

Chapitre 2

MODÉLISATION ANALYTIQUE

Le modèle mathématique d'un système est la relation entre son entrée et sa sortie. Il prend généralement la forme d'une ou de plusieurs équations différentielles. Pour un système fonctionnant selon des lois physiques connues, il est possible d'appliquer ces lois pour établir analytiquement son modèle. C'est ce type de modélisation qui sera envisagé dans ce chapitre. Pour un système complexe ou régi par des lois mal connues le recours à l'expérience est indispensable et les méthodes permettant de déduire à partir des résultats expérimentaux un modèle représentatif du fonctionnement du système seront données aux chapitres 5 et 6. A noter que même pour un modèle établi par voie analytique un travail expérimental est nécessaire pour déterminer les paramètres du modèle et valider les hypothèses adoptées. L'avantage de la modélisation analytique réside surtout dans l'examen des phénomènes qui se déroulent à l'intérieur du système ce qui permet d'interpréter physiquement les paramètres du modèle et d'obtenir des informations pouvant aider à sa commande.

La majeure partie de ce chapitre sera consacrée à la modélisation des milieux discrets dont l'état en un instant donné se décrit par un nombre fini de variables. La modélisation des milieux continus, dont la description de l'état nécessite une infinité non dénombrable de variables, sera envisagée succinctement vers la fin du chapitre. A l'aide d'exemples tirés de plusieurs disciplines (thermodynamique, mécanique, électricité, ...), nous introduisons successivement la notion de variables et d'équations d'état, la résolution numérique des équations différentielles à l'aide du logiciel MATLAB, les équations entrée-sortie d'un système et leur conversion en équations d'état, la

mise en équations d'un milieu continu et sa discrétisation par éléments finis.

2-1 ÉQUATIONS D'ÉTAT

État d'un système. Un système fonctionne sous l'effet d'une ou de plusieurs actions $u_1(t)$, $u_2(t)$, ..., appelées *entrées* ou *actions* et son fonctionnement se caractérise par une ou plusieurs grandeurs qui lui sont rattachées, $y_1(t)$, $y_2(t)$, ..., appelées *sorties* ou *réponses*.

Considérons un système dont les entrées et les sorties sont respectivement les composantes des vecteurs $u(t) = [u_1(t), \dots, u_p(t)]$ et $y(t) = [y_1(t), \dots, y_q(t)]$. A partir d'un instant t_0 , la réponse $y(t)$ ne dépend pas seulement de l'entrée $u(t)$, $t \geq t_0$, mais aussi de l'état du système à l'instant initial t_0 . Cet état se caractérise par des grandeurs $x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)$ appelées *conditions initiales* et le vecteur $x(t_0) = [x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)]$ est appelé *état initial*. Par exemple, pour déterminer à partir d'un instant t_0 la position $y(t)$ d'un corps se déplaçant le long d'une droite horizontale sous l'action d'une force connue $u(t)$, il est nécessaire de connaître, en plus de l'entrée $u(t)$, sa position initiale $x_1(t_0) = y(t_0)$ et sa vitesse initiale $x_2(t_0) = (dy/dt)(t_0)$ et on dit que l'état initial de ce corps est $x(t_0) = [x_1(t_0), x_2(t_0)]$.

L'instant initial t_0 étant arbitraire, on peut parler de l'état d'un système en tout instant t . Il se définit par un vecteur $x(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]$ dont les composantes, appelées *variables d'état*, sont des données suffisantes pour déduire, à partir de l'instant t , le comportement du système sous toute action $u(t')$, $t' \geq t$. Les variables d'état caractérisent donc les grandeurs physiques, autres que l'entrée, qui ont une influence sur la réponse du système. En particulier, il faut associer une variable d'état à toute forme d'énergie emmagasinée dans le système

pouvant affecter la sortie. Si les n composantes de $x(t)$ sont toutes nécessaires pour décrire l'état du système en tout instant t , on dit que ce système est d'ordre n .

Exemple 2-1

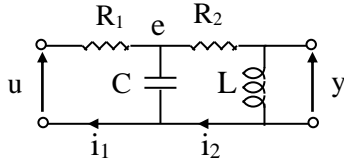


Figure 2-1. Etat d'un circuit

L'entrée du circuit de la figure 2-1 est la tension u et sa sortie est la tension y . A partir d'un instant initial t_0 , la réponse y ne dépend pas seulement de u mais aussi des énergies électrique et magnétique, $(1/2).C.e^2$ et $(1/2).L.i_2^2$, emmagasinées dans la capacité C et dans l'inductance L à l'instant t_0 . Même quand la tension u est nulle, ces énergies produisent pendant un certain temps une tension y non nulle. L'état x du circuit en un instant arbitraire t se caractérise donc par ces énergies ou, ce qui revient au même, par la tension $e(t)$ aux bornes de C et le courant $i_2(t)$ qui traverse L . On écrit $x(t) = [x_1(t), x_2(t)]$ avec $x_1 = e$ et $x_2 = i_2$. Il est important de noter que l'état de ce circuit peut être aussi défini par tout autre vecteur lié à $[e, i_2]$ par une bijection. Par exemple, comme la charge de la capacité est $q = C.e$ et que $e - y = R_2.i_2$, on peut choisir comme variables d'état la charge q au lieu de la tension e et la tension $e - y$ au lieu du courant i_2 .

Exemple 2-2

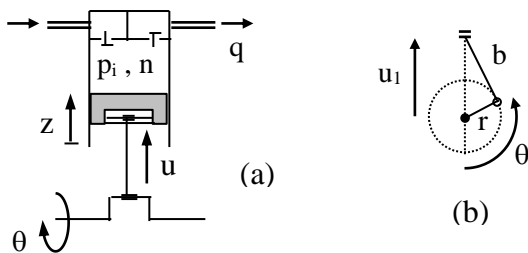


Figure 2-2. Etat d'un compresseur

La figure 2-2.a représente un compresseur dont la sortie est le débit q de l'air refoulé vers l'extérieur. Son entrée est le vecteur $u = (u_1, u_2)$ où u_1 est le déplacement du piston produit par un mécanisme bielle-manivelle et u_2 est la vitesse de ce déplacement. D'après la figure 2-2.b, la relation

entre u_1 et la rotation θ du vilebrequin est donnée par

$$b^2 = r^2 + u_1^2 + 2ru_1 \cos \theta$$

ou

$$u_1 = -r \cos \theta + \sqrt{b^2 - r^2 \sin^2 \theta}, \quad (b > r). \quad (1)$$

L'état de ce système en un instant donné peut être défini par :

- la pression p_i de l'air dans la chambre de compression,
- le nombre n de moles d'air dans cette chambre.

En effet, les énergies potentielle et cinétique du piston se caractérisent par sa position u_1 et sa vitesse u_2 . Mais comme u_1 et u_2 sont des entrées, on ne les compte pas parmi les variables d'état. D'autre part, l'état thermodynamique de l'air dans la chambre de compression se caractérise par p_i , n , sa température T et son volume V . Mais, comme T se déduit de p_i , n et V à partir de l'équation thermique de l'air ($p_i V = n.R.T$ si l'air est supposé parfait) et que u_1 détermine le volume V , il est inutile d'ajouter T et V à la liste des variables d'état. Par conséquent, en posant $x_1 = p_i$ et $x_2 = n$, l'état du compresseur se définit par le vecteur à 2 composantes $x = (x_1, x_2)$.

Équations d'état. Les équations d'état d'un système donnent, en tout instant t , la dérivée $dx/dt = (dx_1/dt, \dots, dx_n/dt)$ de l'état de ce système et sa réponse $y = (y_1, \dots, y_q)$ en fonction de son état $x = (x_1, \dots, x_n)$ et de l'entrée $u = (u_1, \dots, u_p)$. Nous montrerons plus loin qu'on peut déduire de ces équations le comportement du système sous toute action u à partir de tout état initial x_0 .

Exemple 2-3

En caractérisant l'état du circuit de la figure 2-1 par $x = (x_1, x_2)$ avec x_1 la tension e aux bornes de la capacité C et x_2 le courant i_2 traversant l'inductance L , on a :

$$\dot{x}_1 = \frac{de}{dt} = \frac{1}{C} \cdot (i_1 - i_2) = \frac{1}{C} \left[\frac{u - e}{R_1} - i_2 \right],$$

$$\dot{x}_2 = \frac{di_2}{dt} = \frac{1}{L} (e - R_2 \cdot i_2),$$

$$y = e - R_2 \cdot i_2.$$

En remplaçant au second membre des équations précédentes e par x_1 et i_2 par x_2 , les équations d'état s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{1}{C.R_1}.x_1 - \frac{1}{C}.x_2 + \frac{1}{C.R_1}.u \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = \frac{1}{L}.x_1 - \frac{R_2}{L}.x_2. \end{cases} \quad (2)$$

$$y = x_1 - R_2.x_2 \quad (3)$$

En fonction de l'état et de l'entrée, les équations (1) et (2) donnent le taux de variation de cet état (sa dérivée) et l'équation (3) la réponse y du circuit en tout instant.

EXERCICE 2-1

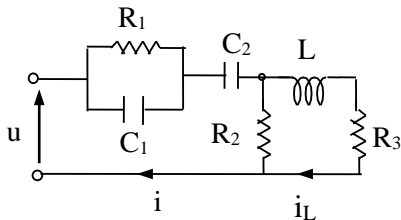


Figure 2-3. Circuit à 3 variables d'état

Pour le circuit de la figure 2-3 d'entrée u et de sortie $y = i$, choisir des variables d'état et écrire leurs équations. On donne : $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = \frac{1}{2} \Omega$, $R_3 = 2 \Omega$, $C_1 = 1 \text{ F}$, $C_2 = 2 \text{ F}$, $L = 2 \text{ H}$.

Réponse possible :

$$\dot{x}_1 = -x_1 - 0.5x_2 - 0.5x_3 + 0.5u,$$

$$\dot{x}_2 = 0.5x_1 - x_2 - x_3 + u,$$

$$\dot{x}_3 = x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2u,$$

$$y = x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 2u.$$

Dans l'exemple précédent, le second membre des équations d'état a toujours la même expression quel que soit l'état du système et l'entrée qui lui est appliquée. L'exemple suivant montre que ce n'est pas le cas pour tous les systèmes.

Exemple 2-4

Le fonctionnement du compresseur de la figure 2-2 se subdivise en 4 phases : (a) dilatation sans aspiration, (b) dilatation avec aspiration, (c) compression sans refoulement et (d) compression avec refoulement. Le clapet d'aspiration s'ouvre quand la pression p_i dans la chambre de

compression arrive en diminuant à la pression p_a de l'air dans la conduite d'entrée et se ferme dès que la compression commence. Le clapet de refoulement s'ouvre quand la pression p_i arrive en augmentant à la pression p_r de l'air dans la conduite de sortie et se ferme dès que la dilatation commence. Généralement p_a est la pression atmosphérique et p_r est la pression régnant dans un grand réservoir où l'air comprimé est accumulé. Nous admettons que les pressions p_a et p_r sont constantes avec $p_r > p_a$ et nous négligeons la chute de pression à travers un clapet ouvert.

L'entrée (u_1 , u_2), la sortie q et l'état (p_i , n) étant ceux définis dans l'exemple 2, déterminons les équations d'état du compresseur pour chaque phase de son fonctionnement.

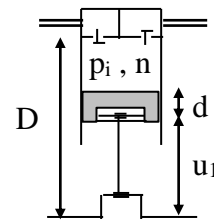
(a) Dilatation sans aspiration. Durant cette phase, la vitesse u_2 du piston est négative (vers le bas) et la pression p_i dans la chambre est supérieure à la pression p_a dans la canalisation d'entrée. Ces conditions s'écrivent

$$u_2 < 0 \quad \text{et} \quad x_1 > p_a. \quad (a)$$

Sous ces conditions,

1) $\dot{x}_1 = \dot{p}_i$ est la variation par unité de temps de la pression de l'air dans la chambre de compression. Or, la pression p_i de l'air est liée à son volume molaire v par la relation $p_i v^\kappa = c^{\text{te}}$, κ étant un réel positif appelé *exposant polytropique* dont la valeur dépend du degré de l'isolation thermique entre la chambre et le milieu ambiant. On en déduit que

$$\dot{p}_i.v^\kappa + \kappa.p_i.v^{\kappa-1}.\dot{v} = 0 \Rightarrow \dot{p}_i = -\kappa.\frac{p_i.\dot{v}}{v}. \quad (1)$$



Mais, si S est la surface du piston, D est la distance entre l'axe du vilebrequin et le sommet du cylindre et d est la distance entre la face supérieure du piston et son articulation (figure ci-dessus), le volume de la chambre de compression à l'instant considéré est

$$n.v = S.(L - u_1) \quad \text{avec} \quad L = D - d \quad (2)$$

Or, les deux clapets étant fermés durant la phase considérée, le nombre n de moles dans la chambre est constant. En dérivant les logarithmes des deux membres de l'égalité précédente, on obtient :

$$\frac{\dot{v}}{v} = \frac{-\dot{u}_1}{L - u_1} \quad (3)$$

Sachant que $p_i = x_1$ et $du_1/dt = u_2$, des égalités (1) et (3) on tire

$$\dot{x}_1 = \kappa \frac{x_1 \cdot u_2}{L - u_1} \quad (4)$$

2) $\dot{x}_2 = \dot{n}$ est la variation du nombre de moles par unité de temps. Mais n étant constant,

$$\dot{x}_2 = 0. \quad (5)$$

(b) Dilatation avec aspiration. Cette phase se définit par les conditions

$$u_2 \leq 0 \quad \text{et} \quad x_1 \leq p_a \quad (b)$$

1) Le clapet d'aspiration est maintenant ouvert. Comme la chute de pression à travers ce clapet est supposée négligeable, on a $x_1 = p_i = p_a = c^{te}$ d'où

$$\dot{x}_1 = 0. \quad (6)$$

2) Comme $p_i = c^{te}$ et $p_i \cdot v^\kappa = c^{te}$, le volume molaire v est constant. En dérivant les logarithmes des deux membres de l'égalité (2), on obtient :

$$\frac{\dot{n}}{n} = \frac{-\dot{u}_1}{L - u_1} \quad \text{ou} \quad \dot{x}_2 = -\frac{u_2 \cdot x_2}{L - u_1} \quad (7)$$

(c) Compression sans refoulement. Cette phase se définit par les conditions

$$u_2 > 0 \quad \text{et} \quad x_1 < p_r \quad (c)$$

et les dérivées des variables d'état ont les mêmes expressions que dans le cas (a).

(d) Compression avec refoulement. Cette phase se définit par les conditions

$$u_2 \geq 0 \quad \text{et} \quad x_1 \geq p_r \quad (d)$$

et les dérivées des variables d'état ont les mêmes expressions que dans le cas (b).

Pour terminer, la sortie y , qui est le débit d'air refoulé par le compresseur en moles par seconde, est nulle sauf durant la dernière phase où elle est égale à l'opposé de \dot{n} dont l'expression est donnée par (7). Les équations d'état du compresseur sont donc les suivantes :

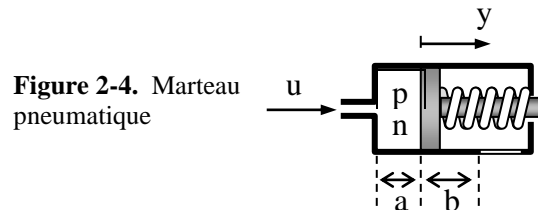
$$\dot{x}_1 = \begin{cases} \kappa \frac{x_1 u_2}{L - u_1} & \text{si } \begin{cases} u_2 \leq 0 \text{ et } x_1 > p_a \\ \text{ou} \\ u_2 \geq 0 \text{ et } x_1 < p_r \end{cases} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (8)$$

$$\dot{x}_2 = \begin{cases} -\frac{x_2 u_2}{L - u_1} & \text{si } \begin{cases} u_2 \leq 0 \text{ et } x_1 \leq p_a \\ \text{ou} \\ u_2 \geq 0 \text{ et } x_1 \geq p_r \end{cases} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (9)$$

$$y = \begin{cases} \frac{x_2 u_2}{L - u_1} & \text{si } u_2 \geq 0 \text{ et } x_1 \geq p_r \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (10)$$

EXERCICE 2-2

L'entrée du *marteau pneumatique* représenté par la figure 2-4 est le débit d'alimentation u et sa sortie est le déplacement y du piston. L'origine de y correspond à la position où le ressort est au repos (ni comprimé, ni tendu) et la distance entre cette position du piston et l'extrémité gauche du cylindre est a .



