

Chapitre 3

FONCTIONS LOGIQUES ET CIRCUITS COMBINATOIRES

L'organe de commande C d'un système logique produit en fonction de ses p entrées $u_1, u_2, \dots, u_p, u_i \in \mathcal{B} = \{0,1\}$, q sorties $y_1, y_2, \dots, y_q, y_j \in \mathcal{B}$. Si en tout instant t la valeur de chaque sortie y_j ne dépend que des valeurs des entrées u_1, u_2, \dots, u_p en cet instant et ne dépend pas de leurs valeurs avant t , on dit que le circuit de l'organe C est *combinatoire*. Un tel circuit joue donc le rôle d'une fonction $f: \mathcal{B}^p \rightarrow \mathcal{B}^q$ qui associe à un vecteur d'entrée $u = (u_1, u_2, \dots, u_p) \in \mathcal{B}^p$ un vecteur de sortie $y = (y_1, y_2, \dots, y_q) \in \mathcal{B}^q$ et un seul.

Dans une première partie de ce chapitre, nous montrons comment définir une fonction logique par une expression algébrique et nous donnons des méthodes pour simplifier cette expression afin que sa réalisation physique soit la plus économique possible. Comme la fonction multiple ($q > 1$) se ramène à q fonctions de valeur unique ($q = 1$), nous ne traiterons que ces dernières. La description et l'utilité de certains circuits combinatoires intégrés, choisis parmi les plus connus, constituent la deuxième partie du chapitre où nous aurons l'occasion de rencontrer des fonctions multiples.

3-1 FONCTIONS LOGIQUES

Soit \mathcal{B}^p l'ensemble des vecteurs logiques u à p composantes : $u = (u_1, u_2, \dots, u_p), u_i \in \mathcal{B} = \{0,1\}$. Les éléments de \mathcal{B}^p sont aussi appelés *mots binaires* à p bits. Une fonction logique à valeur unique est une application f d'un sous-ensemble \mathcal{F} de \mathcal{B}^p dans \mathcal{B} . On écrit :

$$f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{B}, \mathcal{F} \subset \mathcal{B}^p.$$

La fonction f associe aux vecteurs (aux mots) d'une partie \mathcal{F}_1 de \mathcal{F} la valeur 1 et aux vecteurs de l'autre partie \mathcal{F}_0 de \mathcal{F} la valeur 0 :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \{u \in \mathcal{F} \mid f(u) = 1\}, \\ \mathcal{F}_0 &= \{u \in \mathcal{F} \mid f(u) = 0\}. \end{aligned}$$

\mathcal{F}_1 est appelé ensemble d'*ouverture* de f et \mathcal{F}_0 son ensemble de *fermeture*. Il est évident que $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$ et que $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_0 = \emptyset$ ce qui s'écrit :

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_0 \quad \text{ou} \quad \mathcal{F}_1 = \mathcal{F} - \mathcal{F}_0 \quad \text{ou} \quad \mathcal{F}_0 = \mathcal{F} - \mathcal{F}_1,$$

les symboles «+» et «-» étant ici des opérations ensemblistes. D'autre part, les vecteurs de l'ensemble $\mathcal{F}_{id} = \mathcal{B}^p - \mathcal{F}$ où la fonction f n'est pas définie seront appelés *indifférents*.

Exemple 3-1

Un circuit logique à 4 entrées u_1, u_2, u_3, u_4 et une sortie y fonctionne selon les conditions suivantes :

- 1) on ne peut appliquer aux entrées qu'un nombre impair de 1,
- 2) la valeur de la sortie y est égale à 1 si la somme des indices des entrées de valeur 1 est paire.

- Les vecteurs d'entrée admissibles constituent l'ensemble de définition $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}^4$ de la fonction f du circuit. \mathcal{B}^4 contient $2^4 = 16$ vecteurs dont 8 appartiennent à \mathcal{F} :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = \{ & u^1 = (1, 0, 0, 0), u^2 = (0, 1, 0, 0) \\ & u^3 = (0, 0, 1, 0), u^4 = (0, 0, 0, 1), \\ & u^5 = (1, 1, 1, 0), u^6 = (1, 1, 0, 1), \\ & u^7 = (1, 0, 1, 1), u^8 = (0, 1, 1, 1) \}. \end{aligned}$$

- Les ensembles d'ouverture et de fermeture du circuit sont respectivement

$$\mathcal{F}_1 = \{u^2, u^4, u^5, u^7\} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_0 = \{u^1, u^3, u^6, u^8\}.$$

- Tout vecteur à 4 composantes qui ne fait pas partie de \mathcal{F} est indifférent. Il en existe 8.

Codage décimal. Parfois, pour simplifier l'écriture et gagner de l'espace, on associe à un vecteur logique $a = (a_1, \dots, a_p) \in \mathcal{B}^p$ un entier $d(a)$, appelé valeur décimale de a définie par

$$d(a) = a_1 \cdot 2^{p-1} + a_2 \cdot 2^{p-2} + \dots + a_p \cdot 2^0.$$

En utilisant ce code, l'ensemble \mathcal{F} de l'exemple précédent s'écrit : $\mathcal{F} = \{8, 4, 2, 1, 14, 13, 11, 7\}$. Inversement, si la valeur décimale d'un vecteur $a \in \mathcal{B}^6$ est $d(a) = 39$, on a :

$$\begin{aligned} 39 &= 32 + 8 + 1 \\ &= 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ \Rightarrow \quad a &= (1, 0, 1, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

De même, si $a \in \mathcal{B}^6$ et $d(a) = 22$, on a :

$$a = (0, 1, 0, 1, 1, 0).$$

EXERCICE 3-1

Trois contacts portés par un conducteur connecté à une tension E se déplacent devant les 4 entrées d'un circuit. L'espacement entre les entrées est d et entre les contacts est montré sur la figure 3-1. La sortie allume une diode émettrice de lumière (LED) quand le nombre d'entrées sous tension est impair. Écrire en code décimal les ensembles d'ouverture \mathcal{F}_1 et de fermeture \mathcal{F}_0 de ce circuit. Quel est le nombre de vecteurs indifférents ?

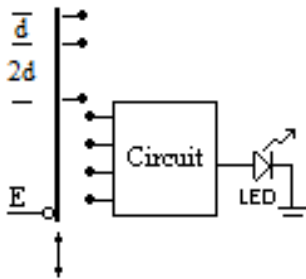


Fig. 3-1 Circuit à contacts mobiles

3-1-1 Minterme et Maxterme

Les *mintermes* et les *maxtermes* sont les fonctions logiques les plus élémentaires.

Minterme. C'est une fonction logique dont l'ensemble d'ouverture \mathcal{F}_1 est formé d'un seul élément $a = (a_1, a_2, \dots, a_p) \in \mathcal{B}^p$. Cette fonction, désignée par m_a , associe au seul vecteur a la valeur 1 et à tous les autres vecteurs de \mathcal{B}^p la valeur 0. En d'autres termes, pour $u = (u_1, u_2, \dots, u_p)$,

$$m_a(u) = 1 \Leftrightarrow (u_1 = a_1, u_2 = a_2, \dots, u_p = a_p).$$

Soit, par exemple, $a = (1, 0, 0, 1) \in \mathcal{B}^4$. Pour $u = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathcal{B}^4$,

$$\begin{aligned} m_a(u) &= 1 \Leftrightarrow (u_1 = 1, u_2 = 0, u_3 = 0, u_4 = 1) \\ &\Leftrightarrow u_1 \bar{u}_2 \bar{u}_3 u_4 = 1. \end{aligned}$$

ce qui conduit à définir la fonction m_a par la forme algébrique :

$$m_a(u) = u_1 \cdot \bar{u}_2 \cdot \bar{u}_3 \cdot u_4, \quad \forall u \in \mathcal{B}^4.$$

D'une manière générale, tout minterme m_a peut s'écrire sous la forme d'un produit de p variables logiques :

$$m_a(u) = z_1 z_2 \dots z_p \quad \text{avec} \quad z_i = \begin{cases} u_i & \text{si } a_i = 1, \\ \bar{u}_i & \text{si } a_i = 0. \end{cases}$$

Maxterme. C'est une fonction logique dont l'ensemble de fermeture \mathcal{F}_0 est formé d'un seul élément $a = (a_1, a_2, \dots, a_p) \in \mathcal{B}^p$. Cette fonction, désignée par M_a , associe au seul vecteur a la valeur 0 et à tous les autres vecteurs de \mathcal{B}^p la valeur 1. En d'autres termes, pour $u = (u_1, u_2, \dots, u_p)$,

$$M_a(u) = 0 \Leftrightarrow (u_1 = a_1, u_2 = a_2, \dots, u_p = a_p).$$

Soit, par exemple, $a = (1, 0, 0, 1) \in \mathcal{B}^4$. Pour $u = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathcal{B}^4$,

$$M_a(u) = 0 \Leftrightarrow (u_1 = 1, u_2 = 0, u_3 = 0, u_4 = 1)$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow u_1 \cdot \bar{u}_2 \bar{u}_3 \cdot u_4 = 1 \\ &\Leftrightarrow \bar{u}_1 + u_2 + u_3 + \bar{u}_4 = 0 \end{aligned}$$

ce qui conduit à définir la fonction M_a par la forme algébrique :

$$M_a(u) = \bar{u}_1 + u_2 + u_3 + \bar{u}_4, \quad \forall u \in \mathcal{B}^4.$$

D'une manière générale, tout maxterme M_a peut s'écrire sous la forme d'une somme de p variables logiques :

$$M_a(u) = z_1 + z_2 + \dots + z_p \quad \text{avec} \quad z_i = \begin{cases} \bar{u}_i & \text{si } a_i = 1, \\ u_i & \text{si } a_i = 0. \end{cases}$$

La fonction complémentaire de f est la fonction \bar{f} telle que, pour tout $u \in \mathcal{F}$, $\bar{f}(u) = \overline{f(u)}$. Les ensembles d'ouverture et de fermeture de \bar{f} sont donc, respectivement, les ensembles de fermeture et d'ouverture de f . On en déduit, d'après les définitions de M_a et de m_a , que

$$M_a = \overline{m_a}, \quad \forall a \in \mathcal{B}. \quad (3-1)$$

3-1-2 Formes canoniques

Soit $\mathcal{F}_1 = \{a^1, a^2, \dots, a^p\}$, $a^k \in \mathcal{F}$, l'ensemble d'ouverture d'une fonction f . Pour $u \in \mathcal{F}$, on a :

$$\begin{aligned} f(u) = 1 &\Leftrightarrow (u = a^1 \text{ ou } u = a^2 \text{ ou } \dots \text{ ou } u = a^r) \\ &\Leftrightarrow m_{a^1}(u) = 1 \text{ ou } \dots \text{ ou } m_{a^r}(u) = 1 \\ &\Leftrightarrow m_{a^1}(u) + m_{a^2}(u) + \dots + m_{a^r}(u) = 1 \\ &\Leftrightarrow (m_{a^1} + m_{a^2} + \dots + m_{a^r})(u) = 1 \end{aligned}$$

ce qui montre que

$$f = m_{a^1} + m_{a^2} + \dots + m_{a^r}. \quad (3-2)$$

$f(u)$ est donc la somme de r produits chacun de p variables et l'expression (3-2) est la forme canonique SP (somme de produits) de la fonction f appelée *forme disjonctive* de f . Une fonction peut aussi s'exprimer sous la forme d'un produit de sommes. En effet, soit $\mathcal{F}_0 = \{b^1, b^2, \dots, b^s\}$, $b^k \in \mathcal{F}$, l'ensemble de fermeture de f . Comme \mathcal{F}_0 est aussi

l'ensemble d'ouverture de \bar{f} , on a, d'après (3-1) et (3-2),

$$\begin{aligned} f = \overline{\bar{f}} &= \overline{m_{b^1} + m_{b^2} + \dots + m_{b^s}} \\ &= \overline{M_{b^1} + M_{b^2} + \dots + M_{b^s}} \end{aligned}$$

ce qui montre d'après Morgan que

$$f = M_{b^1} \cdot M_{b^2} \cdot \dots \cdot M_{b^s}. \quad (3-3)$$

Le second membre de (3-3) est la forme canonique PS (produit de sommes) appelée *forme conjonctive* de la fonction f .

Par la suite, pour simplifier l'écriture, au lieu de $f(u)$ nous écrirons f ou y sauf quand une ambiguïté est possible.

