

# Chapitre 3

## MODÉLISATION DES MOTEURS

L'intérêt pratique des moteurs est bien connu ; ils transforment l'énergie électrique, thermique, hydraulique ou pneumatique en énergie mécanique. Ils sont intensément employés dans l'industrie, sur les chantiers de construction et de travaux publics et on les rencontre dans divers équipements bureautiques et ménagers. Les moteurs électriques sont de loin les plus répandus grâce à leur performance et leur fiabilité. Comparés aux autres types de moteurs, leur coût d'achat et d'entretien est moins onéreux et ils sont silencieux, propres et peu encombrants. Généralement on a recours au moteur thermique dans les véhicules de transport ou là où l'énergie électrique n'est pas disponible tandis que le moteur hydraulique est surtout employé pour déplacer des objets lourds et le moteur pneumatique pour produire des mouvements courts et rapides.

La majeure partie de ce chapitre sera consacrée à la description et aux principes de fonctionnement des machines électriques à courant continu et alternatif. Le régime permanent de ces derniers sera d'abord envisagé suivi des équations de Park, valables dans un régime quelconque. Afin de se limiter aux caractéristiques essentielles de ces moteurs, leur modélisation sera basée sur des hypothèses simplificatrices ne tenant pas compte des distorsions secondaires dues à la saturation magnétique de l'acier ni à des anomalies occasionnelles comme le déséquilibre des phases. Le lecteur intéressé par une étude plus approfondie sur ce sujet doit se référer à des ouvrages spécialisés. Ce chapitre est complété par un aperçu sur les moteurs linéaires à fluide (hydrauliques ou pneumatiques) et par une comparaison entre le fonctionnement des deux types de transmission mécanique : à engrenages et à courroie.

### 3-1 MOTEURS À COURANT CONTINU

Les moteurs à courant continu sont les plus simples à commander et ils sont employés dans des systèmes automatiques nécessitant une haute performance comme les robots, les imprimantes, les machines outils ainsi que bien d'autres systèmes. Ils sont cependant plus lourds et plus coûteux que les moteurs alternatifs et nécessitent plus d'entretien.

**Description.** Un moteur à courant continu est constitué d'un cylindre creux fixe appelé *stator* et d'un cylindre plein tournant appelé *rotor* (fig. 3-1). Pour diminuer les pertes par courant de Foucault, le stator et le rotor sont constitués de tôles d'acier isolées par de verni, empilées et serrées ensemble.

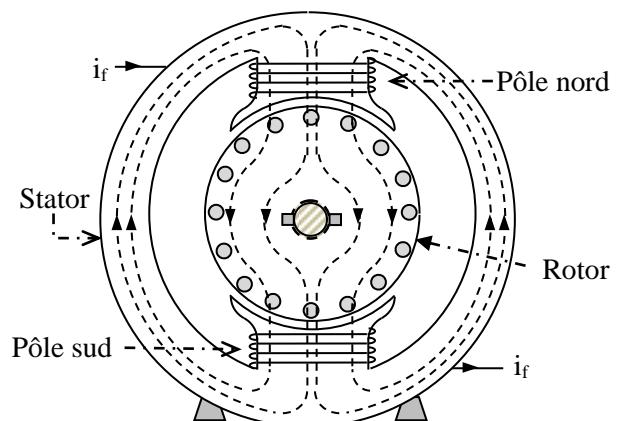


Fig. 3-1 Rotor et stator d'un moteur cc

Le stator comporte de l'intérieur des parties saillantes appelées pôles autour desquelles est enroulé un bobinage appelé *inducteur*. Quand il est

parcouru par un courant d'*excitation*  $i_f$ , l'inducteur crée un champ magnétique qui se dirige d'un pôle dit nord vers un autre pôle dit sud en traversant le rotor et en retournant au pôle nord par le stator. Pour simplifier, nous considérons ici un moteur à une seule paire de pôles ; les moteurs à plusieurs paires de pôles, qui sont généralement plus puissants, jouissent de propriétés similaires comme on peut le constater en effectuant l'exercice 3-1.

Le rotor comporte sur sa périphérie des encoches où sont logés des conducteurs connectés en série de sorte que deux conducteurs diamétralement opposés soient parcourus par des courants égaux mais en sens opposés. Le bobinage du rotor, appelé *induit*, est alimenté par une source externe de tension  $u$  et de courant d'*armature*  $i_a$  à travers un système balais-collecteur. Les balais sont des pièces en charbon qui frottent sur un collecteur constitué de lames en cuivre ou en aluminium isolées l'une de l'autre et connectées aux conducteurs de l'induit. Pour la clarté, la figure 3-2 ne montre ces connexions que pour trois lames successives du collecteur.