Quand le piston se déplace vers la droite d'une distance $y > b$, l'air comprimé s'échappe d'une fente dans l'atmosphère avec un débit molaire q à la fois proportionnel à la différence de pression et à la longueur de la fente : $q = \beta \cdot (p - p_a) \cdot (y - b)$. La pression dans le compartiment du ressort est toujours égale à la pression atmosphérique p_a , l'exposant polytropique de l'air dans le cylindre est κ et la rigidité du ressort est k (la force nécessaire

pour déformer le ressort d'une longueur d est $f = k \cdot d$). Définir des variables d'état pour ce système et écrire leurs équations.

Réponse possible :

$$\begin{aligned} x_1 &= y, \quad x_2 = \dot{y}, \quad x_3 = n, \quad x_4 = p - p_a. \\ \dot{x}_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 = -\left(\frac{k}{m}\right) \cdot x_1 + \left(\frac{S}{m}\right) \cdot x_4, \\ \dot{x}_3 &= \begin{cases} u & \text{si } x_1 < b \\ -\beta \cdot x_4 \cdot (x_1 - b) + u & \text{si } x_1 \geq b \end{cases} \\ \dot{x}_4 &= \begin{cases} -\kappa \cdot x_4 \left(\frac{x_2}{x_1 + a} - \frac{u}{x_3} \right) & \text{si } x_1 < b \\ -\kappa \cdot x_4 \left(\frac{x_2}{x_1 + a} + \frac{\beta \cdot x_4 \cdot (x_1 - b) - u}{x_3} \right) & \text{si } x_1 \geq b. \end{cases} \end{aligned}$$

Systèmes à paramètres variables. En examinant les équations des exemples précédents, on constate que la dérivée \dot{x} de l'état et la réponse y ne dépendent que de l'état x et de l'entrée u et ne dépendent pas explicitement du temps. En d'autres termes, pour deux instants distincts t_1 et t_2 ,

$$\begin{aligned} [x(t_1) = x(t_2) \text{ et } u(t_1) = u(t_2)] \\ \Rightarrow [\dot{x}(t_1) = \dot{x}(t_2) \text{ et } y(t_1) = y(t_2)]. \end{aligned} \quad (2-1)$$

Si l'implication (2-1) est vraie quels que soient les instants t_1 et t_2 on dit que le système est *invariant* et il est *variant* dans le cas contraire. Un système est variant lorsque certains paramètres intervenant dans ses équations se modifient au cours du temps.

Exemple 2-5

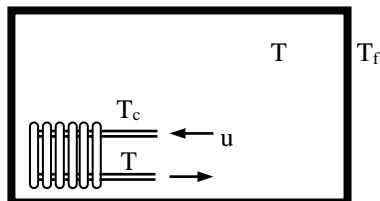


Figure 2-5. Chauffage d'un local

La figure 2-5 représente un magasin de stockage chauffé par un radiateur alimenté en eau chaude dont la température T_c est constante. Le nombre des sections de ce radiateur est suffisant pour que la température de l'eau à sa sortie soit presque égale à la température T du local. On désigne par $T_f(t)$ la température extérieure moyenne en un instant t de l'année, par c_e (J/Kg.deg) la chaleur spécifique de l'eau, par k (J/m².deg) le facteur de dissipation moyen de la chaleur à travers les parois du local dont la surface est S (m²). Enfin, la masse

calorifique du magasin dépend de la quantité stockée au moment considéré et on suppose que sa moyenne en un instant t de l'année est $M(t)$ (J/deg).

L'humidité n'étant pas considérée dans cet exemple, la seule grandeur qui décrit l'état x de l'air dans le local est sa température T puisque son volume est constant et sa pression est toujours égale à la pression atmosphérique. La variation de cet état provient de la variation de la quantité de chaleur emmagasinée dans le local. Or, pour un laps de temps dt où la température T varie de dT , le bilan thermique

$$\begin{aligned} \text{chaleur emmagasinée} \\ = \text{chaleur fournie} - \text{chaleur perdue} \end{aligned}$$

s'écrit

$$M(t) \cdot dT = c_e \cdot (T_c - T) \cdot q \cdot dt - k \cdot S \cdot [T - T_f(t)] \cdot dt, \quad (1)$$

q étant le débit d'eau chaude traversant le radiateur. Ce débit est le moyen d'action u sur le système, la température T est à la fois sa sortie y et son état x . En divisant les deux membres de l'équation (1) par $M(t) \cdot dt$ et en arrangeant les termes, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{M(t)} [- (k \cdot S) \cdot x - c_e \cdot x \cdot u \\ &\quad + (c_e \cdot T_c) \cdot u + (k \cdot S) \cdot T_f(t)], \end{aligned} \quad (2)$$

$$y = x.$$

Comme les paramètres $M(t)$ et $T_f(t)$ dépendent du temps, le système considéré est variant.

A noter qu'en réalité la masse calorifique et la température externe varient d'une manière aléatoire et que $M(t)$ et $T_f(t)$ ne sont que leurs moyennes (espérances mathématiques) en un instant t de l'année. Pour tenir compte de cette imprécision, on ajoute parfois aux équations du modèle (2) des fonctions aléatoires $d_x(t)$ et $d_y(t)$ représentant l'effet inconnu sur l'état x et la sortie y des fluctuations des paramètres autour de leurs valeurs moyennes.

EXERCICE 2-3

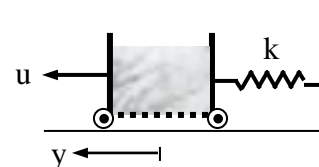


Figure 2-6. Chariot de masse variable et un ressort

Un chariot, attaché à un ressort de rigidité k et soumis à une force u , transporte un bloc de glace. Initialement, la masse de l'ensemble est m_0 mais la glace fond à raison de q kg par sec et l'eau de la fonte est drainée vers l'extérieur à travers une grille. La sortie du système est le déplacement y du chariot par rapport à sa position où le ressort est au repos. Montrer qu'il s'agit d'un système invariant si $q = c^{te}$, variant dans le cas contraire

Les systèmes variants sont plus difficiles à analyser que les systèmes invariants. Pour cette raison, un système variant est souvent remplacé par plusieurs systèmes invariants, chacun correspondant à un intervalle de temps où les paramètres s'écartent peu de leurs moyennes dans cet intervalle.

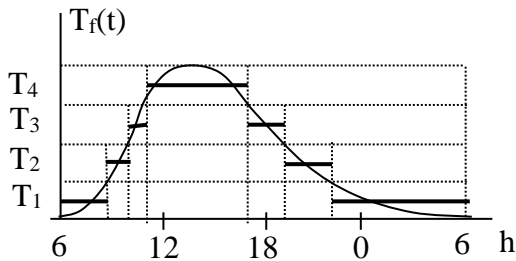


Figure 2-7. Variation de la température extérieure en un jour donné.

Considérons de nouveau le chauffage de l'exemple 5 et supposons que la quantité stockée varie lentement durant l'année de sorte que durant un jour donné la masse calorifique du magasin est pratiquement une constante M . Admettons en plus que durant ce jour la température extérieure $T_f(t)$ varie en moyenne selon la courbe continue représentée à la figure 2-7.

En subdivisant l'intervalle de variation de $T_f(t)$ en 4 parties égales de moyennes T_1, T_2, T_3 et T_4 , on peut approximer les équations d'état variantes (2) du chauffage par les 4 systèmes d'équations invariantes suivantes :

$$\dot{x} = \frac{1}{M} [-(k.S).x - c_e.x.u + (c_e.T_c).u + (k.S).T_i] ,$$

$$y = x. \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

D'après la figure 2-7, on donne à T_i la valeur T_1 entre 22 h et 9 h, la valeur T_2 entre 9 h et 10 h et entre 19 h et 22 h, la valeur T_3 entre 10 h et 11 h et entre 17 h et 19 h et enfin la valeur T_4 entre 11 h et 17 h. Ces valeurs de T_i et la valeur de M sont

relatives à un jour particulier de l'année. Pour un autre jour, ces valeurs peuvent se modifier.

Formes générales des équations d'état. Pour un système invariant à p entrées, u_1, \dots, u_p , q sorties, y_1, \dots, y_q , et n variables d'état, x_1, \dots, x_n , il existe $n + q$ fonctions f_i et g_j , $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, q$, telles que, en tout instant t ,

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \quad i = 1, \dots, n, \quad (2-2)$$

$$y_j = g_j(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \quad j = 1, \dots, q. \quad (2-3)$$

En désignant comme ci-dessus par u , y et x les vecteurs $[u_1 ; \dots ; u_p]$, $[y_1 ; \dots ; y_q]$ et $[x_1 ; \dots ; x_n]$, les $n + q$ équations (2-2) et (2-3) s'écrivent sous la forme compacte

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (2-4)$$

$$y = g(x, u), \quad (2-5)$$

f et g étant des fonctions de \mathcal{R}^{n+p} respectivement dans \mathcal{R}^n et \mathcal{R}^q .

Pour un système variant, on remplace dans (2-4) et (2-5) f et g par f_t et g_t pour indiquer que ces fonctions correspondent à un instant t donné ou on ajoute aux arguments x et u l'argument t pour dire que \dot{x} et y dépendent non seulement de x et u mais aussi de l'instant t considéré. Les équations d'état d'un système variant sont donc de la forme :

$$\dot{x} = f_t(x, u) = f(t, x, u), \quad (2-6)$$

$$y = g_t(x, u) = g(t, x, u). \quad (2-7)$$

Généralement, en modélisant analytiquement un système, les paramètres aléatoires sont remplacés par leurs valeurs moyennes (voir exemple 5). Pour tenir compte de cette imprécision, on ajoute à la dérivée de l'état et à la sortie des fonctions aléatoires $d_x(t)$ et $d_y(t)$ appelées *perturbations*. Dans ce cas, on écrit :

$$\dot{x} = f_t(x, u) + d_x(t), \quad (2-8)$$

$$y = g_t(x, u) + d_y(t). \quad (2-9)$$

Cette dernière forme sera considérée quand on étudiera les effets des perturbations éventuelles sur le fonctionnement du système. Pour le moment, nous allons négliger les perturbations pour se

concentrer à l'analyse du *fonctionnement moyen* défini par les équations (2-6) et (2-7).

Pour donner un autre exemple sur les équations d'état, nous allons modéliser le mouvement d'un solide dans l'espace (voiture, avion, gyroscope, toupie, ...). Avant de le faire, il convient de rappeler comment peut-on définir l'orientation de ce solide.

Angles d'Euler. Considérons un repère $R = (G, i, j, k)$ lié à un solide et translatons ce dernier de sorte à confondre G avec l'origine O d'un repère inertiel $R_o = (O, i_o, j_o, k_o)$.

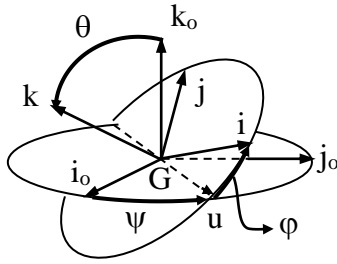


Figure 2-8. Angles d'Euler

L'orientation du solide par rapport à R_o peut être défini par les angles d'Euler ψ , ϕ et θ représentés sur la figure 2-8 où u est le vecteur unitaire porté par la droite d'intersection des deux plans (i_o, j_o) et (i, j) . Le repère R s'obtient à partir de R_o en tournant ce dernier successivement de ψ autour de k_o , de θ autour de u et de ϕ autour de k . La vitesse angulaire ω de R par rapport à R_o est donc le vecteur

$$\omega = \dot{\psi}.k_o + \dot{\theta}.u + \dot{\phi}.k. \quad (2-10)$$

Pour écrire le vecteur ω dans le repère $R = (G, i, j, k)$, exprimons les vecteurs k_o et u dans R en les projetant sur i, j et k . D'après la figure 2-8, on a :

$$k_o = \sin\theta.\sin\phi.i + \sin\theta.\cos\phi.j + \cos\theta.k, \quad (2-11)$$

$$u = \cos\phi.i - \sin\phi.j. \quad (2-12)$$

En remplaçant dans (2-10) k_o et u par leurs expressions (2-11) et (2-12), on trouve :

$$\omega = (\dot{\psi}.\sin\theta.\sin\phi + \dot{\theta}.\cos\phi).i + (\dot{\psi}.\sin\theta.\cos\phi - \dot{\theta}.\sin\phi).j + (\dot{\psi}.\cos\theta + \dot{\phi}).k. \quad (2-13)$$

Mouvement d'un solide. Considérons un repère $R = (G, i, j, k)$ lié au solide S en son centre de gravité G . En posant f la résultante des forces appliquées à S , τ le moment résultant de ces forces en G , v la vitesse de G , ω la vitesse de rotation de S , m sa masse et J son tenseur d'inertie par rapport à R , on a :

$$f = \frac{d(m.v)}{dt} = \frac{dp}{dt} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{d(J.\omega)}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} \quad (2-14)$$

$$\text{où} \quad J = \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{pmatrix}.$$

Dans ces formules, $p = m.v$ désigne la *quantité de mouvement* de S et $\sigma = J.\omega$ son *moment cinétique* en G . Rappelons que si (x, y, z) sont les coordonnées d'un point de S dans le repère R , les moments d'inertie I_x, I_y, I_z et les produits d'inertie I_{xy}, I_{xz}, I_{zy} sont définis par :

$$I_x = \int_S (y^2 + z^2).\delta m, \quad I_{yz} = I_{zy} = \int_S yz.\delta m.$$

$$I_y = \int_S (z^2 + x^2).\delta m, \quad I_{xz} = I_{zx} = \int_S xz.\delta m.$$

$$I_z = \int_S (x^2 + y^2).\delta m, \quad I_{xy} = I_{yx} = \int_S xy.\delta m.$$

Considérons un vecteur variable h . En posant h_x, h_y, h_z les composantes de ce vecteur dans un repère R lié au solide, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d(h)}{dt} &= \frac{d}{dt} (h_x.i + h_y.j + h_z.k) \\ &= \dot{h}_x.i + \dot{h}_y.j + \dot{h}_z.k \\ &\quad + h_x.\frac{di}{dt} + h_y.\frac{dj}{dt} + h_z.\frac{dk}{dt} \end{aligned} \quad (2-17)$$

puisque les vecteurs i, j, k sont variables. Comme la dérivée d'un vecteur g de longueur constante tournant avec une vitesse angulaire ω est $\omega \wedge g$, l'équation (2-17) s'écrit :

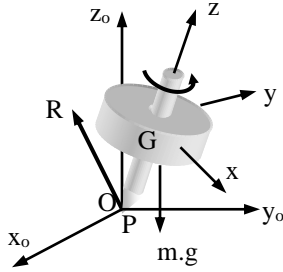
$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{h}} &= \dot{h}_x \mathbf{i} + \dot{h}_y \mathbf{j} + \dot{h}_z \mathbf{k} \\ &+ \omega \wedge (h_x \mathbf{i} + h_y \mathbf{j} + h_z \mathbf{k}) \\ &= \dot{\mathbf{h}}_c + \omega \wedge \mathbf{h}.\end{aligned}\quad (2-18)$$

La vitesse de \mathbf{h} est donc égale à la somme de sa vitesse $\dot{\mathbf{h}}_c$ par rapport au repère \mathbf{R} et de sa vitesse $\omega \wedge \mathbf{h}$ due à la rotation de \mathbf{R} . En appliquant la formule (2-18) à $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ et $\boldsymbol{\sigma} = J\boldsymbol{\omega}$ et en remarquant que $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_c$ car $\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\omega} = 0$, les relations (2-14) s'écrivent dans le repère \mathbf{R} sous la forme :

$$\begin{aligned}\mathbf{f} &= m\dot{\mathbf{v}}_c + \omega \wedge (m\mathbf{v}), \\ \boldsymbol{\tau} &= J\dot{\boldsymbol{\omega}} + \omega \wedge (J\boldsymbol{\omega}).\end{aligned}\quad (2-19)$$