Exemple 3-2

Les formes canoniques SP et PS de la fonction logique $f : \mathcal{F} \subset \mathcal{B}^3 \rightarrow \mathcal{B}$ définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 0, 1)\} \\ \mathcal{F}_0 &= \{(0, 1, 1), (1, 1, 0)\} \end{aligned}$$

sont respectivement les suivantes :

$$\text{SP: } f_d = \bar{u}_1 \bar{u}_2 \bar{u}_3 + u_1 \bar{u}_2 \bar{u}_3 + u_1 \bar{u}_2 u_3,$$

$$\text{PS: } f_c = (u_1 + \bar{u}_2 + \bar{u}_3) \cdot (\bar{u}_1 + \bar{u}_2 + u_3).$$

La première de ces expressions n'est égale à 1 que si $u \in \mathcal{F}_1$ tandis que la deuxième n'est égale à 0 que si $u \in \mathcal{F}_0$.

\mathcal{F}_1	\mathcal{F}_0
1	0
0	

\mathcal{F}_{id}

Expression SP

\mathcal{F}_1	\mathcal{F}_0
1	0
1	

\mathcal{F}_{id}

Expression PS

Fig. 3-1 Valeurs des formes SP et PS

Comme le montre la figure 3-1, ces deux expressions sont équivalentes sur l'ensemble de définition $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_0$ de f mais la première associe à tous les indifférents (aux vecteurs qui ne font pas

partie de l'ensemble de définition \mathcal{F} de f) la valeur 0 tandis que la deuxième elle leur associe la valeur 1.

A noter que les propriétés des opérations logiques permettent de simplifier ces deux formes canoniques de f pour les écrire sous la forme :

$$f_d = \bar{u}_2 \cdot (u_1 + \bar{u}_3) \quad \text{et} \quad f_c = \bar{u}_2 + u_1 \otimes u_3.$$

EXERCICE 3-2

Soient f_d et f_c les formes disjonctive et conjonctive d'une fonction logique f et \mathcal{F}_{id} son ensemble d'indifférents. Montrer que

$$(f_d \oplus f_c)(u) = 1 \Leftrightarrow u \in \mathcal{F}_{id}.$$

Partant des expressions simplifiées

$$f_d = \bar{u}_2 \cdot (u_1 + \bar{u}_3) \quad \text{et} \quad f_c = \bar{u}_2 + u_1 \otimes u_3$$

de l'exemple précédent, retrouver l'ensemble des indifférents de la fonction f .

EXERCICE 3-3

Ecrire les formes canoniques SP et PS de la fonction de l'exercice 3-1. Simplifier ces expressions et construire leurs circuits électroniques. Que sera l'état de la diode quand on applique au circuit SP (resp. PS) une entrée indifférente (sans l'intermédiaire des contacts) ?

Soit \mathcal{F} l'ensemble de définition d'une fonction f et \mathcal{F}_{id} son ensemble indifférent. Comme pour tout $u \in \mathcal{F}$ et tout $i \in \mathcal{F}_{id}$, $m_i(u) = 0$ et $M_i(u) = 1$, on peut toujours ajouter à l'expression de la fonction f un minterme indifférent (c.à.d. relatif à un élément de \mathcal{F}_{id}) ou la multiplier par un maxterme indifférent. Paradoxalement, ceci conduit souvent à la simplification de l'expression de f . Pour le montrer à l'aide d'un exemple simple, considérons un système à 3 entrées u_1, u_2, u_3 et à une sortie y et supposons que y n'est égal à 1 que si le vecteur d'entrée est $a = (0, 1, 0)$. y est donc le minterme de a c'est-à-dire $y = m_a = \bar{u}_1 \cdot u_2 \cdot \bar{u}_3$. Mais, si l'on sait qu'il est impossible d'appliquer à l'entrée du système le vecteur $i = (1, 1, 0)$, on a, pour toute entrée possible $u = (u_1, u_2, u_3)$, $m_i(u) = u_1 \cdot u_2 \cdot \bar{u}_3 = 0$ d'où

$$y = \bar{u}_1 \cdot u_2 \cdot \bar{u}_3 + u_1 \cdot u_2 \cdot \bar{u}_3 = u_2 \cdot \bar{u}_3.$$

Ainsi, en ajoutant un minterme indifférent,

l'expression de y est devenue le produit de deux variables au lieu de trois.

3-1-3 r-Cubes

On dit que 2 éléments de \mathcal{B}^p sont *adjacents* s'ils ne diffèrent que par une seule composante. Par exemple, dans \mathcal{B}^4 , l'élément $(0, 1, 1, 0)$ est adjacent aux 4 éléments $(1, 1, 1, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$ et $(0, 1, 1, 1)$.

La somme des mintermes de 2 éléments adjacents est égale au produit de leurs $(p - 1)$ variables identiques. Par exemple, la somme des mintermes des 2 éléments adjacents $(0, 1, 1, 0)$ et $(0, 0, 1, 0)$ est

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot \bar{u}_4 + \bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 \cdot u_3 \cdot \bar{u}_4 &= \bar{u}_1 \cdot u_3 \cdot \bar{u}_4 (u_2 + \bar{u}_2) \\ &= \bar{u}_1 \cdot u_3 \cdot \bar{u}_4. \end{aligned}$$

De même, le produit des maxtermes de 2 éléments adjacents est égal à la somme de leurs $(p - 1)$ variables identiques. Par exemple, le produit des maxtermes des 2 éléments adjacents $(0, 1, 1, 0)$ et $(0, 0, 1, 0)$ est (par distributivité de «+» % «•»)

$$\begin{aligned} (u_1 + \bar{u}_2 + \bar{u}_3 + u_4) \cdot (u_1 + u_2 + \bar{u}_3 + u_4) \\ &= u_1 + \bar{u}_3 + u_4 + \bar{u}_2 u_2 \\ &= u_1 + \bar{u}_3 + u_4. \end{aligned}$$

Un *segment* est un ensemble de 2 éléments adjacents. La somme des mintermes et le produit des maxtermes de ces éléments sont respectivement appelés le p-terme et le s-terme du segment. On définit un segment par un vecteur ayant les mêmes composantes que ses éléments mais un trait est placé là où ces composantes diffèrent. Par exemple (fig. 3-2), le segment formé par les 2 éléments adjacents $(0, 1, 1, 0)$ et $(0, 0, 1, 0)$ se définit par le vecteur $(0, -, 1, 0)$. Son p-terme est $\bar{u}_1 \cdot u_3 \cdot \bar{u}_4$ et son s-terme est $(u_1 + \bar{u}_3 + u_4)$.

$$(0, 1, 1, 0) \text{ --- } (0, -, 1, 0) \text{ --- } (0, 0, 1, 0)$$

Fig. 3-2 Segment

Deux segments sont adjacents si leurs vecteurs de définition ne diffèrent que par une seule composante ; le trait dans ces 2 vecteurs doit donc se trouver à la même position. L'union de 2

segments adjacents est un *carré* dont la somme des mintermes et le produit des maxtermes des $2^2 = 4$ éléments donnent respectivement un p-terme et un s-terme à $(p - 2)$ variables. On définit un carré par un vecteur ayant les mêmes composantes que ses segments mais un trait est placé là où ces composantes diffèrent. Par exemple (fig. 3-3), le carré formé par les 2 segments adjacents $(0, -, 1, 0)$ et $(0, -, 1, 1)$ se définit par le vecteur $(0, -, 1, -)$. Son p-terme est $\bar{u}_1 u_3$ et son s-terme est $u_1 + \bar{u}_3$. A remarquer que le même carré est aussi obtenu par l'union des 2 segments adjacents $(0, 1, 1, -)$ et $(0, 0, 1, -)$.

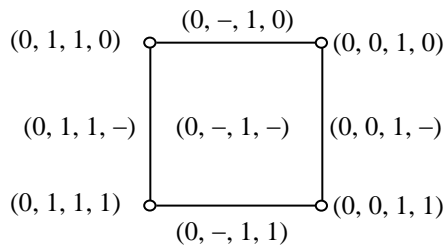


Fig. 3-3 Carré

Le segment et le carré sont aussi appelés 1-cube et 2-cube et leurs vecteurs de définition comportent respectivement 1 trait et 2 traits. Par récurrence, un r-cube, $r = 3, \dots, p$, est l'union de deux $(r - 1)$ -cubes adjacents et son vecteur de définition comporte r traits. Ses éléments s'obtiennent en remplaçant chaque trait par 0 ou par 1. Il contient donc 2^r éléments dont la somme des mintermes et le produit des maxtermes sont égales respectivement à un p-terme et à un s-terme à $(p - r)$ variables. Un p-cube dans \mathcal{B}^p contient tous les 2^p éléments de \mathcal{B}^p . Son p-terme se réduit à la constante 1 et son s-terme à 0. D'un autre côté, un 0-cube n'est autre qu'un élément dont le p-terme et le s-terme sont le minterme et le maxterme de cet élément.

Ainsi, la somme de 2^r mintermes d'éléments (somme de 2^r produits chacun à p variables) formant un r-cube se réduit à un seul produit à $(p - r)$ variables. De même, le produit de 2^r maxtermes d'éléments formant un r-cube se réduit à une somme de $(p - r)$ variables. Ces propriétés permettent souvent de simplifier l'expression algébrique d'une fonction f . De plus, en ajoutant à la forme SP des mintermes indifférents (c'est-à-dire des 0 comme nous l'avons vu) ou en multipliant la forme PS par des maxtermes indifférents (par des

1), on peut souvent élargir les r-cubes et, par conséquent, simplifier davantage l'expression de f .

Exemple 3-3

Reprenons la fonction logique f de l'exemple 3-2 pour laquelle

$$\mathcal{F}_1 = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 0, 1)\} = \{0, 4, 5\},$$

$$\mathcal{F}_0 = \{(0, 1, 1), (1, 1, 0)\} = \{3, 6\},$$

$$\mathcal{F}_{id} = \{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 1, 1)\} = \{1, 2, 7\}.$$

On remarque que dans \mathcal{F}_1 les éléments $(0, 0, 0)$ et $(1, 0, 0)$ sont adjacents et forment le segment $(-, 0, 0)$ de p-terme $\bar{u}_2 \bar{u}_3$. De même, $(1, 0, 0)$ et $(1, 0, 1)$ forment le segment $(1, 0, -)$ de p-terme $u_1 \bar{u}_2$. La forme canonique SP de f est donc équivalente à l'expression

$$f_d = \bar{u}_2 \bar{u}_3 + u_1 \bar{u}_2$$

obtenue dans l'exemple 3-2 en appliquant les propriétés de l'algèbre de Boole. Cette expression peut encore se simplifier en lui ajoutant le minterme ($= 0$) de l'élément indifférent $(0, 0, 1)$. En effet, cet élément forme avec ceux de \mathcal{F}_1 le carré $(-, 0, -)$ de p-terme \bar{u}_2 . D'où

$$f_d = \bar{u}_2.$$

De même, pour simplifier la forme canonique PS de f , remarquons que les éléments de \mathcal{F}_0 forment avec les indifférents $(0, 1, 0)$ et $(1, 1, 1)$ le carré $(-, 1, -)$ de s-terme \bar{u}_2 . D'où

$$f_c = \bar{u}_2.$$

Les expressions simplifiées de f_d et f_c sont ici identiques mais ceci n'est pas toujours le cas.

On obtient un *recouvrement optimal* de \mathcal{F}_1 (resp. \mathcal{F}_0) en déterminant dans $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_{id}$ (resp. $\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_{id}$) un nombre minimum de r-cubes dont l'union contient tous les éléments de \mathcal{F}_1 (resp. \mathcal{F}_0). La somme des p-termes (respectivement le produit des s-termes) de ces r-cubes est la plus simple expression f_d (resp. f_c) de f . Il est raisonnable de choisir pour la construction du circuit de f l'expression f_d ou f_c qui nécessite le moins de portes pour la réaliser.

EXERCICE 3-4

Tenant compte des indifférents, déterminer les plus

simples expressions SP et PS de la fonction du circuit de l'exercice 3-1

3-2 SIMPLIFICATION DES FONCTIONS LOGIQUES

La recherche d'un recouvrement optimal de l'ensemble d'ouverture \mathcal{F}_1 ou de fermeture \mathcal{F}_0 d'une fonction f est d'autant plus complexe que l'ensemble \mathcal{B}^p est large c.à.d. que le nombre p des variables est grand. Nous détaillons dans cette section deux méthodes qui facilitent cette recherche. La première, dite de Karnaugh, est une représentation graphique des ensembles \mathcal{F}_1 , \mathcal{F}_0 et \mathcal{F}_{id} permettant une détermination rapide des recouvrements optimaux. Malheureusement la méthode de Karnaugh n'est pratique que pour un nombre de variables p inférieur à 6. Quand p dépasse 6, il convient de recourir à d'autres méthodes comme celle de McCluskey ou des différences. La méthode de McCluskey consiste à déterminer d'abord les plus grands r-cubes inclus dans $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_{id}$ (resp. $\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_{id}$) puis à choisir ceux qui sont suffisants pour recouvrir \mathcal{F}_1 (resp. \mathcal{F}_0). Bien que cette méthode soit la plus connue, la méthode des différences permet d'obtenir en une seule étape les recouvrements optimaux de \mathcal{F}_1 et de \mathcal{F}_0 et c'est elle que nous allons développer après celle de Karnaugh.