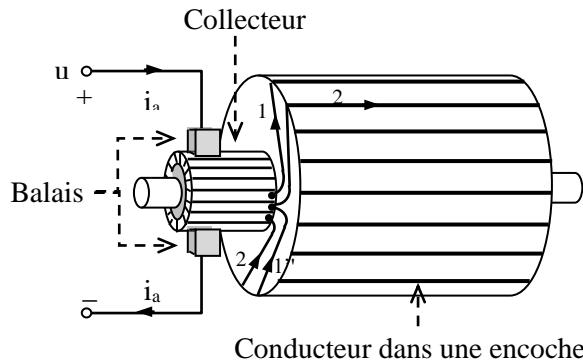


Fig. 3-2 Constitution d'un rotor

**Principe de fonctionnement.** Considérons deux conducteurs du rotor parcourus par le courant  $i_a$  et situés sur les extrémités d'un diamètre faisant avec l'axe des pôles un angle  $\theta$  (fig. 3-3). Par symétrie, ils sont soumis à la même induction  $B(\theta)$  du champ créé par l'inducteur en cette position. Comme le courant  $i_a$  les traverse en sens opposés, d'après la règle de Laplace, les forces qui s'exercent sur ces deux conducteurs sont égales et opposées d'intensité  $f(\theta) = \ell B(\theta) i_a$  où  $\ell$  est la longueur du rotor. Ces forces orthogonales à  $i_a$  et  $B(\theta)$  développent sur

l'axe du rotor un couple  $2r\ell B(\theta)i_a \sin\alpha$  où  $r$  est le rayon du rotor et  $\alpha$  est l'angle entre le rayon et  $f$ .

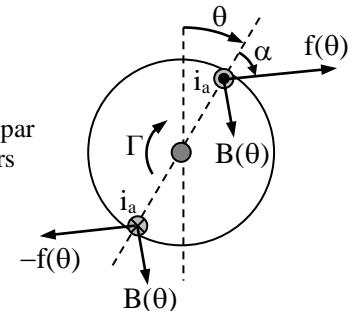


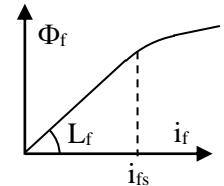
Fig. 3-3 Couple créé par un paire de conducteurs

Si  $n_a$  est le nombre des conducteurs de l'induit, un secteur d'angle  $d\theta$  comporte  $(n_a/2\pi)d\theta$  conducteurs d'où le couple développé par tous les paires de conducteurs sur l'axe du rotor est

$$\Gamma_m = \frac{n_a}{\pi} i_a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} B(\theta) \sin\alpha (\ell r d\theta) = \frac{n_a}{\pi} \Phi_f i_a \quad (3-1)$$

où  $\Phi_f$  est le flux de l'inducteur à travers le rotor.

Le flux  $\Phi_f$  est lié au courant  $i_f$  par une caractéristique dont l'allure, représentée sur la figure ci-contre, révèle l'effet de saturation du circuit magnétique pour les valeurs de  $i_f$  supérieures à  $i_{fs}$ . Pour  $i_f < i_{fs}$ , la caractéristique est presque linéaire dont la pente  $L_f$  n'est autre que l'inductance du circuit ( $\Phi_f = L_f i_f$ ). Dans ce domaine l'équation (3-1) devient :



$$\Gamma_m = k i_f i_a \quad (3-2)$$

où  $k = n_a L_f / \pi$ .

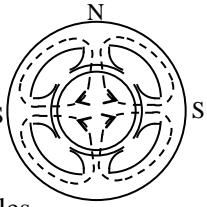
D'autre part, les deux conducteurs aux extrémités d'un diamètre d'inclinaison  $\theta$  constituent avec leurs connexions une spire traversée par le flux  $\Phi_r \sin\theta$ . Quand le rotor tourne avec une vitesse  $\Omega = d\theta/dt$ , ce flux engendre aux bornes de la spire une force contre-électromotrice  $d(\Phi_r \sin\theta)/dt = \Phi_r \Omega \cos\theta$ . La somme de ces quantités pour toutes les spires est égale à la force contre-électromotrice  $e_b$  aux bornes de l'induit (entre les balais) :

$$e_b = \frac{n_a}{2\pi} \Phi_f \Omega \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta d\theta = \frac{n_a}{\pi} \Phi_f \Omega \quad (3-3)$$

**EXERCICE 4-1**

La figure ci-contre représente un moteur cc à 2 paires de pôles.

a) Que vaut l'angle sous-jacent sous une spire de l'enroulement d'induit ?



b) Montrer que pour ce moteur les deux membres des formules (3-1) et (3-3) doivent être multipliées par 2. Généraliser à un moteur comportant  $p$  paires de pôles.