Exemple 2-6

Figure 2-9. Toupie



Considérons une toupie de masse m et de tenseur d'inertie J représentée à la figure 2-9. Si le pivot P de cette toupie reste fixe, son état se caractérise par son orientation qui se définit par les angles d'Euler (θ, ψ, φ) et par sa vitesse de rotation $\boldsymbol{\omega}$. D'abord, de la relation (2-13) entre la vitesse angulaire et les angles d'Euler on tire :

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \omega_x \cos \varphi - \omega_y \sin \varphi, \\ \dot{\psi} &= (\omega_x \sin \varphi + \omega_y \cos \varphi) / \sin \theta, \\ \dot{\varphi} &= \omega_z - (\omega_x \sin \varphi + \omega_y \cos \varphi) / \tan \theta,\end{aligned}\quad (1)$$

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$ étant les composantes de $\boldsymbol{\omega}$ dans le repère $(G, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ lié à la toupie tel que le vecteur unitaire \mathbf{k} de ce repère est porté par \overline{PG} . Les équations de $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ s'obtiennent à partir des relations (2-19) de la dynamique du solide. Or, en négligeant le frottement de l'air et du sol, la toupie n'est soumise qu'à son poids $-mg\mathbf{k}_o$ et à la force de réaction \mathbf{R} du plan horizontal (x_o, y_o) . D'où

$$\mathbf{f} = \mathbf{R} - mg\mathbf{k}_o = m\dot{\mathbf{v}}_c + \omega \wedge (m\mathbf{v}) \quad (2)$$

$$\text{et } \boldsymbol{\tau} = \mathbf{R} \wedge \overline{PG} = J\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge (J\boldsymbol{\omega}). \quad (3)$$

En tirant de (2) l'expression de \mathbf{R} et en remplaçant \overline{PG} par $h\mathbf{k}$, h étant la distance entre P et G , l'équation (3) devient :

$$\begin{aligned}m(g\mathbf{k}_o + \dot{\mathbf{v}}_c + \omega \wedge \mathbf{v}) \wedge (h\mathbf{k}) \\ = J\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge (J\boldsymbol{\omega}).\end{aligned}\quad (4)$$

Pour obtenir les expressions des dérivées des variables d'état $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, nous décomposons chaque terme de l'équation vectorielle (4) en ses composantes selon \mathbf{i}, \mathbf{j} et \mathbf{k} . Or, comme la distance h est constante, on a :

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \wedge (h\mathbf{k}) = h\omega_y \mathbf{i} - h\omega_x \mathbf{j}. \quad (5)$$

D'où

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{v}}_c &= h(\dot{\omega}_y \mathbf{i} - \dot{\omega}_x \mathbf{j}) \\ \Rightarrow m\dot{\mathbf{v}}_c \wedge (h\mathbf{k}) &= -mh^2(\dot{\omega}_x \mathbf{i} + \dot{\omega}_y \mathbf{j}), \\ \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v} &= h[\omega_z \omega_x \mathbf{i} + \omega_z \omega_y \mathbf{j} - (\omega_x^2 + \omega_y^2)\mathbf{k}] \\ \Rightarrow m(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}) \wedge (h\mathbf{k}) &= mh^2(\omega_z \omega_y \mathbf{i} - \omega_z \omega_x \mathbf{j})\end{aligned}$$

et, d'après (2-11),

$$mg\mathbf{k}_o \wedge (h\mathbf{k}) = mgh(\sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} - \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j}).$$

D'autre part, comme la toupie est symétrique par rapport aux plans xGz et yGz , ses produits d'inertie sont nuls et $I_x = I_y = I$. Par conséquent,

$$J\boldsymbol{\omega} = I\omega_x \mathbf{i} + I\omega_y \mathbf{j} + I_z \omega_z \mathbf{k}$$

et

$$\begin{aligned}J\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge (J\boldsymbol{\omega}) &= [I\dot{\omega}_x + (I_z - I)\omega_y \omega_z] \mathbf{i} \\ &+ [I\dot{\omega}_y - (I_z - I)\omega_x \omega_z] \mathbf{j} + I_z \dot{\omega}_z \mathbf{k}.\end{aligned}$$

En remplaçant les expressions précédentes dans (4) et en comparant les composantes selon $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ des deux membres on obtient les équations suivantes

$$\begin{aligned}(mh^2 + I)\dot{\omega}_x &= (mh^2 + I - I_z)\omega_z \omega_y \\ &+ mgh \sin \theta \cos \varphi,\end{aligned}\quad (6a)$$

$$(m.h^2 + I).\dot{\omega}_y = -(m.h^2 + I - I_z).\omega_z \omega_x - mgh \sin \theta \sin \varphi, \quad (6b)$$

$$I_z \dot{\omega}_z = 0. \quad (6c)$$

L'équation (6c) montre que ω_z est toujours égale à sa valeur initiale ω_{z0} et les 6 équations d'état de la toupie sont données par (1) et (6).

Nous donnons au prochain paragraphe la technique de résolution numérique des équations d'état. En appliquant cette technique à celles de la toupie, on obtient en tout instant son orientation (θ, ψ, φ) et ses vitesses angulaires ω_x, ω_y et ω_z . Ayant ces fonctions, on déduit de l'équation (5) la vitesse v du centre de gravité G et de (2) ou (3) la réaction R du sol.

EXERCICE 2-4

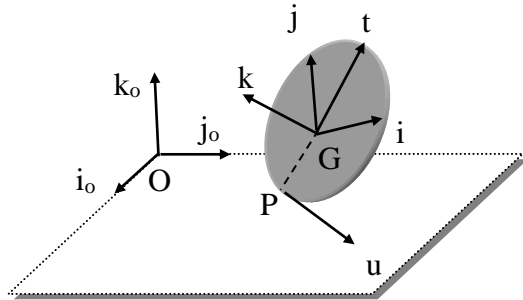


Figure 2-10. Disque roulant sur un plan.

Un disque fin, de centre de gravité G , de rayon r et de masse ρ par unité de surface, roule sur un plan horizontal (i_0, j_0) sans glissement (la vitesse instantanée du point de contact P est nulle). On considère le repère $R_1 = (G, u, t, k)$ où u est porté par la droite d'intersection du plan du disque avec l'horizontal, k est perpendiculaire au disque et t complète le trièdre. On définit l'état du disque par les angles d'Euler ψ, θ, φ du repère $R = (G, i, j, k)$ lié au disque et par les composantes ω_u, ω_t et ω_k de sa vitesse de rotation ω dans le repère R_1 . Déterminer les équations de cet état.

Réponse : $\dot{\theta} = \omega_u, \quad \dot{\psi} = \frac{\omega_t}{\sin \theta}, \quad \dot{\varphi} = \omega_k - \omega_t \cotg \theta,$

$$(I_z + mr^2)\dot{\omega}_k = mr^2\omega_t\omega_u,$$

$$I\dot{\omega}_t = I_z\omega_k\omega_u - I\omega_t\omega_u \cotg \theta,$$

$$(I + mr^2)\dot{\omega}_u = -(I_z + mr^2)\omega_k\omega_t + I\omega_t^2 \cotg \theta - mgr \cos \theta.$$

2-2. RÉOLUTION NUMERIQUE DES ÉQUATIONS D'ÉTAT

La détermination de la réponse $y(t)$ d'un système, suite à une entrée connue $u(t)$, commence par la résolution de l'équation différentielle de premier ordre (2-4) connaissant l'état initial x_0 . Une fois l'état $x(t)$ est déterminé en tout instant t , la réponse $y(t)$ s'obtient en remplaçant dans (2-5) x par sa valeur en cet instant. Nous donnerons dans un autre chapitre une méthode analytique pour résoudre l'équation $\dot{x} = f(x, u)$ quand la fonction f est linéaire. Cependant, si f est non linéaire il n'existe pas une méthode analytique générale qui s'applique à toute forme de f . Par contre, la résolution numérique est toujours possible et nous allons montrer dans le présent paragraphe comment obtenir numériquement la solution des équations d'état à l'aide du logiciel MATLAB.

Matlab - notions de base. Le logiciel Matlab est accompagné d'une documentation détaillée dans laquelle on trouve des explications suffisantes pour apprendre à utiliser les instructions dont on a besoin. Dans ce texte, au fur et à mesure de son avancement, nous donnerons à travers des exemples les instructions les plus employées en modélisation et en automatique. Les remarques suivantes aident à démarrer avec Matlab.

1) Les instructions de Matlab s'écrivent sur la *fenêtre de commande*, « *command window* », ou sur l'*éditeur de programmes*, « *editor* ». La fenêtre de commande apparaît quand Matlab est mis en marche et l'éditeur de programmes s'ouvre en poussant à l'aide de la souris un bouton appelé « *New* » et en choisissant dans le menu « *function* » ou « *script* ».

- Une instruction écrite sur la fenêtre de commande s'exécute directement dès le passage à une nouvelle ligne (en poussant sur la touche Enter). Si une instruction est suivie d'un point-virgule, elle est aussi exécutée mais son résultat ne s'affiche pas sur l'écran.
- Une ou plusieurs instructions écrites sur l'éditeur de programmes et sauvegardées sous un certain nom constituent un fichier d'un type appelé *M-file*.

- Si la première ligne d'un M-file est de la forme « fonction V = Nf(A) », il définit une fonction de nom Nf qui associe à un ensemble A d'arguments un ensemble V de valeurs. Dans ce cas le M-file est sauvegardé sous le même nom que celui de la fonction.
- Si la première ligne ne commence pas par « fonction », le M-file est un programme appelé *manuscrit*, « *script* », dont les instructions s'exécutent successivement quand on tape le nom de ce fichier sur la fenêtre de commande.

2) Matlab manipule seulement des matrices généralisées, appelées *étalages* (*arrays*), sur lesquelles on peut appliquer, non seulement les opérations de l'algèbre linéaire, mais aussi les opérations élément à élément arithmétiques ou logiques. La manière directe pour définir une matrice consiste à écrire ses éléments entre crochets en séparant deux éléments successifs d'une ligne par un blanc ou une virgule et 2 lignes successives par un point-virgule ou par passage à une nouvelle ligne.

Exemple 2-7

Définissons sur la fenêtre de commande deux matrices A et B.

```
>> A = [1 0 2 ; 0 2 -1] , B = [-2 2 0 ; 0 1 0] ;
```

```
A =
1   0   2
0   2  -1
```

On sépare deux instructions sur une même ligne par une virgule ou un point-virgule. Le résultat d'une instruction suivie d'un point-virgule ne s'affiche pas.

Opérations algébriques (celles de l'algèbre linéaire).

B' étant la transposée de B (définie ci-dessus), déterminons l'inverse D de la matrice $C = A \cdot B'$ et vérifions que $C \cdot D$ est égale à la matrice unitaire.

```
>> C = A*B' , D = inv(C) , I = C*D
```

```
C =          D =          I =
-2   0    -0.5000    0         1   0
 4   2     1.0000   0.5000    0   1
```

" * " est la multiplication algébrique, B' est la transposée de B et « inv » inverse son argument (la matrice C dans l'exemple).

Opérations arithmétiques élément à élément.

Ces opérations ne s'appliquent pas sur les matrices en tant que telles mais sur leurs éléments. Formons par exemple la matrice E dont les éléments e_{ij} sont égaux à $(a_{ij} \cdot b_{ij})^2 / (a_{ij} + b_{ij} - 1)$, a_{ij} et b_{ij} étant les éléments de A et de B.

```
>> E = ((A .* B) .^ 2) ./ (A + B - 1)
```

```
E =
-2   0   0
 0   2   0
```

La multiplication, la division et la puissance sont précédées par un point pour les distinguer des opérateurs algébriques. Ajouter un nombre constant (-1 dans l'exemple) à une matrice revient à l'ajouter à chaque élément de cette matrice.

Opérations logiques.

Ces opérations sont aussi élément à élément mais leur ensemble de valeurs n'est que {0, 1}. Déterminons la matrice F, G et H dont les éléments f_{ij} , g_{ij} et h_{ij} sont définis par

$(f_{ij} = 1) \Leftrightarrow (a_{ij} \geq b_{ij})$,

$(g_{ij} = 1) \Leftrightarrow (a_{ij} \neq 0 \text{ et } b_{ij} \neq 0)$,

$(h_{ij} = 0) \Leftrightarrow (a_{ij} = 0 \text{ et } b_{ij} = 0)$.

```
>> F = A >= B , G = A & B , H = A | B
```

```
F =          G =          H =
1   0   1     1   0   0     1   1   1
1   1   0     0   1   0     0   1   1
```

Pour Matlab, tout nombre différent de 0 est un 1 logique ; seul 0 est un 0 logique. '&' et '|' sont donc respectivement les opérateurs logiques ET et OU.

Extraction et modification d'une sous matrice.

« $N = M(\text{ln}, \text{cl})$ » signifie que l'élément $N(i, j)$ de la matrice N est égal à l'élément $M[\text{ln}(i), \text{cl}(j)]$ de M où $\text{ln}(i)$ est la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur ln et $\text{cl}(j)$ est la $j^{\text{ème}}$ composante du vecteur cl. L'instruction « $M(\text{ln}, \text{cl}) = P$ » remplace dans M les éléments de sa sous matrice $M(\text{ln}, \text{cl})$ par ceux de la matrice P.

```
>> M = [2 0 -1 1; -1 3 2 -3; 0 -2 4 1; 4 0 1 -2];
>> N = M([1,3], 2 : 4)
>> M([1,3], 2 : 4) = [0 0 0; 1 1 1]
```

```
N =          M =
    0   -1    1         2    0    0    0
   -2    4    1        -1    3    2   -3
                   0    1    1    1
                   4    0    1   -2
```

"m : n" est le vecteur ligne : [m, m+1, ..., n].
D'une manière plus générale, 'a : p : b' est le vecteur ligne : [a, a+p, a+2.p, ..., b].

3) Pour faciliter son emploi, Matlab est préalablement muni d'une longue liste de fonctions (sin(X), exp(X),...) et de programmes (calcul différentiel et intégral, résolution des équations, optimisation, ...) ainsi que de plusieurs types de représentations graphiques. L'utilisateur peut étendre Matlab en lui introduisant de nouveaux programmes et fonctions sous forme de M-files.

Exemple 2-8

Définissons sur la fenêtre de commande la fonction $y : x \rightarrow |\sin(x)|$. A noter qu'une fonction n'est pas un ensemble de valeurs mais une règle d'association.

```
>> y = inline('abs(sin(x))')
```

```
y =
  Inline function:
  y(x) = abs(sin(x))
```

Au lieu de créer un M-file pour définir la fonction y, « inline » permet de la définir directement sur la fenêtre de commande en écrivant son expression entre deux accents. « abs » est la fonction qui associe à son argument sa valeur absolue.

L'instruction « quad(f, a, b) » active un programme qui calcule l'intégral d'une fonction f entre les deux constantes a et b. Posons $h = \pi/100$ et subdivisons l'intervalle $[0, 2\pi]$ par le vecteur $x = [0, h, 2.h, \dots, 2.\pi]$. Pour associer à chaque élément x_i de x l'intégral de la fonction y entre 0 et x_i , on écrit les instructions suivantes :

```
>> h = pi/100 ; x = 0 : h : 2*pi;
>> for i = 1 : length(x)
    q(i) = quad(y, 0, x(i));
end
```

"length(x)" est le nombre des composantes du vecteur x. La boucle «for – end» produit un vecteur q dont la $i^{\text{ème}}$ composante $q(i)$ est définie à l'intérieure de cette boucle.

En dérivant la primitive Y de y on retrouve y. Or $q(i)$ est la valeur de Y au point $x(i)$ et l'instruction «dq = diff(q)» produit le vecteur dq dont la $i^{\text{ème}}$ composante est $dq(i) = q(i + 1) - q(i)$. Par conséquent, les composantes du vecteur $ya = dq/h$ sont approximativement les dérivées de Y aux points $0, h, 2h, \dots, (2.\pi - h)$.

```
>> ya = diff(q)/h;
```

A noter que $\text{length}(ya) = \text{length}(q) - 1$.

u et v étant deux vecteurs de même longueur (tous les deux lignes ou tous les deux colonnes), l'instruction «plot(u, v)» représente graphiquement les points $[u(i), v(i)]$ et les joint par des segments. Si V est une matrice formée de plusieurs vecteurs de même longueur que u, «plot(u, V)» représente sur la même figure chaque vecteur de V en fonction de u. Par exemple, pour représenter sur la même figure y et Y en fonction de x, on écrit :

```
>> plot(x, [y(x); q])
```

Les vecteurs y(x) et q sont les images de x par les fonctions y et Y.