3-2-1 Méthode de Karnaugh

On commence par associer à tout élément de \mathcal{B}^p une case d'un tableau à 2^p cases de sorte que les éléments correspondants à 2 cases symétriques par rapport à un certain axe k ne diffèrent que par leur $k^{\text{ème}}$ composante. La figure 3-4 montre les tableaux de \mathcal{B}^1 , \mathcal{B}^2 et \mathcal{B}^3 avec leurs axes et l'élément que représente chaque case.

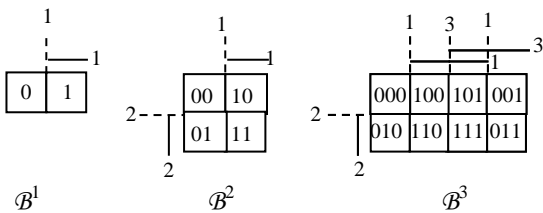


Fig. 3-4 Construction des tableaux de Karnaugh

Construction du tableau. Le tableau de $\mathcal{B}^1 = \{0,1\}$ n'a que 2 cases. Celle surmontée d'un trait numéroté 1 correspond à l'élément 1, l'autre à 0. On associe aussi le numéro 1 à l'axe qui sépare ces 2 éléments.

On obtient le tableau de \mathcal{B}^k , $k = 2, 3, \dots$, en collant à celui de $\mathcal{B}^{(k-1)}$ son symétrique par rapport à son côté inférieur ou à son côté droit. Sur la figure 3-4 nous avons adopté comme axe de symétrie le côté inférieur si k est pair, le côté droit si k est impair. À gauche ou au dessus de la partie ajoutée on dresse un trait numéroté k . En face de ce trait, la $k^{\text{ème}}$ composante des éléments, c.à.d. la nouvelle introduite à droite des vecteurs de $\mathcal{B}^{(k-1)}$, est égale à 1 et elle est égale à 0 dans l'autre moitié du tableau. L'axe de symétrie entre ces 2 moitiés est aussi numéroté k . Les éléments de 2 cases symétriques par rapport à l'axe k sont donc adjacents et ne diffèrent que par leur $k^{\text{ème}}$ composante. A remarquer que par ces opérations de symétrie, un même axe k peut apparaître plus qu'une fois (cas de l'axe 1 de \mathcal{B}^3) et tout axe qui passe par une extrémité d'un trait k est un axe k . En fait, il est inutile de représenter les axes ou d'écrire les vecteurs de \mathcal{B}^k dans leurs cases correspondantes puisque les traits numérotés suffisent pour les reconnaître. Par exemple, à une case de \mathcal{B}^3 qui est en face des traits 1 et 2 et qui n'est pas en face du trait 3 correspond le vecteur binaire (1, 1, 0). Par la suite, nous ne distinguerons pas entre une case et l'élément qu'elle représente.

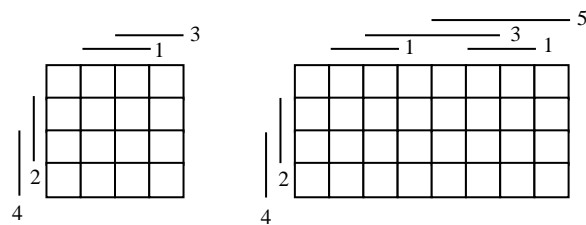


Fig. 3-5 Tableaux \mathcal{B}^4 et \mathcal{B}^5

La figure 3-5 montre le tableau de \mathcal{B}^4 obtenu en collant au côté inférieur du tableau \mathcal{B}^3 son symétrique et le tableau \mathcal{B}^5 obtenu en collant au côté droit du tableau \mathcal{B}^4 son symétrique. Cette manière de désigner les lignes et les colonnes est appelée *codage de Gray*.

Détermination des r-cubes. Par construction, les

1) En parcourant la première ligne, on rencontre un 1 à la 7^{ème} colonne. Le plus grand r-cube de $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_{id}$ qui contient avec cet élément le plus de 1 est le cube formé par les 8 éléments des deux colonnes 7 et 2. La figure 3-8 montre l'encadrement de ce cube. Il est constitué de deux carrés symétriques par rapport à l'axe 3. Chacun de ces carrés est constitué de 2 segments symétriques par rapport à l'axe 1 et chaque segment est constitué de 2 éléments symétriques par rapport à un axe 2.

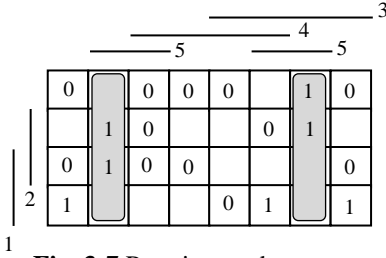


Fig. 3-7 Premier r-cube

Le p-terme de ce 3-cube a $5 - 3 = 2$ variables et comme il est complètement en face des traits 5 et à l'extérieur du trait 4, son p-terme est $u_5 \cdot \bar{u}_4$.

2) En continuant le parcours, on rencontre à la 4^{ème} ligne, 1^{ère} colonne un 1 non recouvert par le cube précédent. Le plus grand r-cube de $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_{id}$ qui contient avec cet élément le plus de 1 non encore couverts est le carré formé par les 4 cases situées à l'intersection de la 4^{ème} ligne avec les colonnes 1, 2, 7 et 8 (fig. 3-8). Ce carré est constitué de 2 segments symétriques par rapport à l'axe 3, chacun ayant un axe de symétrie 5. Le carré à l'intersection de la 4^{ème} ligne avec les 4 premières colonnes couvre aussi le même 1 mais le premier carré simplifie mieux la fonction puisqu'il contient un autre 1 non encore couvert.

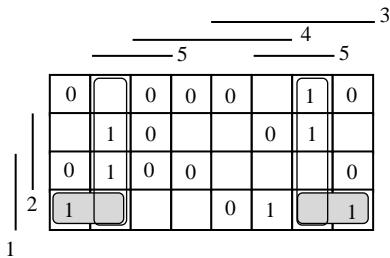


Fig. 3-8 Deuxième r-cube

Le p-terme de ce 2-cube a $5 - 2 = 3$ variables et comme il est en face du trait 1 et à l'extérieur des traits 2 et 4, son p-terme est $u_1 \bar{u}_2 \bar{u}_4$.

3) Enfin, on rencontre à la 4^{ème} ligne, 6^{ème} colonne un 1 non couvert par les r-cubes précédents. Le plus grand r-cube de $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_{id}$ qui contient ce dernier élément est le carré formé par les 4 cases situées à l'intersection des lignes 3 et 4 avec les colonnes 6 et 7 (fig. 3-9). Les axes de symétrie de ce carré sont 2 et 4 et son p-terme est $u_1 \cdot u_3 \cdot u_5$. On peut aussi bien choisir comme recouvrement pour cet élément le carré à l'intersection des lignes 1 et 4 avec les colonnes 6 et 7 ou le carré à l'intersection de la dernière ligne avec les colonnes 2, 3, 6 et 7.

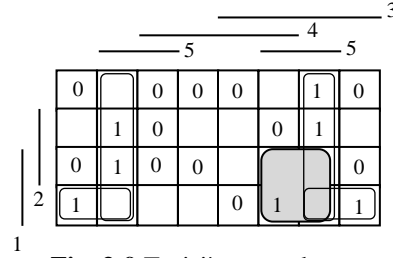


Fig. 3-9 Troisième r-cube

Ayant couvert tous les 1, il suffit d'additionner les p-termes de ce recouvrement optimal pour obtenir la plus simple expression SP de la fonction f. Ce qui donne :

$$f_d = \bar{u}_4 u_5 + u_1 \bar{u}_2 \bar{u}_4 + u_1 u_3 u_5.$$

De la même manière, on obtient la plus simple expression PS de f en multipliant les s-termes des r-cubes formant un recouvrement optimal de \mathcal{F}_0 . La figure 3-10 montre ce recouvrement duquel on tire que la plus simple expression PS de f est

$$f_c = (u_1 + u_5)(u_3 + \bar{u}_4)(\bar{u}_2 + \bar{u}_4)(\bar{u}_2 + u_5)(\bar{u}_4 + u_5).$$

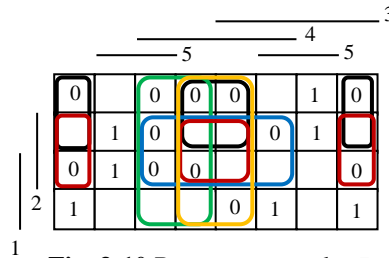


Fig. 3-10 Recouvrement de \mathcal{F}_0

À remarquer que les expressions SP et PS de f ainsi obtenues ne donnent pas la même valeur à l'élément indifférent (1, 1, 1, 1, 1) mais ces deux formes sont

toujours équivalentes sur $F = F_1 \cup F_0$, ensemble de définition de f .

La figure 3-11 montre les réalisations électroniques des expressions simplifiées SP et PS de f . Sur cette figure, le rond à l'entrée d'une porte indique que le signal correspondant est complémenté. Chacun de ces circuits est à 2 niveaux. À la sortie du premier niveau on obtient les différents termes de f et à la sortie du second on obtient f . Dans cet exemple, le circuit SP est plus simple que le circuit PS mais, évidemment, ce n'est pas toujours le cas.

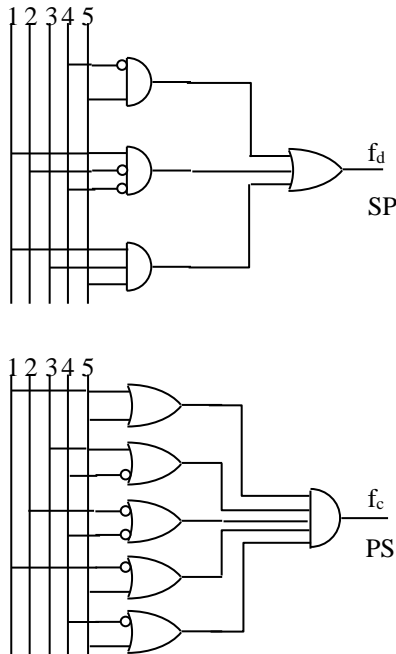


Fig. 3-10 Réalisations électroniques des expressions f_d et f_c de f .

Les figures 3-11 et 3-12 montrent les réalisations électromagnétique et pneumatique (avec cellules à bille) de l'expression SP de la fonction f .

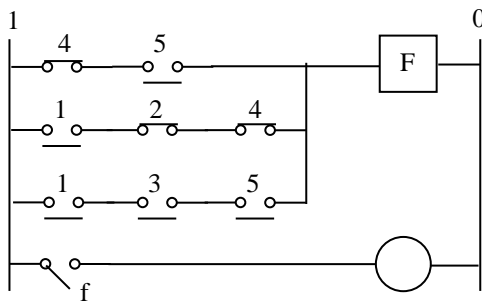


Fig. 3-11 Réalisation électromagnétique de f_d

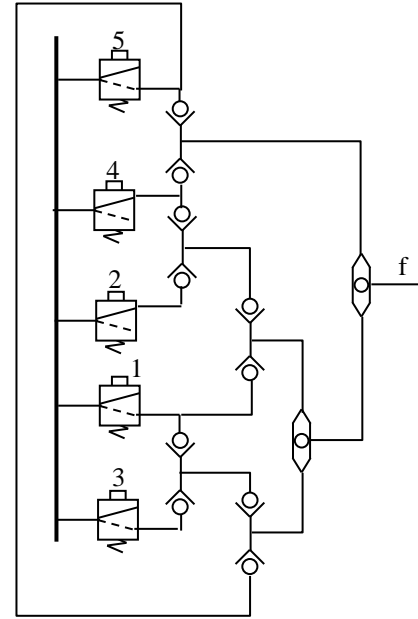


Fig. 3-12 Réalisation pneumatique de f_d

EXERCICE 3-5

Simplifier les expressions SP et PS de la fonction f définie dans \mathcal{B}^5 par

$$F_1 = \{0, 4, 5, 9, 12, 16, 24, 26, 27\},$$

$$F_0 = \{1, 2, 14, 15, 19, 20, 22, 31\}$$

et représenter leurs circuits électroniques. Pour quelles entrées indifférentes ces 2 circuits ne donnent-ils pas la même réponse? Représenter la plus simple réalisation de cette fonction

- (a) électromagnétique,
- (b) pneumatique avec cellules à tiroir.

