmatrix} q_i \\ t_i \end{pmatrix} \quad (4-55)$$

où  $\theta(t)$  est une composante du vecteur d'articulation  $\vec{q}(t)$  du robot et

$$\begin{aligned} g_0(\tau) &= (1 - \tau)^3, & g_1(\tau) &= 3\tau(1 - \tau)^2 \\ g_2(\tau) &= 3\tau^2(1 - \tau), & g_3(\tau) &= \tau^3. \end{aligned} \quad (4-56)$$

Ces pondérations représentées à la figure suivante sont appelées polynômes de Bernstein.



De (4-55) et (4-56), on tire que pour  $\tau = 0$  et  $\tau = 1$ ,

$$t(0) = t_0, \quad \theta(t_0) = q_0 \quad \text{et} \quad t(1) = t_3, \quad \theta(t_3) = q_3.$$

Le point initial de la courbe de Bézier est donc  $P_0$  et son point final est  $P_3$ . Elle ne passe pas par  $P_1$  et  $P_2$  mais elle se modifie selon la position de ces points qui seront appelés *points de contrôle*. D'autre part, sachant que  $d\theta/dt = (d\theta/d\tau)/(dt/d\tau)$ , on déduit de (4-55) et (4-56) que

$$\frac{d\theta}{dt}(t_0) = \frac{q_1 - q_0}{t_1 - t_0} \quad \text{et} \quad \frac{d\theta}{dt}(t_3) = \frac{q_3 - q_2}{t_3 - t_2}.$$

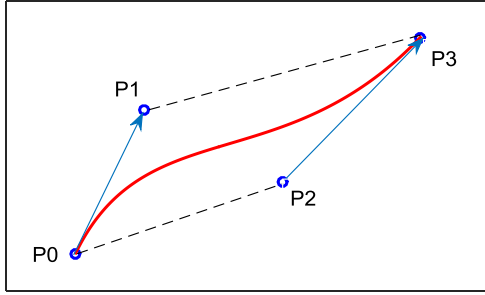
Les segments  $P_0P_1$  et  $P_2P_3$  sont donc tangents à la courbe de Bézier en ses extrémités  $P_0$  et  $P_3$ .

### Exemple 4-8

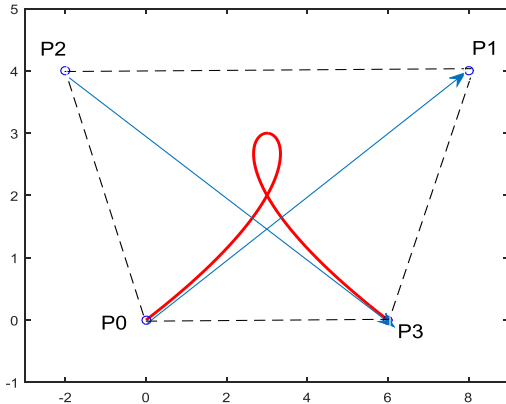
Pour obtenir la courbe de Bézier définie par les points  $P_0 = (0,1)$ ,  $P_1 = (2,3)$ ,  $P_2 = (4,2)$  et  $P_3 = (5,5)$  on écrit :

```
>> to=0:0.01:1;
>> g0=(1-to).^3; g1=3*to.*(1-to).^2;
>> g2=3*(to.^2).*(1-to); g3=to.^3;
>> t0=0; q0=1; t1=2; q1=3;
>> t2=4; q2=2; t3=5; q3=5;
>> T=[t0 t1 t2 t3]; Q=[q0 q1 q2 q3];
```

```
>> t = t0*g0 + t1*g1 + t2*g2 + t3*g3;
th = q0*g0 + q1*g1 + q2*g2 + q3*g3;
>> plot(T,Q,'bo',t,th,'r-')
```



On voit que les tangentes aux extrémités sont  $P_0P_1$  et  $P_2P_3$  et que toute la courbe est à l'intérieur du polygone de sommets  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$ . À noter d'autre part que la courbe peut avoir la forme d'un lacet en passant deux fois par le même point comme le montre la figure suivante.