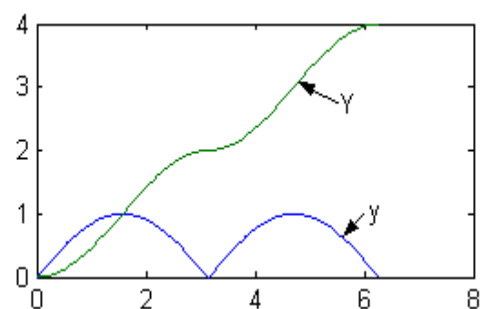


Figure 2-11. Représentation à l'aide de Matlab de la fonction $y(x) = |\sin(x)|$ et de sa primitive $Y(x)$.

Pour terminer, représentons ya pour montrer qu'il est presque égal à y(x). Comme ya n'est pas associé à $x = [0, h, \dots, 2.\pi]$ mais au vecteur $xa = [0, h, \dots, (2.\pi - h)]$, on écrit :

```
>> xa = x(1: end-1);
>> plot(xa, ya)
```

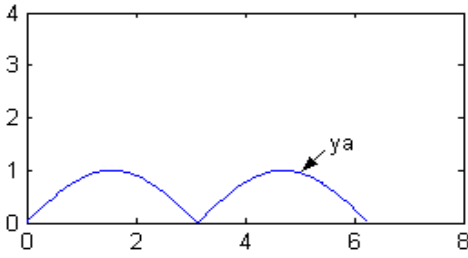


Figure 2-11' Représentation de l'approximation $y_a(x)$ de $y(x) = dY(x)/dx$.

EXERCICE 2-5

Pour commencer à utiliser Matlab, reprendre l'exemple 7 avec des nouvelles matrices A, B et M et l'exemple 8 avec une nouvelle fonction y.

Principe de la résolution numérique des équations d'état. Supposons qu'à l'instant initial t_0 l'état d'un système est x_0 et qu'on lui applique une entrée connue $u(t)$, $t \geq t_0$. Pour résoudre numériquement le système d'équations différentielles (2-6) et déduire de (2-7) la réponse y , on commence par subdiviser le temps de fonctionnement du système par des instants t_0, t_1, t_2, \dots tels que, pour tout i , $t_i - t_{i-1}$ est une constante h . Si la durée h est petite, on peut estimer la valeur de $x(t_{i+1})$ à partir de $x(t_i)$ par le développement de Taylor de $x(t)$ au voisinage de l'instant t_i jusqu'à un certain ordre n . Par exemple, pour $n = 2$, on a :

$$x(t_{i+1}) \approx x(t_i) + h \cdot \dot{x}(t_i) + \frac{h^2}{2} \cdot \ddot{x}(t_i). \quad (2-20)$$

En posant $\underline{f}(t) = f[t, x(t), u(t)]$, on a $\dot{x}(t) = \underline{f}(t)$ et

$$\begin{aligned} \dot{x}(t_i) + \frac{h}{2} \cdot \ddot{x}(t_i) &= \underline{f}(t_i) + \frac{h}{2} \cdot \left(\frac{d\underline{f}}{dt} \right)_{t_i} \\ &\approx f\left[t_i + \frac{h}{2}, x\left(t_i + \frac{h}{2}\right), u\left(t_i + \frac{h}{2}\right)\right]. \end{aligned}$$

$$\text{Comme } x\left(t_i + \frac{h}{2}\right) \approx x(t_i) + \frac{h}{2} \cdot \dot{x}(t_i),$$

on déduit de (2-20) l'approximation suivante :

$$x(t_{i+1}) \approx x(t_i) + h \cdot f\left[t_i + \frac{h}{2}, x(t_i) + \frac{h}{2} \cdot \dot{x}(t_i), u\left(t_i + \frac{h}{2}\right)\right] \quad (2-21)$$

$$\text{où } \underline{f}_i = f[t_i, x(t_i), u(t_i)] = \dot{x}(t_i). \quad (2-22)$$

Ainsi, connaissant la fonction f , l'état initial $x_0 = x(t_0)$ et les entrées $u(t_i + h/2)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, l'équation (2-21) permet d'obtenir successivement les états $x(t_1), x(t_2), x(t_3), \dots$. C'est une méthode dite de *Runge - Kutta d'ordre 2* (RK2) pour la résolution des équations différentielles. Si, au lieu de (2-20), on part d'un développement de Taylor d'ordre n quelconque, ce qui précède peut être généralisé à une méthode de type Runge-Kutta d'ordre n (RK n). Ces méthodes sont à *pas unique* c'est-à-dire qu'elles calculent x à l'instant t_{i+1} à partir des valeurs de x , de f et de u en des instants compris entre t_i et t_{i+1} et ne tiennent pas compte de leurs valeurs avant l'instant t_i .

Une autre manière pour résoudre numériquement (2-6) consiste à intégrer ces équations entre t_i et t_{i+1} , ce qui donne la relation

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f[t, x(t), u(t)] \cdot dt. \quad (2-23)$$

Une approximation de la fonction $f[t, x(t), u(t)]$ au voisinage de t_i est le polynôme $p_n(t)$ de degré $n - 1$ passant par les n points (t_{i-k}, f_{i-k}) , $k = 0, \dots, n - 1$. Ce polynôme peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} p_n(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} L_{n,k}(t) \cdot f_{i-k} \\ \text{avec } L_{n,k}(t) &= \prod_{j \neq k} \frac{(t - t_{i-j})}{(t_{i-k} - t_{i-j})}. \end{aligned} \quad (2-24)$$

En effet, comme $L_{n,k}(t_{i-k}) = 1$ et $L_{n,k}(t_{i-j}) = 0$ pour tout $j \neq k$, on a bien : $p_n(t_{i-k}) = f_{i-k}$. $L_{n,k}(t)$ est appelé le $k^{\text{ème}}$ *polynôme de Lagrange* de degré $n - 1$. En remplaçant dans (2-23) $f[t, x(t), u(t)]$ par son approximation $p_n(t)$ donnée par (2-24), on tire :

$$\begin{aligned} x(t_{i+1}) &\approx x(t_i) + \sum_{k=0}^{n-1} w_k f_{i-k} \\ \text{avec } w_k &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} L_{n,k}(t) \cdot dt. \end{aligned} \quad (2-25)$$

Cette méthode est à *pas multiple* puisqu'elle tient compte des valeurs de $f[t, x(t), u(t)]$ pour $t = t_i, t_{i-1}, \dots, t_{i-n+1}$.

Il est évident que la précision des deux méthodes précédentes dépend du choix de h et de n . Plus le pas h est petit et l'ordre n est grand, plus le résultat est précis mais ceci augmente le temps de calcul et l'accumulation des erreurs d'arrondi. Différentes techniques permettent d'évaluer à chaque pas la précision de l'estimation. Par exemple, pour la méthode de Runge-Kutta, la précision sera jugée acceptable si les estimations de $x(t_{i+1})$ par RK n et par RK $(n+1)$ sont voisines. En conservant le pas h tant que la précision est acceptable et en choisissant des pas plus petits seulement lorsque l'erreur est grande, on peut obtenir des résultats suffisamment précis en un temps raisonnable.

Se basant sur les principes précédents, plusieurs méthodes, à pas unique ou multiple, ont été élaborées par les mathématiciens pour résoudre numériquement l'équation (2-6). Certaines de ces méthodes ne sont efficaces que lorsque les variations de la solution $x(t)$ sont relativement douces. Si ces variations sont rigides, « stiff », il est conseillé d'utiliser des méthodes spécifiques plus lentes mais plus précises.

Résolution des équations d'état par Matlab.

Matlab offre plusieurs algorithmes pour résoudre les équations d'état (2-6), appelées aussi *équations différentielles ordinaires* (ode). Le plus utilisé est l'algorithme dénommé « ode45 » qui applique RK4 et RK5 à chaque pas dans le but d'évaluer la précision et de modifier éventuellement le pas h . Mais quand la solution est rigide, le « ode45 » devient lent et dans ce cas l'algorithme à pas multiple « ode15s » est souvent plus efficace. Dans son aide, « help », Matlab décrit chacun de ses algorithmes « ode » et indique les cas où il est préférable de l'utiliser.

Exemple 2-9

Les équations d'état du compresseur (fig. 2.2) sont données par (8), (9) et (10) à la fin de l'exemple 4 où les variables d'état représentent la pression interne x_1 et le nombre de moles x_2 dans la chambre de compression. La sortie est le débit molaire y de l'air refoulé par le compresseur et les entrées sont la position u_1 et la vitesse u_2 du piston. Si le vilebrequin du compresseur tourne à une vitesse constante ω , son angle de rotation à l'instant t est $\theta = \omega.t$ rad. D'après la relation (1) de l'exemple 2, la position du piston par rapport à l'axe du vilebrequin sera donnée par

$$u_1 = r \left[-\cos(\omega t) + \sqrt{(b/r)^2 - \sin^2(\omega t)} \right] \quad (1)$$

et sa vitesse par

$$u_2 = r\omega \sin(\omega t) \left[1 - \frac{\cos(\omega t)}{\sqrt{(b/r)^2 - \sin^2(\omega t)}} \right] \quad (2)$$

Supposons que les paramètres du compresseur sont les suivants :

$L = 0.32$ m, $\kappa = 1.2$, $p_a = 1$ bar ($\sim 10^5$ N/m²), $p_r = 5$ bars, $r = 0.1$ m, $b = 0.2$ m et $\omega = 2\pi$ rad/sec.

Pour résoudre les équations d'état de ce compresseur par Matlab, on commence par définir sur l'éditeur de programmes la fonction $f_u : (t, x) \rightarrow dx/dt$ qui associe à l'état x en un instant t sa dérivée dx/dt connaissant l'entrée u en cet instant. Cette fonction qui sera dénommée « compr29 » est donnée par les relations (8) et (9) de l'exemple 4. Tenant compte des valeurs des paramètres du système et des expressions (1) et (2) de ses entrées, la fonction « compr29 » se définit par le M-file suivant.

Remarque : Une phrase (ou une expression) écrite sur une ligne après le symbole « % » constitue un commentaire qui ne sert qu'à éclaircir le programme. Elle ne sera pas interprétée par Matlab comme une instruction à exécuter.

```
function xp = compr29(t, x)
```

```
%Paramètres
```

```
L = 0.32; kg = 1.2; pa = 10^5; pr = 5*10^5;  
r = 0.1; b = 0.2; w = 2*pi;
```

```
%Entrées
```

```
A = sqrt((b/r)^2 - sin(w*t)^2);  
u1 = r*(-cos(w*t) + A);  
u2 = r*w*sin(w*t)*(1-cos(w*t)/A);
```

```
%Equations d'état (xp = dx/dt)
```

```
% C1 = 0 => xp(1) = 0 et C2 = 0 => xp(2) = 0
```

```
C1 = (u2 <= 0 & x(1) > pa)|(u2 >= 0 & x(1) < pr);  
C2 = (u2 <= 0 & x(1) <= pa)|(u2 >= 0 & x(1) >= pr);
```

```
xp = [kg*x(1)*u2*C1/(L-u1);  
      -x(2)*u2*C2/(L-u1)];
```


A chaque pas, le programme «ode» qui sera employé introduira dans la fonction ci-dessus un nouveau instant t ainsi que l'estimation de l'état x en cet instant (les valeurs des arguments de compr29) et exécutera successivement les instructions de cette fonction pour déduire la valeur x_p de $f_u(t, x)$. Ayant ce vecteur, le «ode» estimera l'état x en un instant $t + h > t$ en appliquant son propre algorithme et il répètera ce qui précède jusqu'à l'instant final t_f . A noter que x_p doit être un vecteur colonne.

Le programme «ode» doit au moins connaître le nom de la fonction f_u à intégrer, l'intervalle d'intégration $[t_0, t_f]$ et l'état initial x_0 . Par exemple, pour déterminer par l'algorithme «ode45» l'évolution de l'état du compresseur entre 0 et 5 secondes sachant qu'à l'instant initial la pression dans le cylindre est $x_1(0) = 10^5 \text{ N/m}^2$ et le nombre de moles est $x_2(0) = 0.1$, on écrit sur la fenêtre de commande les instructions suivantes :

```
>> x0 = [10^5 0.1];
>> [t, x] = ode45(@compr29, [0 5], x0);
```

Au lieu de @compr29, on peut écrire le nom de la fonction entre accents : 'compr29'. Si le vecteur d'état x a n composantes, la réponse d'un programme «ode» est formée d'un vecteur colonne t dont les éléments sont successivement les instants t_i où ce «ode» a évalué x et d'une matrice x à n colonnes telle que $x(i, j)$ est la valeur de la composante x_j de x obtenue à l'instant t_i . Par exemple, pour représenter la première composante de l'état du compresseur (la pression dans le cylindre), on écrit à la suite des instructions précédentes :

```
>> plot(t, x(:, 1))
```

$x(:, 1)$ est la première colonne de la matrice x

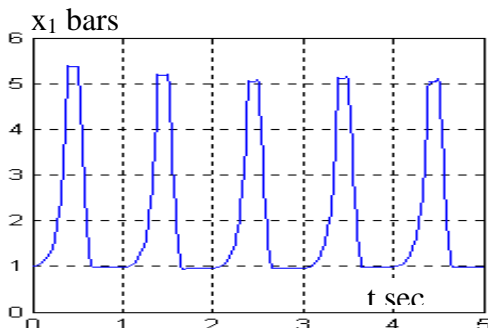


Figure 2-12. Représentation de la pression si RelTol = 10^{-3} .

Le résultat, figure 2-12, n'est pas tout à fait conforme aux hypothèses du modèle d'après lesquelles la pression dans le cylindre doit rester entre les limites $p_a = 1 \text{ bar}$ et $p_r = 5 \text{ bars}$. On corrige cette imprécision en demandant à l'«ode» d'effectuer ses calculs sur la base d'une tolérance relative (erreur relative maximum) plus faible que la valeur 10^{-3} qu'il adopte par défaut. La modification des propriétés de l'«ode» se fait à l'aide de l'instruction «odeset» (ces propriétés sont définies dans l'aide de Matlab). En particulier, pour diminuer la tolérance relative à 10^{-5} et, par conséquent, obtenir des courbes plus précises (fig. 2-13), on écrit :

```
>> option = odeset('RelTol', 1e-5);
>> [t, x] = ode45(@compr29, [0 5], x0, option);
>> plot(t, x(:,1))
>> plot(t, x(:,2))
```

$1e-5$ signifie 10^{-5} . L'état initial x_0 est déjà défini ci-dessus. «Plot(t, x)» trace les courbes de x_1 et x_2 sur la même figure mais ici il est plus clair de les séparer.

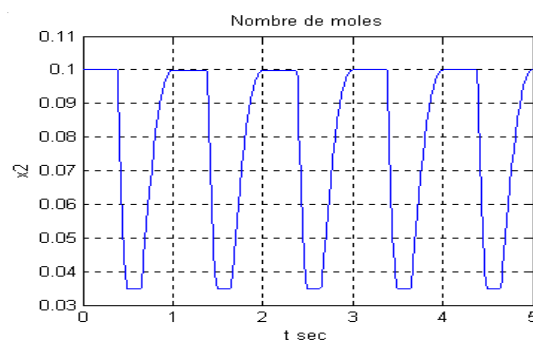
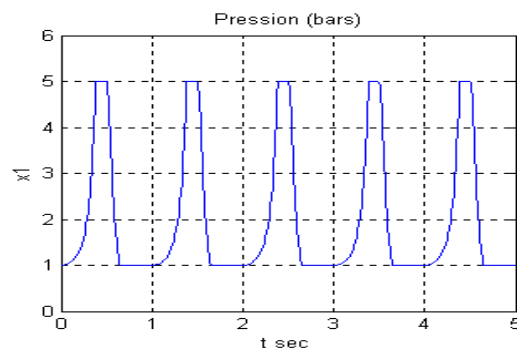


Figure 2-13 Pression et nombre de moles calculés avec une tolérance relative de 10^{-5}

Complétons cet exemple par la représentation de la sortie y du système (le débit d'air refoulé par le

compresseur) donnée par la relation (10) de l'exemple 4 (fig. 2-14). Comme y dépend des entrées u_1 et u_2 , on commence par le calcul des valeurs de ces fonctions aux instants t_i du vecteur t obtenu ci-dessus par l'«ode». A noter que les paramètres ou les variables définis dans l'éditeur (dans compr29 par exemple) ne se transmettent pas directement à la fenêtre de commande.

```
>> L = 0.32; kg = 1.2; pa = 10^5; pr = 5*10^5;
>> r = 0.1; b = 0.2; w = 2*pi;
>> A = sqrt((b/r)^2 - sin(w*t).^2);
>> u1 = r*(-cos(w*t) + A);
>> u2 = r*w*sin(w*t).*(1-cos(w*t)/A);
>> y = x(:,2).*u2.*(u2 >= 0 & x(:,1) >= pr)./(L-u1);
>> plot(t, y)
```

t est le vecteur des instants fourni par ode. Nous rappelons que les opérations élément à élément appliquées à des matrices ou vecteurs sont précédées par un point.