Recouvrement de r-cubes. Les ensembles d'ouverture et de fermeture, F_1 et F_0 , d'une fonction f peuvent être définis par $F_1 = \cup A_i$ et $F_0 = \cup B_j$ où A_i et B_j sont des r-cubes ou des éléments (des 0-cubes). Au lieu que le critère soit le recouvrement optimal des éléments de F_1 (resp. de F_0), il est parfois utile de rechercher un recouvrement des sous-ensembles A_i de F_1 (resp. B_j de F_0) par le plus petit nombre de r-cubes inclus dans $F_1 \cup F_{id}$ (resp. $F_0 \cup F_{id}$). De cette manière, tout r-cube A_i (resp. B_j) sera inclus dans un r-cube du recouvrement. Ceci permettra d'éviter le risque d'un mauvais fonctionnement comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 3-5

Considérons une fonction f définie dans \mathcal{B}^4 par le tableau de Karnaugh de la figure 3-13a. La figure 3-13b montre le recouvrement optimal des éléments de \mathcal{F}_1 .

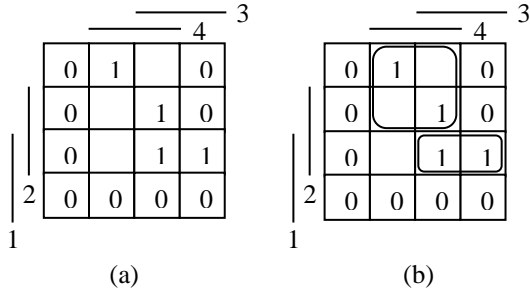


Fig. 3-13 Recouvrement optimal des éléments.

Ce recouvrement est constitué du carré $(0, -, -, 1)$ et du segment $(1, 1, 1, -)$ de p-termes $\bar{u}_1.u_4$ et $u_1.u_2.u_3$. D'où la plus simple expression SP de f est

$$f = \bar{u}_1.u_4 + u_1.u_2.u_3. \quad (1)$$

D'après le tableau 3-13a, la fonction doit conserver la valeur 1 quand l'entrée passe de $(0, 1, 1, 1)$ à $(1, 1, 1, 1)$. Effectivement, l'expression (1) montre que $f = 1$ pour ces deux entrées mais avant la transition $\bar{u}_1.u_4 = 1$ et $u_1.u_2.u_3 = 0$ et après la transition $\bar{u}_1.u_4 = 0$ et $u_1.u_2.u_3 = 1$. Or si la partie du circuit qui produit la valeur du p-terme $\bar{u}_1.u_4$ est plus rapide que celle qui produit la valeur du p-terme $u_1.u_2.u_3$, c.à.d. si $\bar{u}_1.u_4$ s'annule avant que $u_1.u_2.u_3$ monte à 1, la sortie du circuit réalisé selon l'expression (1) s'annule pendant un petit laps de temps avant de redevenir 1 (fig. 3-15). Ce phénomène, appelé *aléa de continuité* ou *effet de course*, peut apparaître quand deux cases adjacentes ont la même valeur mais qui n'appartiennent pas à un même r-cube du recouvrement. Nous reviendrons plus loin sur ce sujet mais retenons qu'il est parfois utile de recouvrir tous les éléments d'un certain r-cube de \mathcal{F}_1 (resp. \mathcal{F}_0) par un même r-cube inclus dans $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_{id}$ (resp. $\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_{id}$).

Comme, pour l'exemple considéré, $(1, 1, 1, 1)$ est à la fois adjacent à $(0, 1, 1, 1)$ et $(1, 1, 1, 0)$, on évite les aléas de continuité en incluant chacun des segments $(-, 1, 1, 1)$ et $(1, 1, 1, -)$ dans un r-cube du

recouvrement. Ceci revient à définir l'ensemble d'ouverture par

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \{(0, 0, 0, 1), (-, 1, 1, 1), (1, 1, 1, -)\} \\ &= A_1 \cup A_2 \cup A_3 \end{aligned}$$

et à rechercher un recouvrement des sous-ensembles A_i de \mathcal{F}_1 par le plus petit nombre de r-cubes inclus dans $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_{id}$.

La figure 3-14a montre les 3 sous-ensembles de \mathcal{F}_1 et la figure 3-14b montre leur recouvrement optimal par des r-cubes de $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_{id}$. Le plus grand r-cube qui contient A_1 est $(0, -, -, 1)$, le plus grand r-cube qui contient A_2 est $(-, 1, -, 1)$ et le plus grand r-cube qui contient A_3 est lui-même c.à.d. $(1, 1, 1, -)$.

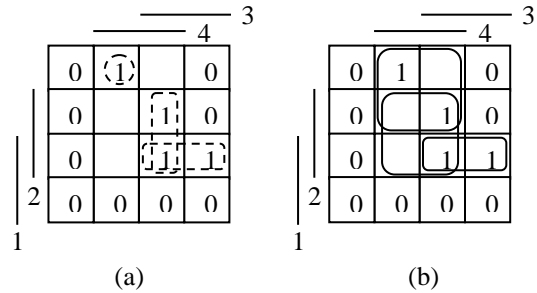


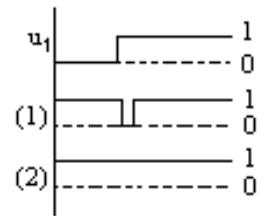
Fig. 3-14 Recouvrement optimal des r-cubes A_i .

Avec ce recouvrement, l'expression SP de f devient :

$$f = \bar{u}_1.u_4 + u_1.u_2.u_3 + u_2.u_4. \quad (2)$$

L'expression (2) de f a le terme $u_2.u_4$ en plus que son expression (1) mais cette redondance n'est pas inutile puisque ce terme, qui a la valeur 1 pour les deux entrées $(0, 1, 1, 1)$ et $(1, 1, 1, 1)$, empêche f de s'annuler en passant d'une entrée à l'autre même quand les circuits produisant $\bar{u}_1.u_4$ et $u_1.u_2.u_3$ n'ont pas la même rapidité (fig. 3-15). Le terme ajouté $u_2.u_4$ est appelé *terme* ou *r-cube de jonction*.

Fig. 3-15 Aléa de continuité (1) et sa remède (2)



3-2-2 Méthode des différences

La méthode de Karnaugh n'est pratique que lorsque le nombre de variables est inférieur à 7. En effet, quand le tableau comporte $2^7 = 128$ cases ou plus, non seulement il faut ménager pour ce tableau un espace suffisant mais surtout la recherche visuelle d'un recouvrement optimal devient ardue. La méthode des différences n'a pas ce désavantage et ne nécessite qu'un seul tableau pour déterminer simultanément les recouvrements optimaux de \mathcal{F}_1 et de \mathcal{F}_0 . En plus, étant plus systématique, elle a l'avantage d'être facilement programmable.

Généralités. Définissons les ensembles d'ouverture et de fermeture d'une fonction f par

$$\mathcal{F}_1 = \bigcup A_i \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_0 = \bigcup B_j$$

où A_i et B_j sont des r -cubes dans \mathcal{B}^p , $r = 0, 1, \dots, p$. Rappelons qu'un 0-cube n'est qu'un élément de \mathcal{B}^p et que le p -cube est tout l'ensemble \mathcal{B}^p . La méthode des différences est basée sur les propriétés suivantes.

P1. Comme $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_0 = \emptyset$ alors $\forall i, \forall j \quad A_i \cap B_j = \emptyset$.

P2. Soient (a_1, a_2, \dots, a_p) le vecteur qui définit le r -cube A_i et (b_1, b_2, \dots, b_p) le vecteur qui définit le r -cube B_j (les a_i et les b_j pouvant être des traits). Comme $A_i \cap B_j = \emptyset$, il existe un indice k pour lequel $a_k = \bar{b}_k$ et le $(p-1)$ -cube

$$C_{ij} = (-, \dots, -, a_k, -, \dots, -)$$

est un r -cube maximal qui contient A_i tout en étant disjoint de B_j . Le p -terme de C_{ij} est une seule variable

$$z_{ij} = \begin{cases} u_k & \text{si } a_k = 1, \\ \bar{u}_k & \text{si } a_k = 0. \end{cases}$$

Par exemple, les deux segments $A = (0, -, 1, 0)$ et $B = (0, 1, 0, -)$ sont disjoints car si un élément appartenait à la fois à ces deux segments sa troisième composante serait en même temps 1 et 0 ce qui est absurde. D'autre part, le cube $(-, -,$

$1, -)$ de p -terme u_3 est le plus grand r -cube qui contient A et qui est disjoint de B . À noter que les segments $(0, -, 1, 0)$ et $(0, 1, 1, -)$, qui n'ont pas des composantes complémentaires en aucune position, ne sont pas disjoints puisqu'ils ont en commun l'élément $(0, 1, 1, 0)$.

P3. L'ensemble

$$P_i = \bigcap_j C_{ij}$$

est un r -cube maximal qui contient A_i tout en étant disjoint de tous les B_j c.à.d. de \mathcal{F}_0 comme le montre schématiquement la figure 3-16.

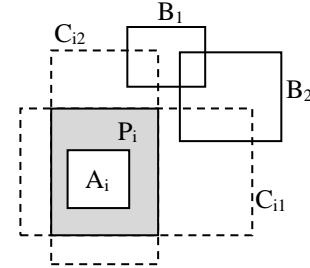


Fig. 3-16 Représentation schématique de P_i

Le p -terme de P_i est le produit des variables z_{ij} , p -termes des C_{ij} . Un recouvrement optimal de \mathcal{F}_1 est constitué des différents r -cubes P_i , $i = 1, 2, \dots$, et la plus simple expression SP de la fonction f est la somme de leurs p -termes.

P4. L'ensemble

$$S_j = \bigcap_i \bar{C}_{ij}$$

est un r -cube maximal qui contient B_j et qui est disjoint de tous les A_i c.à.d. de \mathcal{F}_1 . Son s -terme est la somme des variables z_{ij} , p -termes des C_{ij} . Un recouvrement optimal de \mathcal{F}_0 est constitué des différents r -cubes S_j , $j = 1, 2, \dots$, et la plus simple expression PS de la fonction f est le produit de leurs s -termes.

EXERCICE 3-6

Choisir dans \mathcal{B}^5 4 r -cubes A_1, A_2, B_1 et B_2 tels que $A_i \cap B_j = \emptyset$ et vérifier la propriété P4.

Procédure. La méthode des différences est basée sur les propriétés 1) à 4) ci-dessus. Pour montrer comment ces propriétés sont appliquées, nous allons considérer la même fonction que dans l'exemple 3-4 mais en définissant ses ensembles d'ouverture et de fermeture par une réunion de r -cubes.

Le tableau au bas de la page est obtenu comme suit.

- 1) On écrit les r -cubes A_i de \mathcal{F}_1 dans la première ligne et les r -cubes B_j de \mathcal{F}_0 dans la première colonne.
- 2) Dans la case (i, j) , intersection de la colonne de $A_i = (a_1, \dots, a_p)$ avec la ligne de $B_j = (b_1, \dots, b_p)$, on écrit k si $a_k = 1$ et $b_k = 0$, \bar{k} si $a_k = 0$ et $b_k = 1$ pour dire que le $(p-1)$ -cube C_{ij} de p -terme u_k ou \bar{u}_k contient A_i et il est disjoint de B_j (voir P2). Pour une même case (i, j) on peut rencontrer plus qu'un $(p-1)$ -cube ayant cette propriété.
- 3) Si dans une case (i, j) il n'apparaît qu'un seul $(p-1)$ -cube, on dit qu'il est essentiel puisqu'il est le seul disjoint de B_j et qui contient A_i .

Pour obtenir les r -cubes maximaux P_i disjoints de tous les B_j (c.à.d. de \mathcal{F}_0) et contenant A_i ,

- a) on choisit dans la colonne de A_i les $(p-1)$ -cubes essentiels et on élimine toute autre case contenant au moins l'un de ces $(p-1)$ -cubes.
- b) S'il reste des cases non éliminées, (cas de la colonne A_4), on choisit un $(p-1)$ -cube dans les cases restantes et on élimine toute case qui contient ce $(p-1)$ -cube. Il est évident que ce choix

n'est pas unique.

- c) On répète b) pour les cases restantes jusqu'à la disparition de toutes les cases.
- d) P_i est le produit des p -termes de tous les $(p-1)$ -cubes choisis, chaque p -terme étant d'une seule variable (voir P3). Puisqu'en b) le choix du $(p-1)$ -cube n'est pas unique, plusieurs P_i peuvent couvrir le même A_i (cas de la colonne A_4).
- e) Si pour un r -cube A_i de \mathcal{F}_1 , P_i est unique, on dit qu'il est essentiel puisqu'il est le seul r -cube maximal disjoint de \mathcal{F}_0 et qui recouvre A_i .