**Équations.** Le moteur se compose de deux circuits électriques, ceux de l'inducteur et de l'induit et d'une partie mécanique formée par le rotor et la charge qu'il entraîne. Écrivons les équations de ces 3 parties.

**Équation de l'inducteur**

Le circuit inducteur peut être schématisé par la figure 3-4 où  $u_f$  est la tension qui lui est appliquée,  $R_f$  sa résistance,  $\Phi_f$  son flux et  $\Phi_a$  le flux de l'induit.

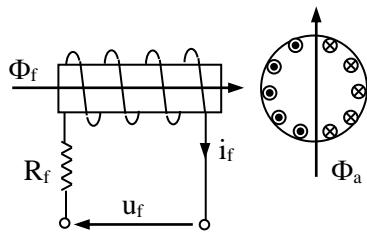


Fig. 3-4 Circuit de l'inducteur

Sous chaque pôle, le courant  $i_a$  traverse les conducteurs de l'induit dans le même sens. Le flux  $\Phi_a$  de ce bobinage est donc orthogonal à l'axe des pôles et son influence sur l'inducteur est minime car il traverse un large entrefer de grande réductance (voir fig. 3-1). Ceci permet d'écrire :

$$u_f = R_f i_f + \frac{d\Phi_f}{dt}. \quad (3-4)$$

Dans le cas où le circuit magnétique n'est pas saturé ( $i_f < i_{fs}$ ), on a  $\Phi_f = L_f i_f$  et l'équation précédente devient :

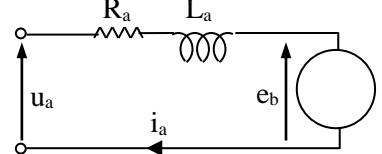
$$u_f = R_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt}. \quad (3-5)$$

**Équation de l'induit**

Le circuit de l'induit se représente par la figure 3-5 où  $u_a$  est la tension qui lui est appliquée,  $R_a$  sa résistance,  $L_a$  son inductance et  $e_b$  sa force contre-électromotrice donnée par (3-3). On en déduit que

$$u_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e_b. \quad (3-6)$$

Fig. 3-5 Circuit de l'induit



Le flux  $\Phi_a$  de l'induit est faible étant orthogonal à l'axe des pôles. En négligeant  $L_a$ , l'équation (3-6) se réduit à

$$u_a = R_a i_a + e_b. \quad (3-6')$$

**Équation de la partie mécanique**

Le couple moteur  $\Gamma_m$  donné par (3-1) met en rotation le rotor et la charge entraînée (fig. 3-6). Soit  $J$  le moment d'inertie de l'ensemble et  $c$  le facteur de frottement supposé visqueux. L'équation reliant  $\Gamma_m$  à l'angle de rotation  $\theta$  est

$$\Gamma_m = J \frac{d^2\theta}{dt^2} + c \frac{d\theta}{dt}. \quad (3-7)$$

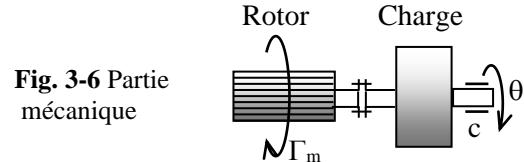


Fig. 3-6 Partie mécanique

**Fonction de transfert.** En admettant que le circuit magnétique n'est pas saturé, la relation (3-2) montre que le couple qui met le moteur en rotation est proportionnel au courant d'excitation  $i_f$  et au courant d'armature  $i_a$ . On peut donc agir sur le système soit par  $i_a$  en variant la tension  $u_a$  soit par  $i_f$  en variant la tension  $u_f$ .