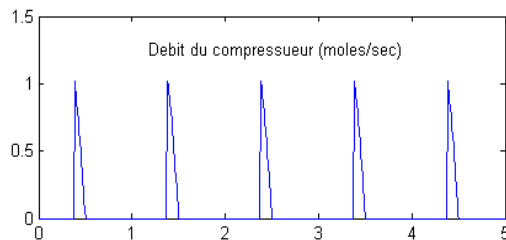


Figure 2-14. La sortie y du compresseur.

EXERCICE 2-6

Pour le marteau pneumatique de l'exercice 2-2, choisir des paramètres convenables et supposer qu'à l'instant initial le ressort et le piston sont au repos, la pression $p = p_a = 10^5$ N/m² et que le nombre de moles est $n = p_a S / R.T$ avec $T = 300$ °K et $R = 8.3$ J/(°K.mole). Pour un débit u constant, représenter à l'aide de Matlab les variables d'état de ce système sur un intervalle de temps $[0, t_f]$ où t_f est égal à plusieurs périodes du marteau.

EXERCICE 2-7

Choisir les paramètres du chariot de l'exercice 2-3 et supposer qu'à l'instant initial sa vitesse est nulle mais que le ressort est tendu d'une certaine longueur. Si à partir de cet instant le chariot est laissé se mouvoir librement ($u(t) = 0$ pour $t > 0$), vérifier à l'aide de Matlab que la fréquence de ses oscillations augmente quand sa masse diminue.

EXERCICE 2-8

- Résoudre sur Matlab les équations d'état de la toupie (exemple 6) en choisissant ses paramètres et ses conditions initiales.
- Représenter dans le repère inertiel (O, i_o, j_o, k_o) le mouvement du centre de gravité G de la toupie utilisant l'instruction « plot3(x, y, z) ».

1-2. ÉQUATIONS ENTRÉE-SORTIE

Ces équations lient directement l'entrée u et ses dérivées à la réponse y et ses dérivées sans l'intermédiaire des variables d'état.

Passage des équations d'état aux équations entrée-sortie. Considérons de nouveau les équations d'état

$$\dot{x} = f_t(x, u), \quad (2-26)$$

$$y = g_t(x, u). \quad (2-27)$$

$$x = [x_1, \dots, x_n], \quad u = [u_1, \dots, u_p] \quad y = [y_1, \dots, y_q]$$

De ces équations on peut déduire les expressions des variables d'état x_k en fonction des entrées u_i , des sorties y_j et de leurs dérivées d'ordre 1 ou plus. En remplaçant dans (2-27) les x_i par leurs expressions ainsi trouvées, on obtient q équations liant directement les entrées u_i et leurs dérivées aux sorties y_j et leurs dérivées sans l'intermédiaire des variables d'état x_k . Nous appellerons ces équations *entrée-sortie*.

Exemple 2-10

Considérons les équations d'état d'un système à une entrée u , 2 sorties y_1 et y_2 et 3 variables d'état x_1, x_2 et x_3 :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & (1) \\ \dot{x}_2 = t.x_3 & (2) \\ \dot{x}_3 = -x_3 x_1 + u & (3) \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1 = x_1 + u & (4) \\ y_2 = x_3 & (5) \end{cases}$$

Dérivons d'abord une fois chacune des équations (4) et (5). Tenant compte des équations (1), (2) et (3) on obtient :

$$\dot{y}_1 = \dot{x}_1 + \dot{u} = x_2 + \dot{u}, \quad (6)$$

$$\dot{y}_2 = \dot{x}_3 = -x_3 x_1 + u. \quad (7)$$

Ces 2 équations ne suffisent pas pour calculer les 3 inconnues x_1 , x_2 et x_3 en fonction des entrées, des sorties et de leurs dérivées. Il en faut une troisième équation qu'on peut obtenir en dérivant une deuxième fois y_1 . De l'équation (6) on tire :

$$\ddot{y}_1 = \dot{x}_2 + \ddot{u} = t.x_3 + \ddot{u}. \quad (8)$$

En résolvant les équations (6), (7) et (8) en x_1 , x_2 et x_3 , on obtient :

$$x_2 = \dot{y}_1 - \dot{u}, \quad x_3 = \frac{\ddot{y}_1 - \ddot{u}}{t}, \quad x_1 = -t. \frac{\dot{y}_2 - u}{\ddot{y}_1 - \ddot{u}}. \quad (9)$$

Il suffit maintenant de remplacer dans (4) et (5) x_1 et x_3 par leurs expressions (9) pour déduire les équations entrée-sortie suivantes :

$$(y_1 - u).(\ddot{y}_1 - \ddot{u}) + t.(\dot{y}_2 - u) = 0, \quad (10)$$

$$t.y_2 - \ddot{y}_1 + \ddot{u} = 0. \quad (11)$$

D'après (11), l'équation (10) peut aussi s'écrire sous la forme plus simple suivante :

$$(y_1 - u).y_2 + \dot{y}_2 - u = 0. \quad (10')$$

Le passage des équations d'état aux équations entrée-sortie commence donc par la détermination des expressions de x_1, \dots, x_n à partir de n équations obtenues en dérivant y_1, \dots, y_q respectivement n_1, \dots, n_q fois de sorte que la somme $n_1 + \dots + n_q$ soit égale à n . Comme l'ordre d'un système est, par définition, le nombre n de ses variables d'état, il est aussi égal à la somme $n_1 + \dots + n_q$, où n_j est l'ordre maximum de dérivation de la variable y_j apparaissant dans les équations entrée-sortie. Par exemple, l'ordre du système d'équations

$$y_1 \cdot \dot{y}_3 + \dot{y}_1^2 - u_1 = 0,$$

$$\ddot{y}_2 + y_3 \cdot \sqrt{\dot{y}_2} + \dot{u}_2 \cdot y_1 = 0,$$

$$y_1 \cdot \sin(\dot{y}_3) + u_2 = 0$$

est $n = n_1 + n_2 + n_3 = 1 + 2 + 1 = 4$.

Mise en équations entrée-sortie. Souvent, il est plus simple d'obtenir directement les équations entrée-sortie sans passer par les équations d'état surtout quand on tire profit des théorèmes de la physique. Commençons par un exemple en électricité où sera utilisé le *théorème de Thévenin*. D'après ce théorème, un circuit actif X (contenant

des sources de tension) connecté à un autre circuit Y par les bornes A et B (fig. 1-15a) est équivalent à une tension u_e en série avec une impédance Z_e (fig. 1-15b) telles que

- u_e est la tension entre A et B quand Y est déconnecté,
- Z_e est l'impédance équivalente de X quand toutes ses sources de tension sont annulées.

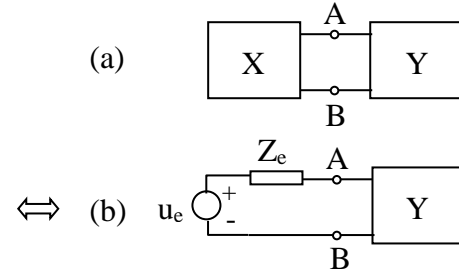


Figure 2-15. Théorème de Thévenin

Rappelons aussi qu'en désignant par « s » l'opérateur de dérivation et par « 1/s » l'opérateur d'intégration, les impédances d'une inductance L et d'une capacité C s'écrivent Ls et $1/Cs$.

Exemple 2-11

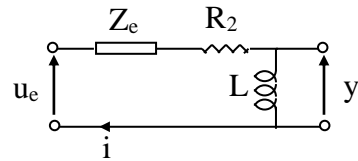


Figure 2-16. L'équivalent du circuit 2-1.

D'après le théorème de Thévenin, le circuit de la figure 2-1 est équivalent au circuit de la figure 2-16 où

$$u_e = \frac{1/Cs}{R_1 + 1/Cs} \cdot u = \frac{u}{R_1 Cs + 1}, \quad (1)$$

$$Z_e = \frac{R_1/Cs}{R_1 + 1/Cs} = \frac{R_1}{R_1 Cs + 1}.$$

On en déduit que

$$y = \frac{Ls}{Z_e + R_2 + Ls} \cdot u_e \quad (2)$$

$$= \frac{Ls \cdot u}{R_1 + R_2 + (R_2 R_1 C + L)s + L R_1 C s^2}$$

Sachant que sv signifie la dérivée de la variable v par rapport au temps, l'équation (2) est équivalente à l'équation entrée-sortie suivante :

$$LR_1 C \ddot{y} + (R_2 R_1 C + L) \dot{y} + (R_1 + R_2) y = L \ddot{u} \quad (3)$$

Le lecteur peut vérifier que cette même équation s'obtient à partir des équations d'état (1), (2), (3) de l'exemple 3.

EXERCICE 2-9

Déterminer l'équation entrée-sortie du circuit de la figure 2-3 (d'entrée u et de sortie $y = i$)

- en appliquant le théorème de Thévenin,
- à partir de ses équations d'état.

Réponse : $4 \ddot{y} + 20 \dot{y} + 23 y = 2 \ddot{u} + 2 \dot{u}$

Appliquons maintenant les équations de Lagrange à un système mécanique (voir ch1, sect. 1-6). Nous rappelons que ces équations sont de la forme :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta W_c}{\delta \dot{q}_i} \right) - \frac{\delta W_c}{\delta q_i} + \frac{\delta W_p}{\delta q_i} = e_i \quad i = 1, \dots, r \quad (2-28)$$

- q_1, \dots, q_r sont les *coordonnées généralisées* du système, c'est-à-dire l'ensemble des variables nécessaires et suffisantes pour définir en tout instant la position des éléments du système dans l'espace.
- W_c et W_p sont respectivement la somme des énergies cinétiques et la somme des énergies potentielles des éléments du système.
- e_1, \dots, e_r les efforts (forces ou couples) non-conservatifs (moteurs et dissipatifs) qui agissent sur ce système respectivement selon q_1, \dots, q_r . C'est-à-dire e_i est la résultante des efforts qui échangent de l'énergie avec l'extérieur quand seule la coordonnée q_i varie. Rappelons qu'un effort est non-conservatif si son travail ne se transforme pas en énergie potentielle.

Il suffit généralement d'appliquer (2-28) pour déduire les équations entrée-sortie d'un système mécanique à éléments interconnectés.

Exemple 2-12

Une masse m glisse le long d'une tige de masse négligeable tournant dans un plan vertical autour d'une articulation O (fig. 2-17).

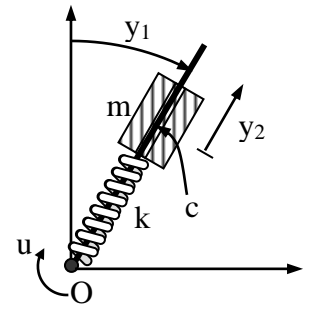


Figure 2-17. Pendule élastique

La masse est reliée à O par un ressort de rigidité k et le frottement entre la masse et la tige est visqueux (proportionnel à la vitesse) de facteur c . Quand le ressort est au repos, la distance entre O et le centre de gravité de la masse est a . L'entrée de ce système est un moment u appliqué autour de O et sa sortie est constituée de la rotation y_1 de la tige par rapport à la verticale et du déplacement y_2 de la masse par rapport à la position de repos du ressort.

Les variables y_1 et y_2 sont des coordonnées généralisées puisqu'elles définissent en tout instant la position de chaque élément du système dans l'espace. Pour appliquer les équations (2-28) de Lagrange, commençons par déterminer les expressions de l'énergie cinétique W_c et de l'énergie potentielle W_p de ce système.

Energie cinétique W_c . Elle est la somme des énergies cinétiques de translation et de rotation de la masse m . Le moment d'inertie J de m par rapport à l'axe de rotation en O étant $m \cdot (a + y_2)^2$, on a :

$$W_c = \frac{1}{2} m \dot{y}_2^2 + \frac{1}{2} m (a + y_2)^2 \dot{y}_1^2 \quad (1)$$

Energie potentielle W_p . Elle est la somme de l'énergie potentielle de la masse due à la pesanteur et celle du ressort due à sa déformation. D'où, si g est l'accélération terrestre,

$$W_p = m \cdot g \cdot (a + y_2) \cdot \cos(y_1) + \frac{1}{2} k y_2^2 \quad (2)$$

La force de la pesanteur mg et la force de rappel du ressort ky_2 sont conservatrices puisque leur travail se transforme en énergie potentielle. Les efforts non-conservatifs selon y_1 et y_2 sont respectivement le moment u ($= e_1$) et la force de frottement $-c \dot{y}_2$ ($= e_2$). C'est par l'intermédiaire de ces efforts que le système échange de l'énergie avec l'extérieur. Maintenant, tenant compte de (1) et (2), on a :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta W_c}{\delta \dot{y}_1}\right) &= \frac{d}{dt}\left(m(a+y_2)^2 \cdot \dot{y}_1\right) \\ &= 2m(a+y_2)\dot{y}_2 \cdot \dot{y}_1 + m(a+y_2)^2 \cdot \ddot{y}_1, \\ \frac{\delta W_c}{\delta y_1} &= 0, \quad \frac{\delta W_p}{\delta y_1} = -m.g.(a+y_2).\sin(y_1) \\ \text{et} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta W_c}{\delta \dot{y}_2}\right) &= m.\ddot{y}_2, \quad \frac{\delta W_c}{\delta y_2} = m.(a+y_2).\dot{y}_1^2, \\ \frac{\delta W_p}{\delta y_2} &= m.g.\cos(y_1) + k.y_2.\end{aligned}$$

En remplaçant les expressions précédentes dans (2-18) pour $q_1 = y_1$ et $q_2 = y_2$, on obtient les équations entrée-sortie suivantes :

$$\begin{aligned}m(a+y_2)^2 \cdot \ddot{y}_1 + 2.m(a+y_2)\dot{y}_2 \cdot \dot{y}_1 \\ - m.g.(a+y_2).\sin(y_1) &= u, \quad (4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{et} \quad m.\ddot{y}_2 - m.(a+y_2).\dot{y}_1^2 \\ + m.g.\cos(y_1) + k.y_2 &= -c.\dot{y}_2. \quad (5)\end{aligned}$$

Il va de soi que ces équations peuvent être déduites de les lois fondamentales de la dynamique, $\tau.d\tau = d(J\omega)$ et $f.d\tau = d(mv)$, (loi de Newton). En effet, en désignant par \vec{g} le vecteur vertical de l'accélération terrestre, le mouvement de rotation de la masse m autour de O a pour équation :

$$\begin{aligned}u + \mathcal{M}_O^I(m.\vec{g}) &= \frac{d}{dt}(J.\dot{y}_1) \Leftrightarrow \\ u + m.g.(a+y_2)\sin(y_1) &= \frac{d}{dt}[m.(a+y_2)^2 \cdot \dot{y}_1]\end{aligned}$$

d'où (4). D'autre part, en posant \vec{e}^2 le vecteur unitaire porté par la tige et par \vec{e}^1 le vecteur unitaire orthogonal à \vec{e}^2 , le mouvement de translation de m a pour équation :

$$\begin{aligned}m.\vec{g} - k.y_2.\vec{e}^2 - c.\dot{y}_2.\vec{e}^2 \\ = \frac{d}{dt}\{m.[\dot{y}_2.\vec{e}^2 + (a+y_2).\dot{y}_1.\vec{e}^1]\} \quad (6)\end{aligned}$$

Comme

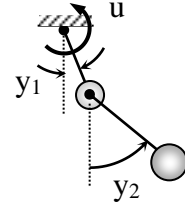
$$\frac{d\vec{e}^1}{dt} = -\dot{y}_1.\vec{e}^2 \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{e}^2}{dt} = \dot{y}_1.\vec{e}^1,$$

il est facile de vérifier que (5) est la projection de (6) sur \vec{e}^2 .