Pour obtenir un recouvrement optimal des r -cubes A_i de \mathcal{F}_1 par des r -cubes de \mathcal{B}^5 disjoints de \mathcal{F}_0 ,

- a) on choisit dans la ligne des P_i les essentiels et on élimine toute case de cette ligne qui contient au moins l'un d'entre eux.
- b) S'il reste des cases non éliminées, on choisit le P_k qui apparaît le plus dans les cases restantes de la ligne des P_i et on élimine toute case qui contient ce P_k . Si P_{k1} et P_{k2} couvrent le même nombre de A_i , on choisit le plus grand (dont le p -terme comporte le moins de variables).
- c) On répète b) jusqu'à la disparition de toutes les cases de la ligne des P_i .
- d) La plus simple expression SP de f (selon le critère de recouvrement des r -cubes de \mathcal{F}_1) est égale à la somme des p -termes des P_k choisis (dernière ligne du tableau). A remarquer que cette expression n'est pas unique et la procédure peut mener à plusieurs expressions SP de même complexité.

$\mathcal{F}_0 \backslash \mathcal{F}_1$	A_1 (0,-,1,0,1)	A_2 (-,1,0,0,1)	A_3 (1,0,-,0,0)	A_4 (1,0,1,1,1)	S_j	PS
$B_1 : (0,0,-,-,0)$	5	2,5	1	1,5	1+5	$u_1 + u_5$
$B_2 : (0,-,0,1,1)$	3, $\bar{4}$	$\bar{4}$	1, $\bar{4},\bar{5}$	1,3	1+ $\bar{4}$ 3+ $\bar{4}$	$u_3 + \bar{u}_4$
$B_3 : (0,1,-,1,1)$	$\bar{4}$	$\bar{4}$	1, $\bar{2},\bar{4},\bar{5}$	1, $\bar{2}$	1+ $\bar{4}$ $\bar{2}$ + $\bar{4}$	$\bar{u}_2 + \bar{u}_4$
$B_4 : (1,1,-,0,0)$	$\bar{1},5$	5	$\bar{2}$	$\bar{2},4,5$	$\bar{2}+5$	$\bar{u}_2 + u_5$
$B_5 : (1,1,0,1,-)$	$\bar{1},3,\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{2},\bar{4}$	$\bar{2},3$	$\bar{2}+\bar{4}$ 3+ $\bar{4}$	x
$B_3 : (-,0,1,1,0)$	$\bar{4},5$	2, $\bar{3},\bar{4},5$	$\bar{4}$	5	$\bar{4}+5$	$\bar{u}_4 + u_5$
P_i	$\bar{4}.5$	$\bar{4}.5$	1. $\bar{2}.\bar{4}$	1. $\bar{2}.5$ 1.3.5 $\bar{2}.3.5$		
SP	$\bar{u}_4 u_5$	x	$u_1 \bar{u}_2 \bar{u}_4$	$u_1 u_3 u_5$		

La plus simple expression PS de f s'obtient de la même manière que la forme SP mais en considérant les lignes des B_j au lieu des colonnes des A_i et en commutant les opérations d'addition et de multiplication (voir P4).

Le tableau montre que la forme SP contient nécessairement les deux termes essentiels $\bar{u}_4.u_5$ et $u_1.\bar{u}_2.\bar{u}_4$ et l'un des trois termes $u_5.u_1.\bar{u}_2$, $u_5.u_1.u_3$ et $u_5.\bar{u}_2.u_3$. En choisissant arbitrairement le deuxième, on obtient:

$$f_d = u_5.\bar{u}_4 + u_1.\bar{u}_2.\bar{u}_4 + u_5.u_1.u_3$$

qui est la même expression obtenue dans l'exemple 3-4 en recouvrant les éléments de \mathcal{F}_1 par la méthode Karnaugh. Bien que le recouvrement des éléments de \mathcal{F}_1 ne soit pas équivalent au recouvrement de ses r -cubes, on aboutit souvent au même résultat.

La forme PS contient nécessairement les trois termes essentiels $(u_5 + u_1)$, $(\bar{u}_4 + u_5)$ et $(\bar{u}_2 + u_5)$ ainsi que deux autres termes pouvant être $(\bar{u}_4 + u_1)$ et $(\bar{u}_4 + \bar{u}_2)$, $(\bar{u}_4 + u_1)$ et $(\bar{u}_4 + u_3)$ ou $(\bar{u}_4 + u_3)$ et $(\bar{u}_4 + \bar{u}_2)$. En choisissant arbitrairement la première possibilité, on obtient :

$$f = (u_5 + u_1).(\bar{u}_4 + u_5).(\bar{u}_2 + u_5).(\bar{u}_4 + u_1).(\bar{u}_4 + \bar{u}_2)$$

la même expression obtenue par la méthode de Karnaugh.

EXERCICE 3-7

Déterminer par la méthode des différences les expressions simplifiées SP et PS de la fonction définie dans l'exercice 3-5 en imposant que les 2 éléments 0 et 4, 16 et 20, 26 et 27, 20 et 22, 15 et 31 soient couverts par un même r -cube. Comparer avec le résultat de l'exercice 3-5. En quelles situations les aléas de continuité sont-ils évités?

EXERCICE 3-8

Le cycle de fonctionnement d'un système comporte 10 phases. La figure 3-17 montre, pour chaque phase, l'état des entrées a , b , c et d ainsi que l'état désiré y de la sortie (chronogramme).

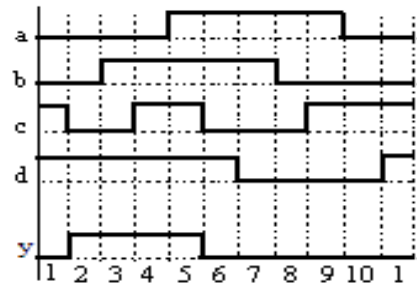


Fig. 3-17 Entrées et sortie durant les 10 phases du cycle

- 1) Représenter la fonction f liant les entrées à la sortie par un tableau de Karnaugh et déduire ses plus simples expressions SP et PS.
- 2) Montrer par des flèches entre les cases les transitions d'une phase à une autre et dire pour quelles transitions les expressions obtenues en 1) ont un aléa de continuité.
- 3) Redéfinir les ensembles \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_0 de f de sorte à éviter les aléas de continuité et simplifier f par la méthode des différences.

3-2-3 Factorisation

Théoriquement, la forme SP (resp. PS) d'une fonction logique f peut être réalisée en 2 niveaux : le premier niveau produit les p -termes (resp. les s -termes) de l'expression de f et le second niveau produit f (voir figure 3-10). Cette réalisation a la plus courte durée de propagation puisqu'elle se réduit à la durée de propagation à travers 2 portes en série. Malheureusement, en pratique, la réalisation à 2 niveaux n'est pas toujours possible car, par exemple, pour produire un p -terme à r variables, il faut avoir une porte AND ayant au moins r entrées (de fan-in $\geq r$). Supposons qu'on ne dispose que de portes à 2 entrées et qu'on désire réaliser une fonction f dont la forme SP comporte 5 p -termes chacun à 4 variables. La figure 3-18 montre que chaque p -terme nécessite 3 portes et 2 niveaux et que la somme des 5 produits nécessite 4 portes et 3 niveaux. Le circuit sera donc formé de 19 portes connectées en 5 niveaux et on voit que le nombre de portes ainsi que le nombre de niveaux augmentent considérablement quand le nombre des variables par terme ou le nombre des termes de la fonction est grand par rapport au fan-in des portes disponibles.

b change de valeur avant a et il suit le chemin inférieur dans le cas contraire. La figure 3-21 traduit graphiquement la conséquence sur la sortie de chaque possibilité.

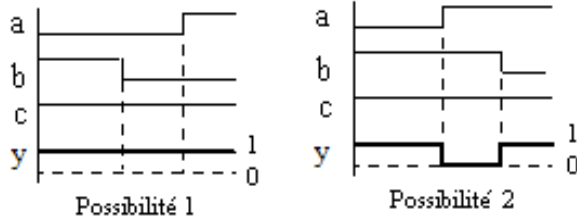


Fig. 3-21 Effets possibles du non simultanément

On voit que les deux possibilités ne donnent pas la même réponse et il est donc nécessaire de tenir compte des deux éventualités et de ne jamais supposer que deux entrées peuvent changer simultanément.

Effet de 2 termes disjoints. Cet effet a été discuté à l'exemple 3-5 pour montrer l'utilité d'effectuer la simplification de certaines fonctions par recouvrement de r-cubes au lieu d'éléments. Considérons dans un cadre plus général une fonction de la forme :

$$f = u_1.g(u_2, \dots, u_p) + \bar{u}_1.h(u_2, \dots, u_p). \quad (3-4)$$

Remarquer que les 2 termes de f ne peuvent pas avoir simultanément la valeur 1 et ils ont donc des ensembles d'ouverture disjoints. La figure 3-22 montre le circuit de f selon l'expression (3-4).

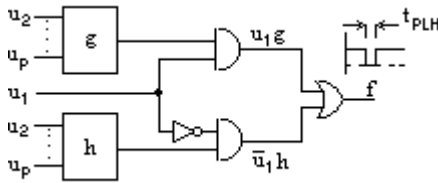


Fig. 3-22 Circuit à aléa de continuité

Supposons qu'en un instant t , les entrées u_2, \dots, u_p sont telles que $g(u_2, \dots, u_p) = h(u_2, \dots, u_p) = 1$ et que l'entrée u_1 passe de la valeur 1 à la valeur 0. Théoriquement, d'après (3-4), la fonction f doit conserver la valeur 1 après cette transition. Or, quand u_1 s'annule, \bar{u}_1 reste nulle pendant la durée de propagation t_{PLH} de l'inverseur et la fonction f

s'annule durant t_{PLH} produisant une impulsion négative non prévue par l'équation (3-4) (voir l'allure du signal à la sortie du circuit 3-22).

Pour remédier à ce défaut, remarquer qu'à la place de (3-4) on peut écrire:

$$f = u_1.g(u_2, \dots, u_p) + \bar{u}_1.h(u_2, \dots, u_p) + g(u_2, \dots, u_p).h(u_2, \dots, u_p) \quad (3-5)$$

où le troisième terme $g.h$, appelé *terme de jonction*, étant indépendant de u_1 , conserve sa valeur 1 durant t_{PLH} et assure la continuité de la fonction f . Le circuit sans aléa, correspondant à cette nouvelle expression de f , est représenté à la figure 3-23 qui comporte une porte AND en plus du circuit 3-22.

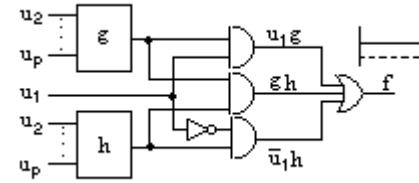


Fig. 3-23 Circuit sans aléa de continuité

Par dualité entre les propriétés des opérateurs «+» et «•» la réalisation d'une fonction f de la forme

$$f = (u_1 + .g).(\bar{u}_1 + h)$$

où g et h sont des fonctions indépendantes de u_1 , produit à la sortie une impulsion positive quand u_1 passe de 0 à 1 en un moment où les entrées u_2, \dots, u_p sont telles que $g(u_2, \dots, u_p) = h(u_2, \dots, u_p) = 0$. Par analogie avec (3-5), on élimine cette impulsion en réalisant la fonction équivalente

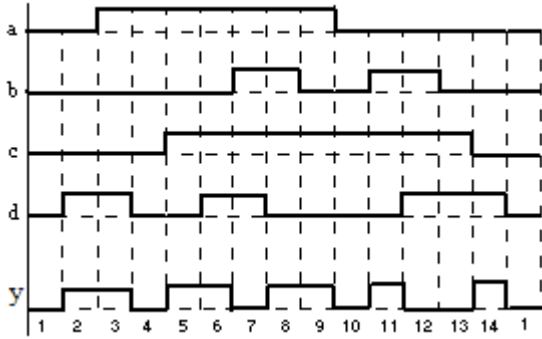
$$f = (u_1 + .g).(\bar{u}_1 + h).(g + h) \quad (3-6)$$

c'est-à-dire en ajoutant au circuit initial une porte OR produisant le terme de jonction $g + h$.

EXERCICE 3-9

La figure suivante représente le cycle de fonctionnement en 14 phases d'un système à 4 entrées a, b, c, d et une sortie f . Déterminer par la méthode de Karnaugh les expressions simplifiées

SP et PS de f et éliminer les aléas de continuité là où c'est nécessaire.