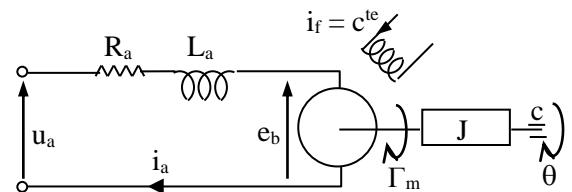
**Commande par courant d'armature.**

Fig. 3-7 Moteur commandé par  $i_a$

En fixant le courant d'excitation  $i_f$ , le moteur peut être représenté par la figure 3-7. Le courant  $i_f$  étant constant, les relations (3-2) et (3-3) s'écrivent  $\Gamma = k_a i_a$  et  $e_b = k_b \Omega$  où  $k_a$  et  $k_b$  sont des constantes. D'autre part, en désignant par  $s$  l'opérateur de dérivation  $d/dt$ , les équations (3-6) et (3-7) peuvent s'écrire sous la forme :

$$i_a = \frac{u_a - e_b}{L_a s + R_a} \quad \text{et} \quad \theta = \frac{\Gamma_m}{s(Js + c)}.$$

Sachant que  $e_b = k_b \Omega$  avec  $\Omega = s\theta$  et  $\Gamma_m = k_a i_a$ , on déduit que

$$\theta = \frac{k_a(u_a - k_b s \theta)}{s(L_a s + R_a)(Js + c)}$$

ou

$$\frac{\theta}{u_a} = \frac{k_a}{s[(L_a s + R_a)(Js + c) + k_a k_b]}.$$
 (3-8)

Ce rapport est appelé fonction de transfert entre l'entrée  $u_a$  et la sortie  $\theta$ . En négligeant l'inductance  $L_a$  de l'induit la relation précédente se réduit à

$$\frac{\theta}{u_a} = \frac{k_a}{s(R_a Js + R_a c + k_a k_b)}.$$
 (3-9)

À remarquer que les valeurs de  $k_a$  et  $k_b$  sont généralement voisines car si les pertes par courant de Foucault sont faibles, la puissance électrique  $e_b i_a = k_b \Omega i_a$  reçue par le rotor sera presque égale à la puissance mécanique  $\Gamma \Omega = k_a i_a \Omega$  fournie par ce dernier, d'où  $k_b \approx k_a$ .

D'autre part, en posant

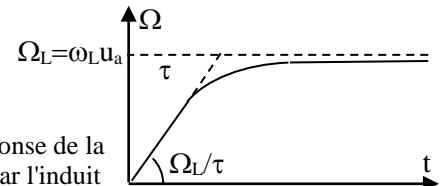
$$\tau = \frac{R_a J}{R_a c + k_a k_b} \quad \text{et} \quad \omega_L = \frac{k_a}{R_a c + k_a k_b},$$
 (3-10)

on déduit de (3-9) que la fonction de transfert liant  $u_a$  à la vitesse  $\Omega = s\theta$  est

$$\frac{\Omega}{u_a} = \frac{\omega_L}{\tau s + 1}.$$
 (3-11)

Pour une tension constante  $u_a$  appliquée à l'induit, l'expression de la vitesse est :

$$\tau \frac{d\Omega}{dt} + \Omega = \omega_L u_a \Rightarrow \Omega(t) = \omega_L u_a (1 - e^{-t/\tau})$$

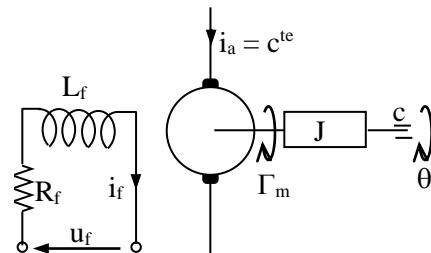


**Fig. 3-8** Réponse de la commande par l'induit

On en déduit que  $\Omega_L = \omega_L u_a$  est la vitesse limite et  $\omega_L u_a / \tau$  est l'accélération au démarrage (pente à l'origine) comme le montre la figure 3-8. Ceci permet de déterminer expérimentalement les valeurs des paramètres  $\omega_L$  et  $\tau$  de la fonction de transfert (3-11). À remarquer que la vitesse atteint sa valeur limite d'autant plus rapidement que  $\tau$  est faible. Ce paramètre  $\tau$ , appelé *constante de temps* de la réponse, est, d'après (3-10), proportionnel à l'inertie entraînée  $J$  mais  $\omega_L$ , la vitesse limite par volt, est indépendante de  $J$  et diminue quand  $c$  augmente.

#### Commande par courant d'excitation

En fixant le courant d'armature  $i_a$ , le moteur peut être représenté par la figure 3-9 suivante.