Bien que dans cet exemple les deux méthodes aient presque la même complexité, les équations de Lagrange sont plus systématiques et facilitent en général la mise en équations des systèmes comportant plusieurs éléments connectés entre eux.

EXERCICE 2-10

Figure 2-18. Double pendule



Une masse m_1 est liée à une articulation fixe par une tige inélastique de longueur a et une masse m_2 est liée à une articulation se déplaçant avec m_1 par une autre tige inélastique de longueur b . Le système est dans un plan vertical et il est soumis à l'action d'un couple u autour de l'articulation fixe et aux frottements visqueux des articulations de facteurs c_1 et c_2 . Écrire les équations de ce système d'entrée u et de sortie (y_1, y_2) en appliquant

- les équations de Lagrange,
- les lois de Newton (étudier chaque pendule à part sans oublier les forces d'action et de réaction sur les articulations).

Réponse

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2).a^2.\ddot{y}_1 \\ + m_2.a.b.[\ddot{y}_2 \cos(y_2 - y_1) - \dot{y}_2^2.\sin(y_2 - y_1)] \\ + g.(m_1 + m_2).a.\sin y_1 &= u - c_1.\dot{y}_1 \\ m_2.b^2.\ddot{y}_2 \\ + m_2.a.b.[\ddot{y}_1 \cos(y_2 - y_1) + \dot{y}_1^2.\sin(y_2 - y_1)] \\ + g.m_2.b.\sin y_2 &= -c_2.\dot{y}_2\end{aligned}$$

EXERCICE 2-11

- Déterminer les 3 équations différentielles des angles d'Euler de la toupie de l'exemple 6 en éliminant de (1) et (6) les vitesses angulaires ω_x , ω_y et ω_z .
- Retrouver ces équations en appliquant la méthode de Lagrange.

Nous établirons dans l'exemple suivant les équations entrée-sortie d'un système thermique. Rappelons que durant l'évaporation, un liquide et sa vapeur sont dits *saturés*. L'état d'un fluide saturé se caractérise par une seule variable thermique au lieu de deux. Il suffit par exemple de connaître la température T d'un fluide saturé pour déduire des

tables thermodynamiques de ce fluide sa pression P , son volume spécifique v , son énergie interne par mole u et son enthalpie par mole $h (= Pv + u)$.

Exemple 2-13

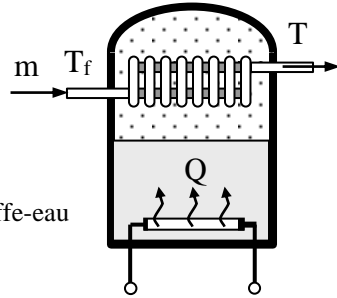


Figure 2-19. Chauffe-eau à vapeur

Un débit d'eau constant de m kg/s traversant un échangeur thermique est chauffé par la vapeur d'eau produite par une résistance électrique à l'intérieur d'un réservoir fermé (fig. 2-19). On admet qu'à l'amont de l'échangeur la température T_f de l'eau est constante et qu'à son aval elle est égale à la température de la vapeur et de l'eau dans le réservoir. Cette température $T(t)$ est la sortie du système et son entrée est la puissance calorifique $Q(t)$ dégagée par la résistance. Il s'agit d'établir la relation entre $Q(t)$ et $T(t)$.

Si la perte calorifique à travers la paroi est négligeable, comme aucun travail n'est échangé avec l'extérieur, la variation de l'énergie interne de l'ensemble eau-vapeur dans le réservoir est égal à la chaleur fournie par la résistance moins celle absorbée par l'échangeur. Soient M_e et M_v les masses de l'eau et de la vapeur dans le réservoir, u_e et u_v leurs énergies internes par kg et c_e la chaleur spécifique de l'eau qu'on peut supposer constante dans la marge des températures du système. On a :

$$\frac{d(M_e \cdot u_e + M_v \cdot u_v)}{dt} = Q - m \cdot c_e (T - T_f) \quad (1)$$

$M_e + M_v$ est une masse constante M . En posant $x = M_v/M$ la fraction de l'eau évaporée et sachant que $du_e = c_e \cdot dT$, l'équation précédente s'écrit :

$$\begin{aligned} M \frac{d}{dt} [(1-x)u_e + u_v x] = \\ M \cdot \left[(u_v - u_e) \cdot \frac{dx}{dt} + (1-x) \cdot c_e \cdot \frac{dT}{dt} + x \cdot \frac{du_v}{dt} \right] \quad (2) \\ = Q - m \cdot c_e \cdot (T - T_f) \end{aligned}$$

Or, si V est le volume du réservoir, v_{es} et v_{vs} les volumes spécifiques de l'eau et de la vapeur en saturation, on a :

$$\begin{aligned} M \cdot [(1-x) \cdot v_{es} + x \cdot v_{vs}] &= V \\ \Rightarrow x &= \frac{v_0 - v_{es}}{v_{vs} - v_{es}} \quad \text{avec } v_0 = V/M \quad (3) \end{aligned}$$

L'eau et sa vapeur étant en état de *saturation*, leurs volumes spécifiques v_{es} et v_{vs} ainsi que leurs énergies internes u_{es} et u_{vs} ne dépendent que de la température T . Le volume spécifique v_{es} de l'eau ne variant que très peu avec la température peut être considéré constant. Par conséquent,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dT} \cdot \frac{dT}{dt} = - \frac{v_0 - v_{es}}{(v_{vs} - v_{es})^2} \cdot \frac{dv_{vs}}{dT} \cdot \frac{dT}{dt}$$

et

$$\frac{du_{vs}}{dt} = \frac{du_{vs}}{dT} \cdot \frac{dT}{dt}$$

En posant

$$a = v_0 - v_{es}, \quad \Delta_v = v_{vs} - v_{es}, \quad \Delta_u = u_{vs} - u_{es},$$

$$\delta_v = \frac{dv_{vs}}{dT}, \quad \delta_u = \frac{du_{vs}}{dT}$$

et

$$\begin{aligned} \gamma(T) &= \left[1 - \frac{a}{\Delta_v(T)} \right] \cdot c_e \\ &+ \frac{a}{\Delta_v(T)} \cdot \left[\delta_u(T) - \frac{\Delta_u(T)}{\Delta_v(T)} \cdot \delta_v(T) \right], \quad (4) \end{aligned}$$

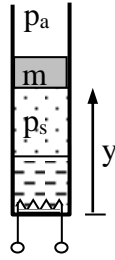
l'équation (2) se ramène à l'équation entrée-sortie suivante :

$$M \cdot \gamma(T) \cdot \frac{dT}{dt} + m \cdot c_e \cdot T = Q + m \cdot c_e \cdot T_f \quad (5)$$

$M\gamma(T)$ est la masse calorifique globale eau-vapeur. Le taux de variation de T est d'autant plus faible que $\gamma(T)$ est grand (meilleure stabilité de T). Pour associer à $\gamma(T)$ une expression mathématique simple, on commence par calculer, d'après (4), $\gamma(T_i)$ pour quelques valeurs T_i de T s'aidant des tables thermodynamiques. Ensuite, on remplace $\gamma(T)$ par un polynôme en T joignant le mieux les points $[T_i, \gamma(T_i)]$ (interpolation polynomiale). L'instruction « polyfit » de Matlab effectue cette dernière tâche.

EXERCICE 2-12

Figure 2-20.
Vapeur motrice



L'ensemble eau-vapeur de masse M , contenu dans un tube vertical de section S , muni d'un piston de masse m , est chauffé par une résistance. En négligeant le frottement du piston et la dissipation de chaleur établir l'équation liant le déplacement y du piston et la puissance calorifique Q fournie par la résistance de sorte que la pression intérieure p_s reste constante.

Résolution des équations entrée-sortie par Matlab. Soit $n_j, j = 1, \dots, q$, l'ordre maximum de dérivation de la sortie y_j apparaissant dans les équations entrée-sortie. En remplaçant dans ces équations les variables

$$y_1, \dots, y_1^{(n_1-1)}, y_2, \dots, y_2^{(n_2-1)}, \dots, y_q, \dots, y_q^{(n_q-1)}$$

respectivement par $x_1, \dots, x_n, n = n_1 + \dots + n_q$, et les entrées par leurs expressions en fonction du temps t (et éventuellement des x_k), on peut tirer les expressions des $y_j^{(n_j)} = \dot{x}_{n_1+\dots+n_j}$ en fonction des x_k et de t . Ainsi, les équations entrée-sortie se ramènent à des équations d'état de la forme :

$$\dot{x}_1 = x_2, \dots, \dot{x}_{n_1-1} = x_{n_1},$$

$$\dot{x}_{n_1} = f_1(t, x_1, \dots, x_n)$$

$$\dot{x}_{n_1+1} = x_{n_1+2}, \dots, \dot{x}_{n_1+n_2-1} = x_{n_1+n_2},$$

$$\dot{x}_{n_1+n_2} = f_2(t, x_1, \dots, x_n)$$

⋮

$$\dot{x}_{n_1+\dots+n_{(q-1)}+1} = x_{n_1+\dots+n_{(q-1)}+2}, \dots, \dot{x}_{n-1} = x_n,$$

$$\dot{x}_n = f_q(t, x_1, \dots, x_n).$$

Il suffit maintenant d'employer une instruction « ode » de Matlab pour résoudre ces équations d'état et obtenir

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_{n_1+1}, \dots, \quad y_q = x_{n_1+\dots+n_{(q-1)}+1}.$$

Exemple 2-14

Les équations entrée-sortie du pendule élastique représentée par la figure 2-17 sont les suivantes (équations (4) et (5) de l'exemple 12) :

$$\begin{aligned} m(a + y_2)^2 \ddot{y}_1 + 2m(a + y_2) \dot{y}_2 \dot{y}_1 \\ - m.g(a + y_2). \sin(y_1) = u, \\ m \ddot{y}_2 - m(a + y_2) \dot{y}_1^2 \\ + m.g \cos(y_1) + k.y_2 = -c \dot{y}_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Supposons que le couple appliqué à l'entrée est l'opposé du moment du poids de la masse m quand le ressort est au repos : $u = -m.g.a.\sin(y_1)$. Si le pendule était inélastique de longueur a , la somme des moments serait nulle et la vitesse de rotation constante. Ce n'est pas le cas pour le mouvement du pendule élastique considéré. Pour étudier ce mouvement à l'aide de Matlab, écrivons les équations (1) sous forme d'équations d'état en remplaçant y_1, \dot{y}_1 par x_1, x_2 et y_2, \dot{y}_2 par x_3, x_4 . On obtient :

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = \frac{g \sin(x_1) - 2.x_4.x_2}{(a + x_3)} - \frac{g.a \sin(x_1)}{(a + x_3)^2}, \quad (2)$$

$$\dot{x}_3 = x_4,$$

$$\dot{x}_4 = (a + x_3).x_2^2 - g \cos(x_1) - (k/m).x_3 - c.x_4.$$

Admettons que les paramètres de ce système sont les suivantes (le frottement est négligé) :

$m = 0.1 \text{ kg}$, $a = 0.2 \text{ m}$, $k = 20 \text{ N/m}$, $c = 0 \text{ N/(m/s)}$ et $g = 10 \text{ m/s}^2$.

La fonction « pendelast214 » ci-dessous incorpore à la fois la définition des équations (2), leur résolution par « ode45 » et les représentations graphiques de $x_1 = y_1$ et $x_3 = y_2$. Dans ce programme, les instructions « input » permettent d'introduire de la fenêtre de commande l'état initial x_0 et le temps d'intégration t_f . L'instruction « subplot(n, m, p) » subdivise le plan en $n.m$ figures placées dans n lignes et m colonnes et indique le numéro p de la figure à remplir par l'instruction « plot » qui suit directement « subplot ». D'autre part, si r est le reste de la division de $|a|$ par $|b|$, l'instruction « rem(a, b) » donne $\text{sign}(a).r$. Par

conséquent, $\text{rem}(y_1, 2\pi)$ permet la remise de y_1 à zéro à l'instant où la tige complète un tour.

```
function pendelast214

% État initial et instant final
x0 = input('Etat initial x0 = ');
tf = input('instant final tf = ');

% Résolution (la fonction 'f' est définie plus bas)
opt = odeset('RelTol', 1e-5);
[t, x] = ode45(@f, [0 tf], x0, opt);

% Représentation graphique (x3 en cm)
subplot(2,1,1), plot(t, rem(x(:,1),2*pi))
subplot(2,1,2), plot(t, 100*x(:,3))

% Définition de la fonction f des équations d'état
function xp = f(t,x)

% paramètres
m = 0.1; a = 0.2; k = 20; c = 0; g = 10;
% variables
x1 = x(1); x2 = x(2); x3 = x(3); x4 = x(4);

% Équations d'état
xp = [x2
      (g*sin(x1) - 2*x4*x2)/(a+x3) ...
      - g*a*sin(x1)/(a+x3)^2
      x4
      (a+x3)*(x2^2) - g*cos(x1) - (k/m)*x3 - c*x4];
```

Quand le pendule est en équilibre dans la position verticale supérieure ($x_1 = 0$), le ressort se comprime de $x_3 = -mg/k = -0.05$ m. Si, à partir de cette position, on lance le pendule avec une vitesse initiale $x_2 = \omega_0$ rd/s, son état initial serait $x_0 = [0, \omega_0, -0.05, 0]$. Pour représenter graphiquement la rotation x_1 de la tige et le déplacement x_3 de la masse durant 8 secondes, il suffit de taper sur la fenêtre de commande le nom du programme précédent puis d'introduire, à la demande de ce programme, l'état initial et le temps final. Comparons les comportements du pendule dans les deux cas : $\omega_0 = 4$ rd/s et $\omega_0 = 5$ rd/s.

```
>> pendelast214
Etat initial x0 = [0 4 -0.05 0]
Instant final tf = 8
```

```
>> pendelast214
Etat initial x0 = [0 5 -0.05 0]
Instant final tf = 8
```

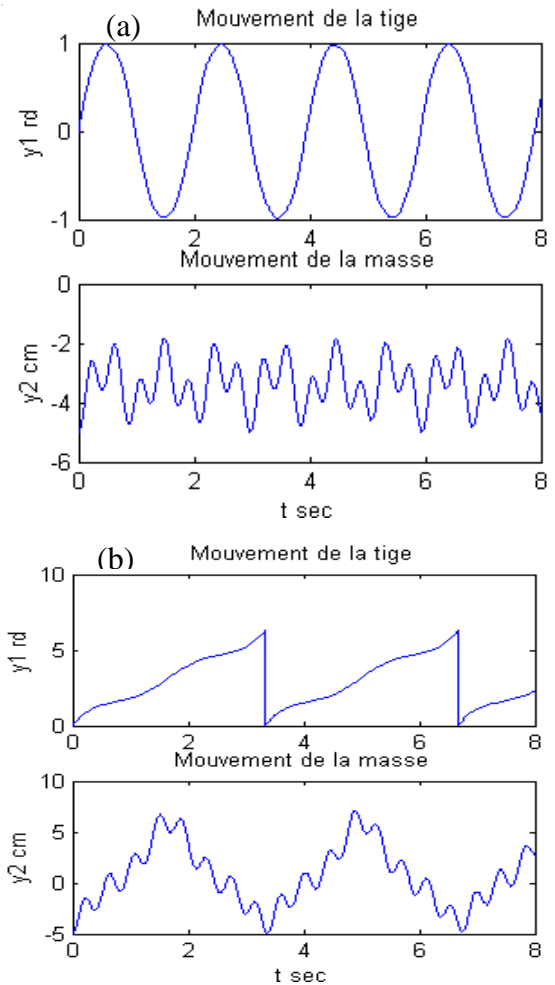


Figure 2-21. Mouvement d'une pendule élastique

Les graphes de la figure 2-21 (a) et (b) montrent que pour la vitesse initiale $\omega_0 = 4$ rd/s (ou moins), la tige oscille autour de la verticale ascendante et la masse comprime le ressort en vibrant. Pour $\omega_0 = 5$ rd/s (ou plus), la tige tourne autour de son articulation avec une vitesse variable et la masse comprime et dilate le ressort en vibrant.