Effet de la durée de propagation. Considérons une fonction f écrite sous la forme

$$f = (g_1 + g_2).g_3 \quad (3-7)$$

g_1 , g_2 , g_3 étant fonctions des entrées u_1 , ..., u_p . Supposons qu'en un instant t où $g_1 = 1$, $g_2 = 0$ et $g_3 = 1$, l'entrée u_1 passe de 1 à 0 et produit les nouvelles valeurs : $g_1 = 0$, $g_2 = 1$ et $g_3 = 0$. Si les durées de propagation t_1 , t_2 et t_3 des circuits de g_1 , g_2 et g_3 ne sont pas égales et $t_1 < t_2 < t_3$, la réponse f du système oscille avant de se maintenir à sa nouvelle valeur 0 comme le prouve la figure 3-24. La figure montre aussi le retard de la porte OR qui produit $(g_1 + g_2)$ et le retard de la porte AND qui produit f .

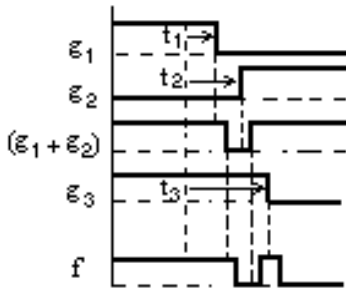


Fig. 3-24 Effet des durées de propagation

Remarquer que si g_3 s'annule avant que $g_1 + g_2$ change de valeur, les oscillations de f disparaissent. Or la durée de propagation d'un circuit dépend surtout du nombre de ses niveaux. Si, par exemple, les circuits de g_1 , g_2 , et g_3 sont respectivement à 1, 2 et 3 niveaux, on peut essayer d'augmenter t_1 et t_2 en ajoutant en série au circuit de g_2 une porte EGALÉ et au circuit de g_1 deux inverseurs comme le montre la figure 3-25. On obtient ainsi pour $g_1 + g_2$ un

circuit à 4 niveaux tandis que le circuit de g_3 n'en a que 3.

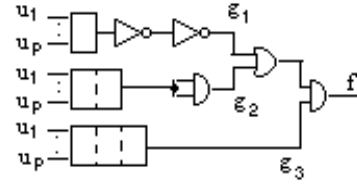


Fig. 3-25 Ajustement des durées de propagation

3-3 CIRCUITS INTÉGRÉS COMBINATOIRES

Jusqu'ici, nous n'avons utilisé que des portes logiques pour la réalisation électronique d'une fonction f . Or, souvent, cette fonction peut s'écrire sous la forme $f = h(g_1, g_2, \dots)$ avec h ou certaines des arguments g_i se rencontrent fréquemment dans les applications et dont les circuits sont disponibles sur le marché en MSI (medium scale integrated circuit). Non seulement la préfabrication de ces sous-circuits nous évite de les reconstruire à chaque fois mais, en plus, elle permet de réduire l'encombrement du circuit global et d'augmenter sa fiabilité.

Nous décrirons dans les sous-paragrophes suivants les circuits combinatoires MSI les plus répandus : le multiplexeur et le démultiplexeur, le décodeur et l'encodeur, le détecteur de parité et le comparateur et nous donnerons certaines de leurs applications.

3-3-1 Multiplexeurs

Un multiplexeur (MUX) connecte l'une des composantes d'un vecteur d'entrée $d = (d_{n-1}, \dots, d_0)$ à la sortie y comme le montre schématiquement la figure 3-26a.

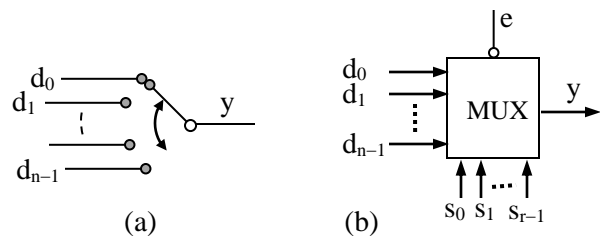


Fig. 3-26 Principe et schéma-bloc d'un multiplexeur

L'un des symboles d'un multiplexeur est représenté par la figure 3-26b. Son entrée est subdivisée en 3 parties : le vecteur de sélection $s = (s_{r-1}, \dots, s_0)$, le vecteur des données $d = (d_{n-1}, \dots, d_0)$ avec $n = 2^r$ et l'entrée d'activation e . Quand la valeur décimale de s est égale à i , $i = 0, \dots, (n-1)$, la sortie y prend la valeur de la composante d_i de d à condition que e soit nul (connecté à la masse). Par exemple, pour $r = 2$ et $n = 4$ et si le circuit est activé ($e = 0$), la relation entre les entrées et la sortie est

$$y = d_0 \cdot \bar{s}_1 \bar{s}_0 + d_1 \cdot \bar{s}_1 s_0 + d_2 \cdot s_1 \bar{s}_0 + d_3 \cdot s_1 s_0. \quad (3-8)$$

En appliquant à e la valeur 1, la sortie y se déconnecte électriquement du circuit et se lie à la masse à travers une haute impédance (pratiquement infinie). Pour certains multiplexeurs, quand $e = 1$, au lieu de la haute impédance, y prend la valeur 0 quelles que soient les entrées s et d .

De l'équation (3-8), on déduit directement le circuit d'un multiplexeur 4/1 (4 données et 1 sortie) représenté par la figure 3-27a où la porte OR de sortie est à 3 états (0, 1, haute impédance. Voir figure 2-45). Le tableau de vérité et le symbole de ce multiplexeur sont représentés en 3-27b et 3-27c. Les fabricants désignent souvent les entrées et les sorties par des lettres majuscules.

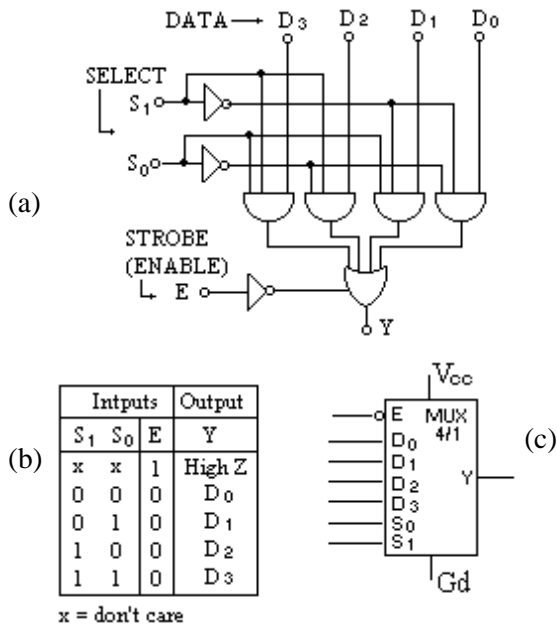


Fig. 3-27 Circuit, tableau de vérité et symbole d'un multiplexeur 4/1

Dans la famille TTL, le 74251 est un multiplexeur 8/1 à 16 broches ayant 2 sorties complémentaires y et \bar{y} (data 8 + select 3 + enable 1 + output 2 + supply 2 = 16 pins) et le 74150 est un multiplexeur 16/1 à 24 broches sans sortie complétée (data 16 + select 4 + enable 1 + output 1 + supply 2 = 24 pins). D'autre part, certaines pastilles comportent 2 multiplexeurs ou plus qui se partagent les mêmes entrées de sélection. Par exemple, le 74153 dont le circuit est représenté à la figure 3-28a comporte 16 broches et contient deux multiplexeurs 4/1 ayant en commun 2 entrées de sélection S_0 et S_1 . Si $E_1 = E_2 = 0$, les données transmises aux sorties ont nécessairement, en tout instant, le même indice et si E_1 ou E_2 est égal à 1, la sortie du multiplexeur correspondant sera nulle quelle que soit la sélection. Ce double (dual) multiplexeur 4/1 peut être transformé en un multiplexeur 8/1 en lui ajoutant un inverseur et une porte OR comme le montre la figure 3-28b. Ce circuit active le multiplexeur supérieur quand la valeur décimale de s est ≤ 3 (quand $S_2 = 0$), et active le multiplexeur inférieur dans le cas contraire.

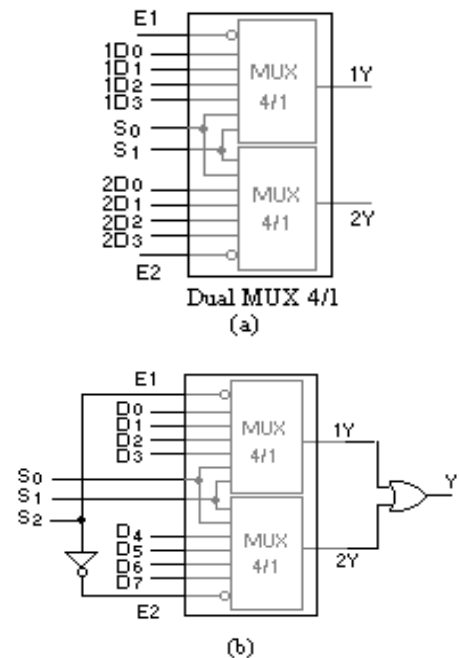


Fig. 3-28 Double multiplexeur 4/1

Réalisation d'une fonction logique à l'aide d'un multiplexeur. Soit la fonction à 5 variables

numéro de la broche correspondante. Les broches 8 et 16, non représentées sur la figure, sont réservées à l'alimentation.

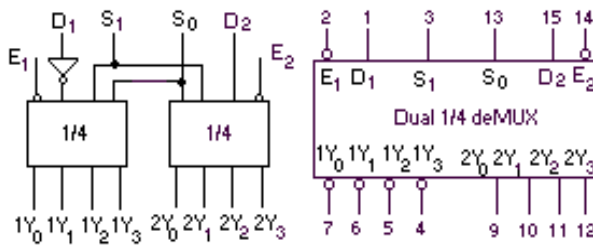


Fig. 3-31 Circuit et symbole du double deMUX 74155

EXERCICE 3-11

Transformer le double démultiplexeur 1/4 de la figure 3-31 en un démultiplexeur 1/8.

EXERCICE 3-12

On désigne par $(i + r | 4)$ le modulo 4 de $i + r$. Construire à l'aide d'un MUX 4/1, d'un deMUX 1/4 et avec le moins de portes possibles un circuit à 4 entrées d_0, \dots, d_3 , 4 sorties y_0, \dots, y_3 et 4 entrées de sélection s_1, s_0, r_1 et r_0 qui transmet l'entrée d_i à la sortie $y_{(i+r|4)}$ quand les valeurs décimales de (s_1, s_0) et (r_1, r_0) sont respectivement i et r .

3-3-3 Décodeurs

Un décodeur n'est autre qu'un démultiplexeur dont la donnée D a une valeur fixe égale à 1. Quand la valeur décimale $d(S)$ de son vecteur de sélection S est égale à i , seule la sortie Y_i s'active. Souvent les décodeurs sont à activation basse (active low) c'est-à-dire la sortie Y_i prend la valeur 0 quand elle est activée et la valeur 1 quand elle ne l'est pas. La figure 3-32 montre, avec son symbole, le circuit d'un décodeur 2/4 à activation basse (comparer avec le circuit du démultiplexeur, fig.3-30). La notation $\frac{0}{3}$ signifie que la valeur décimale du vecteur de sélection peut varier de 0 à 3.

Pour augmenter la flexibilité de leur utilisation, certains décodeurs comportent plus qu'une entrée d'activation. C'est le cas du décodeur 74138 qui a 3 entrées d'activation désignées par $G1, G2A$ et $G2B$. Ce décodeur qui a 16 broches s'active lorsque $G1.G2A.G2B = 1$. Si, par exemple, on ne désire pas activer les sorties d'indice pair de ce décodeur, il

suffit de brancher S_0 à $G2B$ à travers un inverseur comme le montre la figure 3-33.

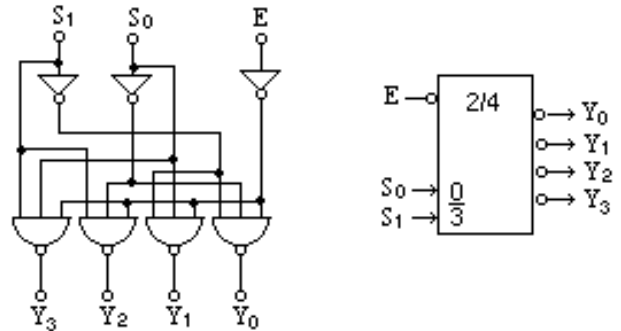
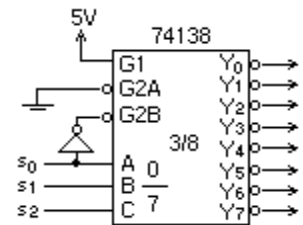


Fig. 3-32 Circuit et symbole d'un décodeur 2/4

Fig. 3-33 Décodage des impairs



EXERCICE 3-13

Montrer les branchements à l'entrée du décodeur 74138 si l'on ne désire pas activer les sorties Y_0, Y_3, Y_4 et Y_7 .