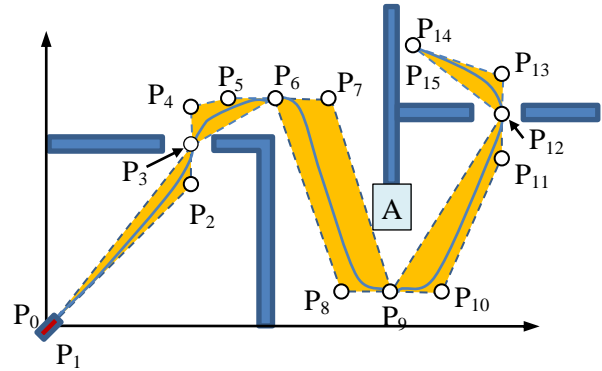
#### Application : Trajectoire de Bézier d'un robot mobile.

Dans un plan, un robot mobile partant d'un point  $P_0$  doit arriver à destination en  $P_{15}$  sans toucher les obstacles et en traversant 2 portes en  $P_3$  et  $P_{12}$  perpendiculairement à leurs surfaces comme le montre la figure 4-25 où A est un objet qu'on peut le déplacer pour le sortir de la scène.

- La trajectoire est constituée de plusieurs courbes de Bézier dont le point finale d'une courbe est confondu avec le point initial de la suivante afin que la trajectoire soit continue.
- Une courbe se définit par les 4 sommets d'un polygone de Bézier. Si ce polygone ne touche pas

les obstacles il sera de même de la courbe puisqu'elle est à l'intérieur de son polygone.

- La vitesse  $[x'(\tau), y'(\tau)]$  sera continue si tout point de connexion  $P_i$  de deux polygones est au milieu du segment  $P_{i-1}P_{i+1}$ .
- La vitesse au départ et à l'arrivée est continue si les deux premiers sommets ainsi que les deux derniers sont confondus, c.à.d. si juste après le départ et juste avant l'arrivée la vitesse s'annule.
- Si l'objet A sort de la scène, on peut raccourcir le trajet en haussant les points  $P_8$ ,  $P_9$  et  $P_{10}$ . Ceci ne modifie que les courbes connectées à  $P_9$  sans affecter les autres courbes de la trajectoire.



**Fig. 4-25** Trajectoire de Bézier entre deux points séparés par des obstacles

Il reste à orienter le robot de sorte que son axe reste tangent à la trajectoire. Or, en posant  $x$  et  $y$  les coordonnées d'un point  $P$  d'une courbe de Bézier  $C$  définie par 4 points  $P_i = (x_i, y_i)$ , la tangente à  $C$  en  $P$  est le vecteur  $[x'(\tau) \ y'(\tau)]$  où  $x$  et  $y$  sont donnés par (4-55) en substituant  $t$ ,  $\theta$ ,  $t_i$  et  $q_i$  respectivement par  $x$ ,  $y$ ,  $x_i$  et  $y_i$ . Ainsi

$$x'(\tau) = \sum_{i=0}^3 g'_i(\tau)x_i \quad \text{et} \quad y'(\tau) = \sum_{i=0}^3 g'_i(\tau)y_i$$

et l'inclinaison du robot par rapport à l'horizontal est

$$\theta(\tau) = \text{atan2}[y'(\tau), x'(\tau)].$$

**Remarque.** Une trajectoire de Bézier de 3<sup>ème</sup> ordre n'assure pas la continuité de la dérivée seconde (de l'accélération) aux points de connexion des courbes. Pour satisfaire cette exigence, une solution consiste à construire une trajectoire de Bézier de 5<sup>ème</sup> ordre mais ceci entraîne un temps de calcul plus long.