EXERCICE 2-13

Refaire l'exemple 14 précédent dans le cas où le couple appliqué à l'entrée est nul et que le facteur de frottement est $c = 10$ N/(m/s).

EXERCICE 2-14

Les paramètres du double pendule représenté par la figure 2-18 sont les suivants : $m_1 = m_2 = 1$ kg, $a = b = 0.2$ m, $c_1 = 0$ Nm/(rd/s), $c_2 = 2$ Nm/(rd/s) et $g = 10$ m/s². Sachant que le moment u appliqué à l'entrée est nul, étudier à l'aide de Matlab le

comportement de ce système à partir de l'état défini par $y_1 = \pi/3$, $y_2 = 0$ et $dy_1/dt = dy_2/dt = 0$.

1-3. SYSTÈMES DISTRIBUÉS

Dans les paragraphes précédents, nous avons considéré des systèmes dits *discrets* ou *morcelé* (*lumped*) dont le comportement se décrit par un nombre fini de variables d'état. Or il arrive de s'intéresser à la valeur d'une ou de plusieurs grandeurs physiques (température, pression, contrainte, vitesse, ...) en chaque point d'un *milieu continu* ce qui nécessite une infinité non dénombrable de variables d'état. Dans ce cas, on dit que le système est *distribué*. L'état en un instant t d'un système distribué ne se définit plus par un vecteur de dimension finie mais par une fonction qui associe à chaque point $P = (x, y, z)$ du milieu le vecteur u qui représente l'état de ce point. En appliquant les lois de la physique à un volume infinitésimal dv entourant le point considéré, on obtient une ou plusieurs équations aux dérivées partielles constituant son modèle.

Exemple 2-15

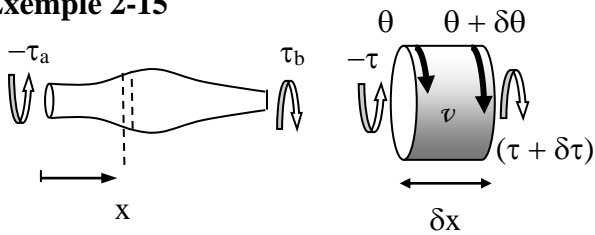


Figure 2-22. Torsion d'une pièce de révolution

Il s'agit de déterminer la rotation de chaque section d'une pièce de révolution soumise à deux couples variables $\tau_a(t)$ et $\tau_b(t)$ appliqués aux extrémités de cette pièce (fig. 2-22).

Considérons un cylindre élémentaire dv compris entre deux sections voisines d'abscisses x et $x + dx$. Ce cylindre se comporte à la fois comme un ressort rotatif soumis (de chaque côté et en sens opposé) à un moment τ et comme une inertie soumise à un moment résultant $\delta\tau$. En tant que ressort, la section droite tourne par rapport à sa section gauche d'un angle $\delta\theta$ tel que $\tau = k.\delta\theta$. La rigidité k de l'élément dv est proportionnelle au moment quadratique $I(x) = \iint r^2 . r dr d\alpha$ de sa section et inversement proportionnelle à sa longueur δx . D'où

$$\tau(x, t) = G.I(x) . \frac{\delta\theta}{\delta x} \quad (1)$$

où G est une constante dépendante du matériau appelée *module de rigidité*. D'autre part, en désignant par ρ la masse spécifique du matériau et par $\delta J = \rho I(x)\delta x$ le moment d'inertie de dv , la loi de Newton appliquée à cet élément s'écrit :

$$\delta\tau = \delta J \frac{\delta^2\theta}{\delta t^2} = \rho I(x) . \delta x . \frac{\delta^2\theta}{\delta t^2}$$

ou

$$\frac{\delta\tau}{\delta x} = \rho I(x) . \frac{\delta^2\theta}{\delta t^2} . \quad (2)$$

En dérivant (1) par rapport à x et en remplaçant dans (2), on obtient l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\rho I(x) . \frac{\delta^2\theta}{\delta t^2} = \frac{\delta}{\delta x} \left[G.I(x) . \frac{\delta\theta}{\delta x} \right] . \quad (3)$$

C'est le modèle du système décrivant la variation de la rotation θ d'une section à la position x . Pour $I(x)$ constant (axe cylindrique), (3) se ramène à

$$\frac{\delta^2\theta}{\delta t^2} = c^2 . \frac{\delta^2\theta}{\delta x^2} . \quad (4)$$

où la constante $c = (G/\rho)^{1/2}$ a la dimension d'une vitesse de translation (vérifier). En fait, l'équation (4) est celle d'une onde qui se propage à la vitesse c . Cette forme d'équation, appelée *équation d'onde*, peut apparaître dans différents domaines physiques comme l'élasticité, l'électromagnétisme et l'acoustique.

Résolution à l'aide de Matlab. Matlab est muni d'un programme appelé « pdepe » qui résout numériquement les équations aux dérivées partielles ayant une seule variable spatiale. Ces équations doivent s'écrire sous la forme :

$$c \left(x, t, u, \frac{\delta u}{\delta x} \right) . * \frac{\delta u}{\delta t} = x^{-m} . \frac{\delta}{\delta x} \left(x^m . f \left(x, t, u, \frac{\delta u}{\delta x} \right) \right) + s \left(x, t, u, \frac{\delta u}{\delta x} \right) \quad (6)$$

où u est un vecteur représentant l'état à la position x , s et f des vecteurs appelés respectivement *flux* et *source* et c un vecteur, d'éléments positifs ou nuls, qui multiplie $\delta u / \delta t$ élément à élément. La constante m peut avoir l'une des trois valeurs 0, 1 ou 2 selon que l'onde est plane, cylindrique ou sphérique. Pour l'exemple considéré, $m = 0$ car l'onde est plane (en un instant donné, la valeur de θ est la même en tout point d'une section plane de la pièce). En posant $u_1 = \theta$ et $u_2 = \delta \theta / \delta t$, la forme (6) de l'équation (3) sera la suivante :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \rho I(x) \end{pmatrix}}_c \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \delta u_1 \\ \delta t \\ \delta u_2 \\ \delta t \end{pmatrix}}_{\delta u / \delta t} = \frac{\delta}{\delta x} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ G.I(x) \cdot \frac{\delta u_1}{\delta x} \end{pmatrix}}_f + \underbrace{\begin{pmatrix} u_2 \\ 0 \end{pmatrix}}_s \quad (7)$$

Pour pouvoir résoudre cette équation, il faut préciser, en plus des intervalles $[t_0, t_f]$ et $[a, b]$ de t et de x ,

- 1) les *conditions initiales*, c'est-à-dire l'état initial $u(x, t_0)$ en toute position x et
- 2) les *conditions aux limites*, c'est-à-dire les états $u(a, t)$ et $u(b, t)$ aux extrémités a et b du milieu en tout instant t .

Pour l'exemple considéré, si toutes les sections sont initialement au repos (rotation nulle sans vitesse initiale), les conditions initiales s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} u_1(x, t_0) \\ u_2(x, t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

D'autre part, sachant que les couples appliqués sur les extrémités de la pièce sont $\tau_a(t)$ et $\tau_b(t)$, d'après (1), les conditions aux limites vérifient :

$$\begin{aligned} -\tau_a(t) + G.I(a) \cdot \frac{\delta u_1}{\delta x} \Big|_{x=a} &= 0, \\ -\tau_b(t) + G.I(b) \cdot \frac{\delta u_1}{\delta x} \Big|_{x=b} &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Pour le « pdepe », on doit écrire les conditions aux limites sous la forme :

$$\begin{aligned} p(x, t, u) + q(x, t) \cdot f &= 0 \\ \text{pour } x = a \text{ et } x = b \end{aligned}$$

où f est le vecteur défini en (6), p et q des vecteurs colonnes. La forme du vecteur p est quelconque mais q , qui multiplie f élément à élément, ne dépend pas de u et ses composantes sont toutes nulles ou aucune nulle. Par exemple, (9) s'écrit :

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -\tau_a(t) \end{pmatrix}}_p + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_q \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ G.I(x) \cdot \frac{\delta u_1}{\delta x} \end{pmatrix}}_f \Big|_{x=a} &= 0, \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -\tau_b(t) \end{pmatrix}}_p + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_q \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ G.I(x) \cdot \frac{\delta u_1}{\delta x} \end{pmatrix}}_f \Big|_{x=b} &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Supposons qu'on applique à l'extrémité gauche d'un axe en acier, de rigidité $G = 70.10^9 \text{ N/m}^2$ et de masse spécifique $\rho = 7.10^3 \text{ kg/m}^3$, un couple de 4 N.m durant 0.01 sec puis de -4 N.m durant la 0.01 sec suivante (fig. 2-23).

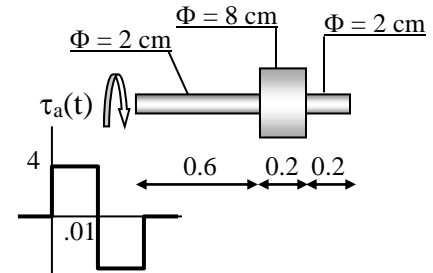


Figure 2-23. Pièce soumise à un couple moteur sans couple résistant

Sachant que le moment quadratique d'un cercle plein de diamètre D est $I = \pi D^4 / 64$, $I(x)$ est égal à $(64\pi) \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$ si $0.6 < x \leq 0.8$ et il est égal à $(\pi/4) \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$ ailleurs. Le programme suivant permet de déterminer la rotation de chaque section de la pièce en des instants différents $t = t_0, t_1, \dots$.

function axe215

%Maille des variables et type d'onde
t=0: 0.01: 0.1; x=0: 0.2: 1; m=0;

% Résolution des équations 'eqt' (qui seront
% définies plus loin avec les conditions initiales
% 'cdinit' et aux limites 'cdlim').

sol = pdepe(m, @eqt, @cdinit, @cdlim, x, t);

```

% C'est la syntaxe du "pdepe".
% sol est un étalage {t,x,u} : à tout couple (ti,xi)
% est associée une valeur du vecteur d'état u =
% (u1,u2). u1 est la rotation  $\theta$  des sections et u2
% est la vitesse de cette rotation.

% On s'intéresse seulement à la rotation  $u_1$  en toute
% position  $x_i$  et en tout instant  $t_i$ . On écrit donc

theta = sol(:, :, 1);

% Pour la vitesse  $u_2$ , on met 2 à la place de 1.

% Représentation de la surface  $\theta(x, t)$ .

surf(x, t, theta)

% Définition des vecteurs c et f et s de (7)

function [c, f, s] = eqt(x, t, u, Du)

% Du signifie le vecteur  $du/dx$ .

ro = 7e3; G = 7e10;
I = (pi*64e-8)*((0.6<x) & (x<=0.8))...
    + (pi/ 4e8)*~((0.6<x) & (x<=0.8));
c = [1; ro*I];

% La dimension de c détermine celle de u et de Du.

f = [0; G*I*Du(1)];
s = [u(2); 0];

% Conditions initiales

function u0 = cdinit(x)
u0 = [0; 0];

% Conditions aux limites (définition des vecteurs p
% et q aux extrémités a et b de x)

function [pa, qa, pb, qb] = cdlim(a, ua, b, ub, t)

% ua et ub sont les valeurs de u en a et b. À chaque
% instant t, ces valeurs sont calculées par « pdepe »
% et introduites comme arguments à cdlim.

toa = 4*(t<=0.01) - 4*((0.01<t)&(t<=0.02));
pa = [0; toa]; qa = [1; 1];
pb = [0; 0]; qb = [1; 1];

```

Ce programme conduit à la figure 2-24 suivante qui montre les oscillations des sections de la pièce représentée par la figure 2-23.

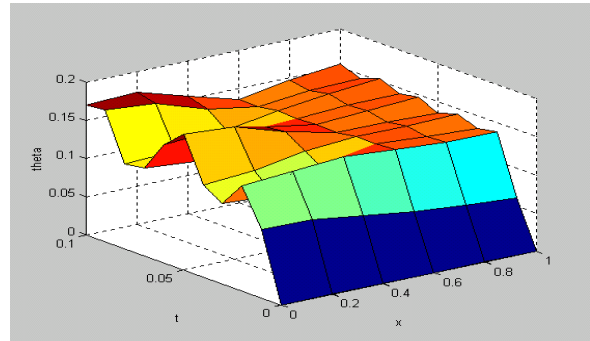


Figure 2-24. Oscillations des sections de la pièce en acier de la figure 2-23.

On remarque sur cette figure qu'en régime permanent l'augmentation de l'inertie entre $x = 0.6$ et $x = 0.8$ atténue les oscillations des sections et les déphase.

EXERCICE 2-15

Sachant que la rigidité à l'élongation d'une pièce élémentaire cylindrique de longueur dx et de section S est ES/dx où E est une constante appelée module d'Young du matériau et tenant compte de la pesanteur, écrire l'équation des déplacements longitudinaux des sections d'une tige cylindrique verticale.

Introduction à la discrétisation par éléments finis.

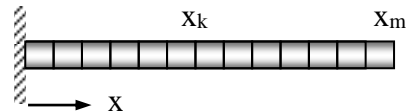


Figure 2-25 Maillage d'une tige cylindrique

Considérons une tige cylindrique, de section S et de longueur L , encastrée d'un côté et libre de l'autre (fig. 2-25). L'angle de torsion θ d'une section de la tige à la position x est lié au moment τ qui lui est appliqué par l'équation aux dérivées partielles (2) de l'exemple 2-15 :

$$\frac{\delta \tau}{\delta x} = \rho I \frac{\delta^2 \theta}{\delta t^2} \quad (2-29)$$

où la masse volumique ρ et le moment quadratique I sont ici constants. La méthode des éléments finis consiste à subdiviser le domaine $[0, L]$ en m petits segments limités par les abscisses $0, x_1, \dots, x_{m-1}$ et $x_m = L$, à résoudre m équations différentielles ordinaires pour déterminer les valeurs $\theta_k = \theta(x_k)$ en tout instant t , puis à approximer $\theta(x)$ par

interpolation entre $\theta(x_k)$ et $\theta(x_{k+1})$ pour tout x compris entre x_k et x_{k+1} . Cette approximation sera jugée valable si, pour toute fonction $h(x)$ indépendante du temps et nulle sur l'encastrement (en $x = 0$), l'égalité suivante déduite de (2-29) reste correcte malgré l'approximation :

$$\int_0^L \frac{\delta \tau}{\delta x} h dx = \rho I \int_0^L \frac{\delta^2 \theta}{\delta t^2} h dx. \quad (2-30)$$

Sachant que

$$\frac{\delta \tau}{\delta x} h = \frac{\delta(\tau h)}{\delta x} - \tau \frac{\delta h}{\delta x}$$

et que

$$\int_0^L \frac{\delta(\tau h)}{\delta x} dx = \tau(L) h(L),$$

l'équation (2-30) est équivalente à la suivante :

$$\rho I \frac{\delta^2}{\delta t^2} \int_0^L \theta h dx + \int_0^L \tau \frac{\delta h}{\delta x} dx = \tau(L) h(L). \quad (2-31)$$

L'interpolation linéaire de θ entre les x_k et x_{k+1} est :

$$\theta(x) = (1 - \xi) \theta_k + \xi \theta_{k+1} \quad (2-32)$$

avec

$$\xi = \frac{x - x_k}{d} \quad (2-33)$$

où la longueur $d = x_{k+1} - x_k$ est supposée la même pour tous les segments du maillage. Il est clair que $\xi \in [0, 1]$ et vaut 0 en x_k et 1 en x_{k+1} . L'équation (2-32) peut aussi s'écrire sous la forme matricielle :

$$\theta(x) = N_k \theta^k \quad (2-34)$$

avec

$$N_k = (1 - \xi \quad \xi) \quad \text{et} \quad \theta^k = \begin{pmatrix} \theta_k \\ \theta_{k+1} \end{pmatrix}. \quad (2-35)$$