La figure 3-34 montre la manière de construire un décodeur à n^2 sorties à l'aide de $(n+1)$ décodeurs chacun à n sorties.

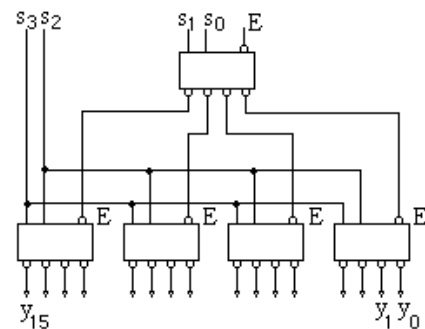
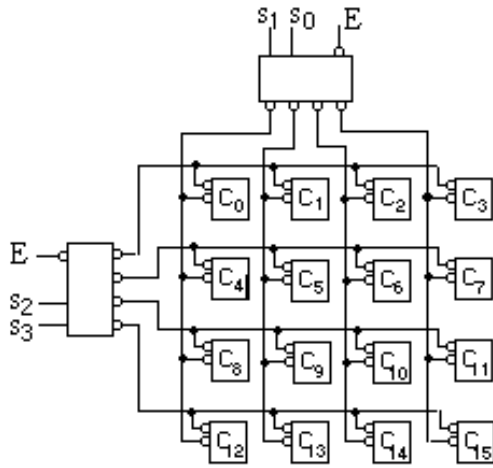


Fig. 3-34 Décodeur à n^2 sorties

La figure 3-35 représente un circuit qui permet de sélectionner un élément électronique C_i parmi n^2 éléments chacun ayant 2 entrées d'activation en n'utilisant que 2 décodeurs à n sorties.

Fig. 3-35 Sélectionneur d'un élément parmi n^2 **EXERCICE 3-14**

Construire à l'aide d'un décodeur à n sorties et de $(n+1)$ multiplexeurs $n/1$ un multiplexeur $n^2/1$.

Réalisation d'une fonction multiple à l'aide d'un décodeur. Considérons la fonction multiple $f = (f_1, f_2)$, où

$$f_1 = \bar{a}.b + a.\bar{b}.c + b.\bar{c},$$

$$f_2 = \bar{a}.\bar{b}.\bar{c} + a.b.$$

Ramenons chacune de ces fonctions à sa forme canonique SP, c.à.d. remplaçons chaque p-terme par la somme de ses mintermes. Par exemple, au lieu de $\bar{a}b$, on écrit $\bar{a}b\bar{c} + \bar{a}bc = m_2 + m_3$ où m_i est le minterme relatif au vecteur (a, b, c) de valeur décimale i . On obtient :

$$f_1 = m_2 + m_3 + m_5 + m_6 = \overline{m_2.m_3.m_5.m_6},$$

$$f_2 = m_0 + m_6 + m_7 = \overline{m_0.m_6.m_7}$$

D'après ces expressions, la fonction multiple f se réalise à l'aide d'un décodeur et deux portes NAND comme le montre la figure 3-36. Nous attirons ici l'attention que la $i^{\text{ème}}$ sortie du décodeur est le complément du minterme m_i c.à.d. qu'elle est égale à 0 si et seulement si la valeur décimale de (a, b, c) est égale à i .

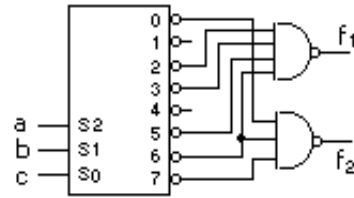


Fig. 3-36 Réalisation d'une fonction multiple

EXERCICE 3-15

Utilisant 2 décodeurs 3/8, réaliser la fonction multiple $f = (f_1, f_2, f_3)$ dont les composantes ont pour ensembles d'ouvertures

$$F_{11} = \{3, 6, 9, 15\},$$

$$F_{12} = \{5, 6, 7, 12, 15\},$$

$$F_{13} = \{3, 6, 7, 11, 13\}.$$

3-3-4 Décodeur 7 segments

La figure 3-37a représente les 7 segments a, b, c, d, e, f et g d'une cellule d'un afficheur décimal et la figure 3-37b montre, comme exemple, l'affichage du chiffre 4 en modifiant la couleur des segments f, g, b et c.

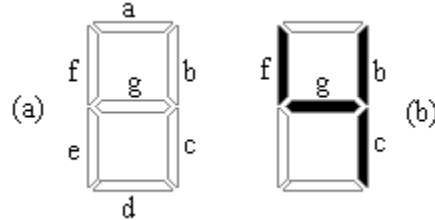


Fig. 3-37 Affichage par changement de couleur des segments d'une cellule

Deux techniques sont utilisées pour changer la couleur d'un segment :

- 1) En incorporant derrière chaque segment une ou plusieurs diodes émettrices de lumière (LED). Cette technique n'est plus utilisée que pour des afficheurs de grandes dimensions.
- 2) En plaçant les segments devant un liquide cristallin dont les propriétés optiques et en particulier la couleur se modifient sous l'effet d'un champ électrique. La figure 3-38 montre la constitution d'un LCD (*liquid-crystal display*).

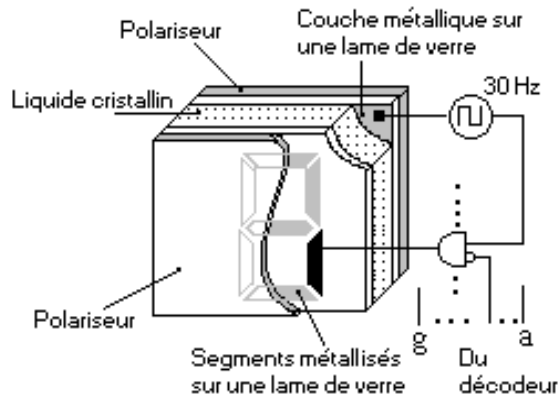


Fig. 3-38 Constitution d'une cellule LCD

Le polariseur avant filtre les ondes lumineuses provenant du milieu ambiant en ne laissant passer que celles qui sont dans un plan vertical. Le polariseur arrière réfléchit la composante verticale d'une onde et absorbe sa composante horizontale. Les molécules du liquide cristallin ont la propriété de ne modifier le plan d'une onde que quand elles sont soumises à un champ électrique. Dans ce cas le plan de l'onde devient presque horizontal et l'onde sera donc absorbée par le polariseur arrière. Ainsi, pour donner aux segments (métalliques et transparents) du chiffre à afficher une couleur noirâtre, il suffit d'appliquer entre ces segments et la lame arrière métallisée un champ électrique. Ceci est assuré par des portes AND qui connectent les segments sélectionnés à un oscillateur 30 Hz.

La sélection des segments formant un chiffre donné se fait à l'aide d'un décodeur à 7 segments. La figure 43 montre le symbole logique du décodeur 7447A qui associe au code binaire (A, B, C, D) du chiffre à afficher les segments qui le constituent en annulant les sorties correspondantes à ces segments.

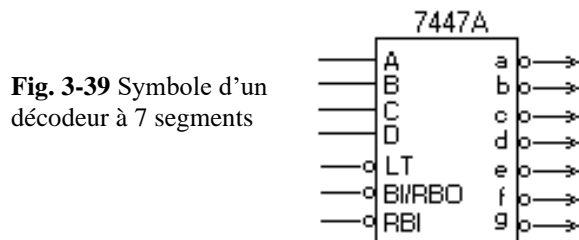


Fig. 3-39 Symbole d'un décodeur à 7 segments

Ce décodeur comporte trois autres entrées à logique négative : LT (lamp test), RBI (ripple-blanking input ou zero blanking) et BI/RBO (blanking input/ripple-blanking output) ayant les fonctions suivantes.

- 1) Si BI/RBO = 1 ou flottant (sans connexion externe), LT = 0 active toutes les sorties ($a = b = \dots = g = 0$). Ceci permet de tester si tous les segments d'une cellule fonctionnent correctement (lamp test).
- 2) Si BI/RBO = 0, toutes les sorties se désactivent ($a = b = \dots = g = 1$) indépendamment de l'état des autres entrées (blanking input).
- 3) Si RBI = 0, LT = 1 et $A = B = C = D = 0$, toutes les sorties se désactivent ($a = b = \dots = g = 1$) et BI/RBO, qui devient une sortie, prend la valeur 0. Cette facilité permet d'effacer les 0 à gauche d'un nombre écrit sur un afficheur à plusieurs cellules comme le montre l'exemple représenté à la figure 3-40 (ripple-blanking output). Le décodeur à l'extrême droite affiche toujours le 0 et le décodeur à l'extrême gauche l'efface. Un décodeur intermédiaire n'efface le 0 que si tous les chiffres introduits à sa gauche sont nuls.

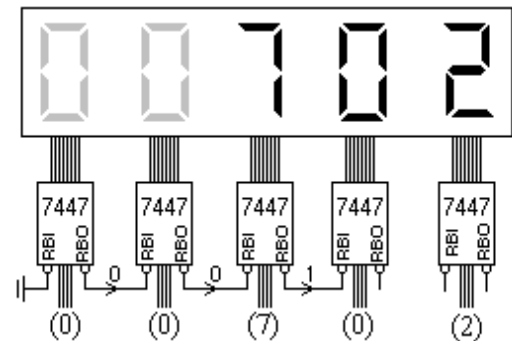


Fig. 3-40 Effacement des 0 à gauche

EXERCICE 3-16

Construire le circuit logique du décodeur 7 segments 7447A à l'aide d'un décodeur 4/16 et de portes logiques.

3-3-5 Encodeurs

Le fonctionnement d'un encodeur est l'inverse de celui d'un décodeur. Si seule la $i^{\text{ème}}$ entrée est activée, il donne sur ses sorties le code binaire du

nombre i . Si plusieurs entrées sont simultanément activées, l'encodeur donne la priorité au plus grand indice et ignore les autres. Par exemple, un encodeur à 4 entrées d_0, d_1, d_2, d_3 et 2 sorties A_0, A_1 , a le tableau de vérité suivant :

d_3	d_2	d_1	d_0	A_1	A_0
x	x	x	1	1	1
x	x	1	0	1	0
x	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

x = don't care

De ce tableau on déduit que

$$A_0 = d_3 + d_1 \bar{d}_2 \bar{d}_3 = d_3 + d_1 \bar{d}_2,$$

$$A_1 = d_3 + d_2 \bar{d}_3 = d_3 + d_2,$$

d'où le circuit de la figure 3-41a. Cependant les encodeurs sont souvent construits en logique négative c.à.d. la tension haute est interprétée 0 et la tension basse 1. Ceci revient à introduire des inverseurs aux entrées et aux sorties du circuit 3-41a ou, pour économiser, à remplacer les expressions précédentes par

$$\bar{A}_0 = \bar{d}_3 + \bar{d}_1 d_2 \Leftrightarrow A_0 = d_3 (d_1 + \bar{d}_2),$$

$$\bar{A}_1 = \bar{d}_3 + \bar{d}_2 \Leftrightarrow A_1 = d_3 d_2,$$

ce qui donne le circuit 3-41b.

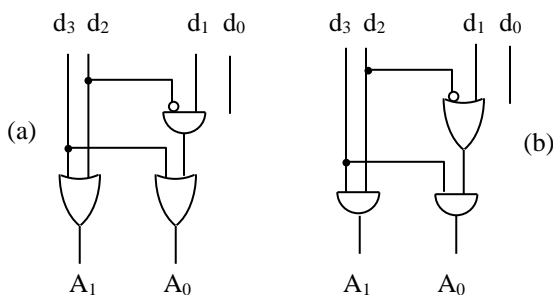
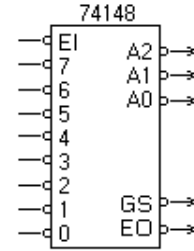


Fig. 3-41 Encodeur 4/2 à logique (a) positive (b) négative.

Le 74148 est un encodeur 8/3 à logique négative qui comporte en plus une entrée d'activation EI (Enable

Input) et 2 sorties, GS (Group Select) et EO (Enable Output) comme le montre la figure 3-42.

Fig. 3-42 Symbole d'un encodeur 8/3



Si l'encodeur est inactif ($EI = 1$), les sorties GS et EO sont aussi inactives et ont, toutes les deux, la valeur 1. Par contre, si l'encodeur est actif ($EI = 0$), GS et EO sont complémentaires : $GS = 0$ et $EO = 1$ si l'une au moins des entrées 0 à 7 est active (de valeur 0), $GS = 1$ et $EO = 0$ si toutes ces entrées sont inactives. Les sorties GS et EO sont utiles pour connecter 2 ou plusieurs encodeurs. Par exemple, la figure 3-43 montre la manière de construire un encodeur 16/4 à logique négative en connectant 2 encodeurs 8/3.