La même interpolation appliquée aux fonctions τ et h donne :

$$\tau(x) = N_k \tau^k \quad \text{et} \quad h(x) = N_k h^k. \quad (2-36)$$

Ces approximations sont acceptables si elles vérifient l'équation (2-31) qui peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\rho I \frac{\delta^2}{\delta t^2} \sum_{k=1}^m \int_{x_{k-1}}^{x_k} \theta h dx + \sum_{k=1}^m \int_{x_{k-1}}^{x_k} \tau \frac{\delta h}{\delta x} dx = \tau(L) h(L). \quad (2-37)$$

Or, tenant compte de (2-34) et (2-36),

$$\begin{aligned} \theta h &= (h^k)^T N_k^T N_k \theta^k, \\ &= (h^k)^T \begin{pmatrix} (1 - \xi)^2 & \xi(1 - \xi) \\ \xi(1 - \xi) & \xi^2 \end{pmatrix} \theta^k. \end{aligned}$$

D'autre part, comme $\tau(x) = GI \delta \theta / \delta x = GI (\delta N_k / \delta x) \theta^k$ (voir (1), exple 2-15) et $\delta N_k / \delta x = (1/d) \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$, on a

$$\begin{aligned} \tau \frac{\delta h}{\delta x} &= GI (h^k)^T \frac{\delta N_k}{\delta x} \frac{\delta N_k}{\delta x} \theta^k, \\ &= \frac{GI}{d^2} (h^k)^T \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \theta^k. \end{aligned}$$

En remplaçant θh et $\tau(\delta h / \delta x)$ par leurs expressions dans (2-37) et sachant que $\xi(x_k) = 0$, $\xi(x_{k+1}) = 1$ et, d'après (2-33), $dx = d \cdot d\xi$, on obtient :

$$\frac{\delta^2}{\delta t^2} \sum_{k=1}^m (h^k)^T J_k \theta^k + \sum_{k=1}^m (h^k)^T K_k \theta^k = \tau(L) h(L). \quad (2-38)$$

avec

$$J_k = \frac{\rho I d}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad K_k = \frac{GI}{d} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2-39)$$

En posant maintenant

$$\begin{aligned} H^T &= (h_1 \quad h_2 \quad \cdots \quad h_m), \\ \Theta^T &= (\theta_1 \quad \theta_2 \quad \cdots \quad \theta_m), \end{aligned}$$

la première sommation de (2-38) s'écrit :

$$\sum_{k=1}^m (h^k)^T J_k \theta^k = H^T J \Theta \quad (2-40)$$

$$\text{avec} \quad J = \sum_{k=1}^{m-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

le premier élément du diagonal de J_k étant à la position (k, k) de J . D'après (2-39), on a :

$$J = \frac{\rho \text{Id}}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 4 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

De même,

$$\sum_{k=1}^m (h^k)^T K_k \theta^k = H^T K \Theta \quad (2-41)$$

avec

$$K = \frac{GI}{d} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tenant de (2-40) et (2-41), l'équation (2-38) se met sous la forme :

$$H^T J \ddot{\Theta} + H^T K \Theta = H^T T$$

où $T = (0 \ 0 \ \cdots \ \tau(L))^T$, $\tau(L)$ étant le moment appliqué à l'extrémité libre de la tige. Comme H est arbitraire, le vecteur Θ vérifie l'équation vectorielle

$$J \ddot{\Theta} + K \Theta = T. \quad (2-41)$$

La résolution de ce système d'équations différentielles ordinaires à partir d'un état initial donné $\Theta(0)$ détermine les rotations $\theta_k(t)$ des sections aux extrémités des segments du maillage. Ensuite, de la formule d'interpolation (2-32), on tire $\theta(t, x)$.

La méthode des éléments finis introduite ci-dessus peut être étendue sans grandes difficultés au plan ou à l'espace, c'est-à-dire à la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles dont la fonction u (scalaire ou vectorielle) à déterminer dépend de 2 ou 3 variables spatiales au lieu d'une seule. Voici un exemple où u dépend des trois variables spatiales.

Exemple 2-16

Nous allons établir l'équation *générale de la chaleur* qui décrit la variation de la température en chaque point d'un milieu. Pour le faire, effectuons un bilan thermique dans un parallélépipède élémentaire dV de centre $r = (x, y, z)$ et de côtés δx , δy , δz (fig. 2-26).

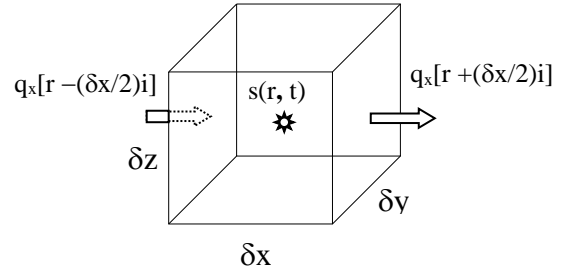


Figure 2-26. Flux de chaleur à travers un volume élémentaire.

Soit $c(r)$ la chaleur spécifique volumique au voisinage de r . Si, à l'instant t considéré, dV reçoit d'une source interne une quantité de chaleur $s(r, t)$ par seconde et par unité de volume et échange avec l'extérieur une quantité de chaleur Q par seconde, on a :

$$c(r) \cdot \delta v \cdot \delta T = s(r, t) \cdot \delta v \cdot \delta t - Q \cdot \delta t \quad (1)$$

où $\delta v = \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z$ est le volume de l'élément considéré et δT est la variation de sa température T durant le temps infinitésimal δt . La quantité Q est égale à la chaleur échangée à travers les six faces de dV . En désignant par q_x , q_y et q_z les flux par unité de surface au point r dans les directions x , y et z des vecteurs de base i , j et k , on a (voir fig 2-26) :

$$Q = \{q_x[r + (\delta x / 2)i] - q_x[r - (\delta x / 2)i]\} \delta y \delta z \\ + \{q_y[r + (\delta y / 2)j] - q_y[r - (\delta y / 2)j]\} \delta x \delta z \\ + \{q_z[r + (\delta z / 2)k] - q_z[r - (\delta z / 2)k]\} \delta y \delta x.$$

En divisant et en multipliant les 3 termes du second membre respectivement par δx , δy et δz , on obtient, par définition de la dérivée partielle,

$$Q = \frac{\delta q_x}{\delta x} \delta v + \frac{\delta q_y}{\delta y} \delta v + \frac{\delta q_z}{\delta z} \delta v \quad (2) \\ = \nabla \cdot q \cdot \delta v = \text{div}(q) \cdot \delta v,$$

$\nabla = (\delta/\delta x, \delta/\delta y, \delta/\delta z)$ étant l'opérateur 'nabla', qu'on utilise comme un vecteur, et $\text{div}(q)$ la divergence du vecteur $q = (q_x, q_y, q_z)^T$. Ce vecteur représentant le flux de chaleur dans les trois directions est lié à la température par la loi de Fourier :

$$\begin{aligned}q_x &= -k(r).(\delta T / \delta x), \\q_y &= -k(r).(\delta T / \delta y), \\q_z &= -k(r).(\delta T / \delta z),\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{q} = -k(r).\nabla T = -k(r).\overrightarrow{\text{grad}}(T) \quad (3)$$

où $k(r)$ est le *facteur de conductivité* au point r . Tenant compte de (2) et (3) et sachant que 'nabla' agit sur le produit de deux fonctions comme le fait la dérivée, l'équation (1) s'écrit :

$$\begin{aligned}c(r).\frac{\delta T}{\delta t} &= \nabla.[k(r).\nabla T] + s(r, t) \\&= \nabla k(r).\nabla T + k(r)\nabla^2 T + s(r, t)\end{aligned} \quad (4)$$

où $\nabla^2 = (\delta^2/\delta x^2, \delta^2/\delta y^2, \delta^2/\delta z^2)$ est l'opérateur *laplacien*. Dans le cas d'un milieu homogène, la chaleur spécifique et la conductivité sont des constantes indépendantes du point r considéré et l'équation (4) se simplifie pour devenir :

$$\begin{aligned}c\frac{\delta T}{\delta t} &= k\nabla^2 T + s(r, t) \\&= k\left(\frac{\delta^2 T}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 T}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 T}{\delta z^2}\right) + s(x, y, z, t)\end{aligned} \quad (5)$$

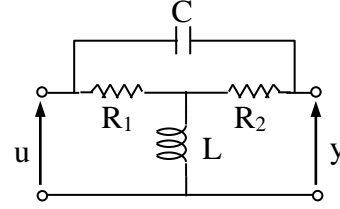
C'est l'équation de la chaleur dans un milieu homogène.

Pour apprendre à résoudre numériquement les équations aux dérivées partielles à l'aide de Matlab, le lecteur peut se référer au «help - pde» de ce logiciel où il trouvera des explications détaillées ainsi que plusieurs exemples.

AUTRES EXERCICES ET COMPLÉMENTS

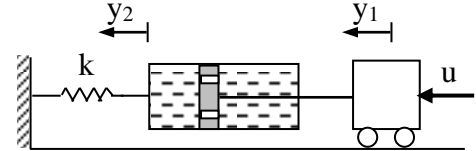
2-16 L'entrée du circuit est la tension u et sa sortie est la tension y .

$R_1 = R_2 = 2 \text{ k}\Omega$, $L = 1/2 \text{ mH}$, $C = 1/4 \text{ mF}$.



- 1) Définir des variables d'état pour ce circuit et écrire leurs équations ainsi que l'équation liant la sortie y aux variables d'état et à l'entrée.
- 2) Écrire directement, sans l'intermédiaire des équations d'état, l'équation entrée-sortie liant y et ses dérivées à u et ses dérivées (en considérant par exemple les deux mailles ou par Thévenin).
- 3) Transformer cette équation entrée-sortie en équations d'état.
- 4) Vérifier à l'aide de Matlab que les deux systèmes d'équations d'état obtenus en 1) et 3) donnent la même réponse $y(t)$ pour toute entrée $u(t)$.

2-17

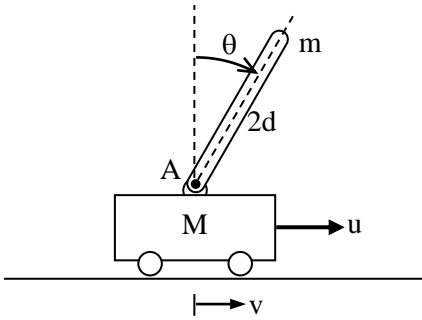


Le piston comporte des orifices permettant au liquide de passer d'un compartiment du cylindre à l'autre. La résistance de ces orifices au débit volumique est une constante R . On désigne par m_1 la masse du chariot avec le piston, m_2 la masse du cylindre avec le liquide qu'il contient et S la surface d'une section du cylindre.

- 1) Écrire les équations différentielles liant la force u appliquée au chariot aux déplacements y_1 du chariot et y_2 du cylindre.
- 2) Construire un circuit électrique analogue à ce système mécanique.
- 3) Si le liquide est remplacé par un gaz parfait dont la température est supposée constante, la différence de pression sera une nouvelle variable d'état. Écrire dans ce cas les équations d'état du système, R étant maintenant la résistance au débit molaire.

2-18 Une tige de masse m et de longueur $2d$ et de moment d'inertie $J (= md^2/3)$ pivote autour d'une

articulation A fixée à un chariot de masse M . L'entrée du système est une force u appliquée au chariot et ses sorties sont la vitesse v du chariot et l'inclinaison θ de la tige par rapport à la verticale.

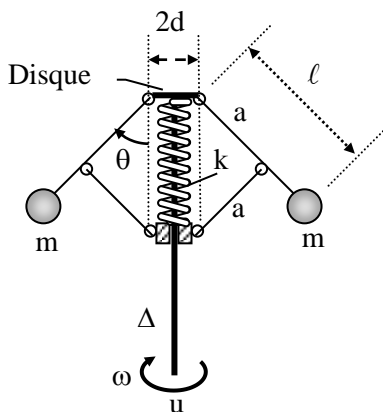


1) En admettant que le centre de gravité de la tige est en son milieu, déterminer les équations entrée-sorties de ce système

a) par la méthode de Lagrange,
b) en appliquant les lois fondamentales de Newton.
2) Pour tenter de maintenir la tige verticale, on agit sur le chariot avec une force $u = k_p \theta + k_d d\theta/dt$, dépendante donc de θ et de sa dérivée. Pour $m = 4/3$ kg, $M = 8/3$ kg, $d = 3/8$ m et $g = 10$ m/s², représenter à l'aide de Matlab les variations de θ et v dans les cas suivant :

- $k_p = 27$ et $k_d = 8$,
- $k_p = 14$ et $k_d = 5$,
- $k_p = 28$ et $k_d = 4$,

2-19 la figure représente un régulateur de Watt formé de deux masses identiques m connectées symétriquement à un petit disque et un petit anneau par des tiges articulées de masses négligeables.

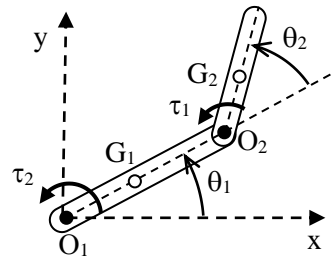


L'anneau, attaché au disque par un ressort de raideur k , glisse le long de l'axe Δ qui tourne le disque avec les masses sous l'action d'un couple u . Le ressort est au repos quand l'angle θ indiqué sur

la figure est nul. On néglige la masse de l'anneau et du disque ainsi que les frottements et on suppose que $m = 1$ kg, $\ell = 0.2$ m, $a = 0.1$ m, $k = 500$ N/m et $g = 10$ m/s².

1) Ecrire les équations de la rotation ω et de l'angle θ en fonction du couple u .
2) Représenter à l'aide de Matlab $\theta(t)$ et $\omega(t)$ quand on applique à partir du repos un couple $u = 5$ Nm.

2-20 Les deux membres 1 et 2 d'un robot se déplacent dans un plan vertical en tournant autour de deux articulations horizontales O_1 et O_2 soumises aux moments τ_1 et τ_2 . On désigne par m_i la masse du membre i , par J_i son moment d'inertie par rapport à son centre de gravité G_i , $i = 1, 2$, et par c_i le facteur du frottement, supposé visqueux, agissant sur l'articulation de ce membre. La distance entre les deux articulations est a et la distance entre l'articulation du membre i et son centre de gravité est r_i .



1) Écrire, en fonction de θ_1 et θ_2 , les expressions des coordonnées x_i et y_i des G_i dans le repère xO_1y .
2) Établir les équations différentielles liant les variations de θ_1 et θ_2 aux moments τ_1 et τ_2 .
3) Écrire les expressions de $\tau_1(t)$ et $\tau_2(t)$ quand $\theta_1(t) = 2\pi t$ et $\theta_2(t) = 4\pi t$.
4) Représenter à l'aide de Matlab $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ quand à l'instant initial θ_1 , θ_2 et leurs dérivées sont nulles et qu'on applique à partir de cet instant les moments obtenus en 3).

2-21 Dans un tube de section constante S contenant un gaz parfait de masse spécifique ρ_0 , on considère un volume élémentaire dv compris entre deux sections voisines d'abscisses x et $x + dx$.

1) En posant $p(x, t)$ la pression sur la section en x à l'instant t , montrer que la vitesse $u(x, t)$ de dv est liée à la pression $p(x, t)$ par l'équation

$$\frac{\delta p}{\delta x} = -\rho_0 \frac{\delta u}{\delta t}.$$

2) Quand les sections en x et $x + dx$ se déplacent, le volume de dv se modifie mais sa masse reste la même. Montrer que la variation de la masse

spécifique dans dv est liée à la vitesse $u(x, t)$ par la relation

$$\frac{\delta p}{\delta t} = -\rho_0 \frac{\delta u}{\delta x}.$$

En admettant que la transformation du gaz est adiabatique ($p\rho^{-\gamma} = c^{te}$), déduire des équations précédentes que

$$\frac{\delta^2 p}{\delta t^2} = c^2 \frac{\delta^2 u}{\delta x^2}$$

où $c = \sqrt{\gamma p / \rho_0} = \sqrt{\gamma \mathcal{R} T}$ est la vitesse de propagation du son.