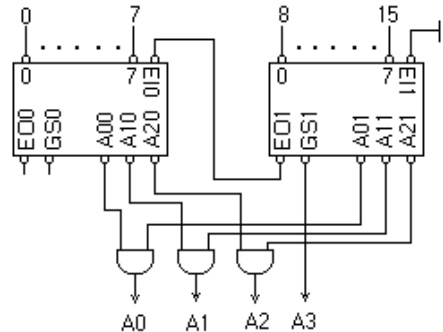


Fig. 3-43 Réalisation d'un encodeur 16/4 utilisant 2 encodeurs 8/3.

EXERCICE 3-17

Pour $n = 3, \dots, 8$, construire à l'aide de $(n+1)$ encodeurs 74148 un encodeur à $8n$ entrées et m sorties, m étant le plus petit entier tel que $8.n \leq 2^m$.

3-3-6 Générateur/détecteur de parité

En transmettant un vecteur binaire d'un émetteur à un récepteur relativement éloignés, des effets parasites peuvent changer les valeurs de certaines de ses composantes. Pour augmenter la fiabilité de la transmission, un générateur de parité ajoute au vecteur envoyé un bit supplémentaire qui indique si

le nombre des 1 dans le vecteur est pair ou impair. Si le bit ajouté rend le nombre total des 1 pair (resp. impair), on dit que le système de parité est pair (resp. impair). Par exemple, avec un système de parité pair, on ajoute au vecteur (01101) le bit 1 et au vecteur (00101) le bit 0. Par contre, avec un système de parité impair, on ajoute au vecteur (01101) le bit 0 et au vecteur (00101) le bit 1. Comme pour $U = (u_1, \dots, u_n)$

$$\bigoplus_{i=1}^n u_i = 1 \Leftrightarrow [\text{nombre des 1 dans } U \text{ est impair}],$$

un générateur de parité pair n'est autre qu'une porte XOR. Suivi d'un inverseur, il devient un générateur de parité impair.

Considérons un système de parité pair. Si, à la réception, un détecteur de parité trouve un nombre pair de 1 (y compris le bit ajouté), il produit un bit 0 pour accepter le vecteur transmis. Par contre, s'il détecte un nombre impair de 1, il produit un bit 1 pour refuser la donnée et signaler l'erreur. Comme le générateur de parité, le détecteur est aussi constitué d'une porte XOR et la figure 3-44 montre un simple système de parité pair.

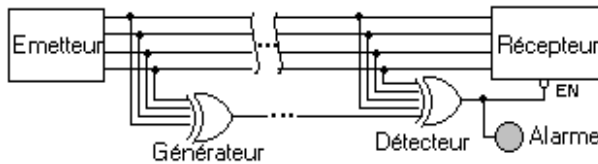


Fig. 3-44 Système de parité

Le 74280 est un générateur/détecteur de parité constitué essentiellement d'une porte XOR à 9 bits d'entrée. Il peut remplir soit la fonction d'un générateur soit celle d'un détecteur. Il comporte deux sorties, la première, désignée par "Σeven", est utilisée dans un système de parité pair tandis que l'autre sortie, "Σodd", est utilisé dans un système impair.

3-3-7 Comparateurs

Soient deux bits a et b . On a :

$$a > b \Leftrightarrow (a = 1, b = 0) \Leftrightarrow a \cdot \bar{b} = a(\bar{a} \cdot \bar{b}) = 1,$$

$$a < b \Leftrightarrow (a = 0, b = 1) \Leftrightarrow \bar{a} \cdot b = b(\bar{a} \cdot \bar{b}) = 1,$$

$$a = b \Leftrightarrow a \otimes b = \overline{a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b} = 1.$$

La figure 3-45 représente avec son symbole le circuit d'une cellule de comparaison entre deux bits.

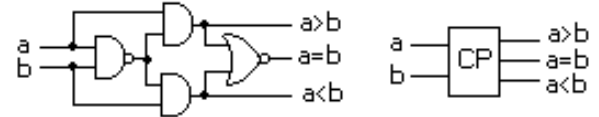


Fig. 3-45 Comparateur 1 bit.

Considérons maintenant deux vecteurs à 3 composantes $A = (a_2, a_1, a_0)$ et $B = (b_2, b_1, b_0)$ et soient $d(A)$ et $d(B)$ leurs valeurs décimales. On a :

$$d(A) = d(B) \Leftrightarrow (a_2 = b_2) \cdot (a_1 = b_1) \cdot (a_0 = b_0) = 1,$$

$$d(A) > d(B) \Leftrightarrow (a_2 > b_2) + (a_2 = b_2) \cdot (a_1 > b_1) + (a_2 = b_2) \cdot (a_1 = b_1) \cdot a_0 > b_0 = 1,$$

$$d(A) < d(B) \Leftrightarrow (a_2 < b_2) + (a_2 = b_2) \cdot (a_1 < b_1) + (a_2 = b_2) \cdot (a_1 = b_1) \cdot (a_0 < b_0) = 1.$$

Ces relations conduisent au circuit d'un comparateur à 3 bits représenté à la figure 3-46.

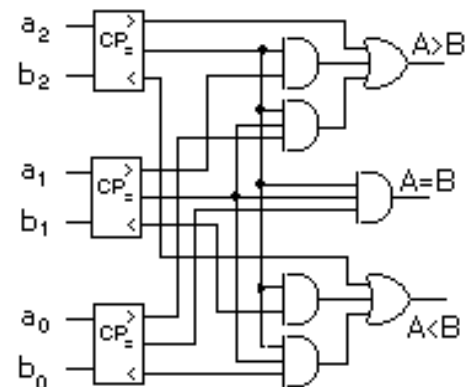


Fig. 3-46 Comparateur 3 bits

Plusieurs types de comparateurs sont disponibles dans la famille 74 TTL. Le 74688 et le 74682 sont à 8 bits (16 entrées), le premier n'a qu'une seule sortie $\overline{A = B}$ et le second en a deux, $\overline{A = B}$ et $\overline{A > B}$. Le 7485 est à 4 bits avec 3 sorties $A = B$, $A > B$ et $A < B$ et il est muni de 3 entrées

supplémentaires désignées par $>$, $=$ et $<$ qui peuvent se connecter aux sorties d'un autre comparateur 7485 pour constituer un comparateur à 8 bits comme le montre la figure 3-47.

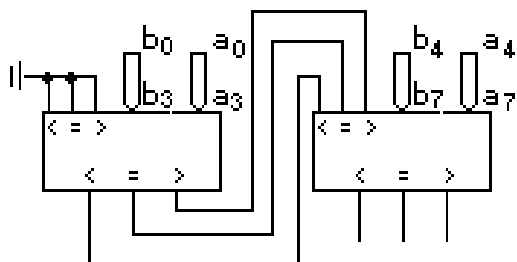


Fig. 3-47 Comparateur 8 bits utilisant 2 comparateurs 4 bits.

EXERCICE 3-18

Ajouter au circuit de la figure 3-46 trois entrées $>$, $=$, $<$ ayant le même rôle que celles du comparateur 7485.

AUTRES EXERCICES ET COMPLÉMENTS

3-19 Fonctions monotones

On définit dans \mathcal{B}^p la relation d'ordre \leq par

$$(a_1, \dots, a_n) \leq (b_1, \dots, b_n) \Leftrightarrow a_i \leq b_i \quad \forall i.$$

Une fonction $f : \mathcal{B}^p \rightarrow \mathcal{B}$ est *monotone croissante* (resp. *décroissante*) si, pour $A, B \in \mathcal{B}^p$,

$$A \leq B \Rightarrow f(A) \leq f(B) \quad [\text{resp. } f(B) \leq f(A)]. \quad (1)$$

- a) Montrer qu'une fonction est croissante si et seulement si aucune variable de sa plus simple forme SP n'est complétée et qu'une fonction est décroissante si et seulement si toutes les variables de sa plus simple forme SP sont complétées.
- b) Appliquer la définition (1) pour remplir les cases vides par 1 ou par 0 afin de définir dans le tableau (a) ci-dessous une fonction croissante et dans le tableau (b) une fonction décroissante. Simplifier les fonctions ainsi définies et vérifier la propriété a).

(a)

(b)

3-20 Fonction symétrique

Une fonction $f: \mathcal{B}^p \rightarrow \mathcal{B}$ est dite symétrique si $f(U)$ ne dépend que du nombre de 1 dans $U = (u_1, \dots, u_p)$. Soit $N(U)$ ce nombre.

- a) Combien d'éléments contient l'ensemble d'ouverture \mathcal{F}_1 de la fonction $f: \mathcal{B}^5 \rightarrow \mathcal{B}$ définie par $f(U) = 1 \Leftrightarrow N(U) \in \{1, 3\}$. Réaliser cette fonction avec un multiplexeur 8/1, un décodeur 2/4 et 2 portes OR.
- b) Soit n le nombre de vecteur dans l'ensemble d'ouverture \mathcal{F}_1 d'une fonction f et posons n_i le nombre des vecteurs de \mathcal{F}_1 dont la $i^{\text{ème}}$ composante est égale à 1. Montrer que
- (1) f est symétrique $\Leftrightarrow n_i = n_j \quad \forall i, j$.
 - (2) Si g est une fonction symétrique et $f(u_{i1}, \dots, u_{ik}, u_{i(k+1)}, \dots, u_{in})$

$$= g(u_{i_1}, \dots, u_{i_k}, \overline{u_{i(k+1)}}, \dots, \overline{u_{i_p}}),$$

e) Une fonction floue est une application $f : I^p \rightarrow I$ dont l'expression algébrique ne comporte que les opérations «+» et «·» et complément de l'algèbre floue. Soient a, b et c des variables floues et $\beta_i, \gamma_i, \delta_i$ des constantes non nulles appartenant à I . Montrer que les conditions suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} a \geq \beta_1 \\ \text{et } b \leq \gamma_1 \\ \text{et } c \geq \delta_1 \end{array} \right\} \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} a \geq \beta_2 \\ \text{et } b \geq \gamma_2 \\ \text{et } c \leq \delta_2 \end{array} \right\} \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} a \leq \beta_3 \\ \text{et } b \leq \gamma_3 \\ \text{et } c \leq \delta_3 \end{array} \right\}$$

sont équivalentes à la relation

$$f(a, b, c) = a_1 \cdot \bar{b}_1 \cdot c_1 + a_2 \cdot b_2 \cdot \bar{c}_2 + \bar{a}_3 \cdot \bar{b}_3 \cdot \bar{c}_3 \geq \alpha$$

avec $a_i = (\alpha/\beta_i) \cdot a$ si $a \geq \beta_i$, $a_i = [(1 - \alpha)/\beta_i] \cdot a$ si $a \leq \beta_i$ et il en est de même pour les b_i et les c_i . Le nombre α est tel que tous les a_i, b_i et c_i sont dans I . Utilisant les portes de la logique floue et un comparateur 74682, construire un circuit dont la sortie sera égale à la valeur logique 1 si et seulement si la relation précédente est satisfaite.

f) Soient x, y, z les signaux délivrés par 3 capteurs et x_m, y_m, z_m leurs valeurs maximums. Posons $a = x/x_m, b = y/y_m, c = z/z_m$ et supposons qu'une pompe se met en marche si et seulement si les conditions suivantes satisfaites :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0.4 \leq a \leq 0.6 \\ \text{ou } b \geq 0.2 \end{array} \right\} \text{ et } c \leq 0.9.$$

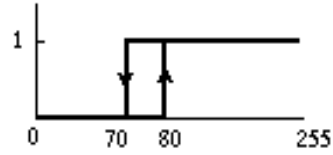
Construire l'organe de commande de la pompe.

3-23 On considère des vecteurs logiques à 4 composantes. En utilisant des multiplexeurs 74153, construire un multiplexeur qui choisit un vecteur parmi 4.

3-24 A l'aide d'un multiplexeur 8/1, construire un circuit qui indique par 1 les vecteurs à 5 composantes dont la valeur décimale est divisible par 3. Construire le même circuit en n'utilisant que des portes logiques.

3-25 En utilisant de portes logiques et un encodeur 8/3, construire un circuit qui indique en code binaire la position du premier 1 à partir de la droite dans un vecteur à 8 composantes. Ajouter un autre circuit qui compte le nombre des 1 dans ce vecteur.

3-26 Utilisant un comparateur 8 bits, construire un relais avec hystérésis dont la caractéristique est représentée ci-dessous où l'abscisse est la valeur décimale de l'entrée et l'ordonnée est la valeur logique de la sortie.



3-27 Construire à l'aide de décodeurs 74138 et de portes logiques un décodeur 5/32 qui n'active pas les sorties qui correspondent à des vecteurs dont la valeur décimale est divisible par 3.