**Fig. 3-9** Moteur commandé par  $i_f$

Le courant  $i_a$  étant constant, la relation (3-2) s'écrit  $\Gamma_m = k_f i_f$  où  $k_f$  est une constante. Tenant compte de (3-5) et (3-7), on a :

$$\theta = \frac{k_f u_f}{s(L_f s + R_f)(Js + c)}$$

d'où la fonction de transfert est

$$\frac{\theta}{u_f} = \frac{\omega_L}{s(\tau_e s + 1)(\tau_m s + 1)}$$
 (3-12)

où  $\tau_e = L_f / R_f$  et  $\tau_m = J / c$  sont les constantes de temps

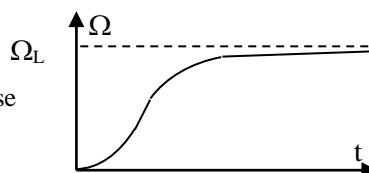
respectivement de l'inducteur et de l'arbre moteur et  $\omega_L = k_f/cR_f$  est la vitesse limite par volt. Pour une tension constante  $u_f$  appliquée à l'inducteur, on déduit de (3-12) que l'équation de la vitesse est :

$$\tau_e \tau_m \frac{d^2\Omega}{dt^2} + (\tau_e + \tau_m) \frac{d\Omega}{dt} + \Omega = \Omega_L$$

d'où

$$\Omega(t) = \Omega_L \left[ 1 - \frac{1}{\tau_m - \tau_e} \left( \tau_m e^{-t/\tau_m} - \tau_e e^{-t/\tau_e} \right) \right].$$

La figure 3-10 représente l'allure de cette réponse.



**Fig. 3-10** Réponse de la commande par l'inducteur

### EXERCICE 3-2

Montrer que si la tension d'entrée est constante, la vitesse d'un moteur cc au voisinage de l'instant de démarrage suit

- la droite  $(\Omega_L/\tau)t$  s'il est commandé par le courant d'armature,
- la parabole  $(\Omega_L/2\tau_m\tau_e)t^2$  s'il est commandé par le courant d'excitation.

### EXERCICE 3-3

Un moteur cc de résistance d'induit  $R_a = 1 \Omega$ , entraîne une charge de moment d'inertie  $J = 0.2 \text{ kgm}^2$ . Quand on le commande par son courant d'armature sous une tension  $u_a = 100$  volts, il atteint une vitesse limite de 1200 tr/min et sera traversé par un courant  $i_a = 2 \text{ A}$ . En négligeant les pertes par

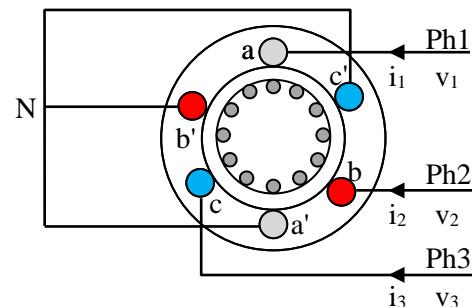
- calculer les valeurs du facteur d'amortissement  $c$  et de la constante du couple moteur  $k_a$ .
- Écrire la fonction de transfert liant la tension  $u_a$  à la vitesse de rotation  $\Omega$ .

c) On applique sur l'arbre moteur un couple résistant  $\Gamma_r$ . Déterminer en régime stationnaire la relation entre  $\Omega_L$ ,  $u_a$  et  $\Gamma_r$  et représenter pour  $u_a = 100, 150$  et  $200$  volts la *caractéristique mécanique*  $\Omega_L(\Gamma_r)$ .

## 3-2 MOTEURS À INDUCTION

Ces moteurs, appelés aussi asynchrones, sont les plus employés dans l'industrie à cause de leur prix modéré, de leur fiabilité et de leur faible coût de maintenance. D'autre part, quand ils sont contrôlés par des variateurs de vitesse électroniques (dont le prix d'achat est devenu abordable), les moteurs à induction se comportent comme les moteurs à courant continu et les remplacent de plus en plus dans les systèmes de commande.

**Description.** La figure 3-11 représente d'une manière schématique le stator et le rotor d'un moteur triphasé à induction.

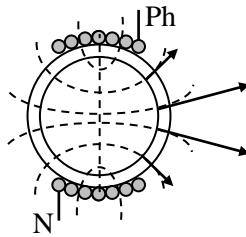


**Fig. 3-11** Stator et rotor d'un moteur à induction

Le stator comporte sur sa surface intérieure 3 bobines  $aa'$ ,  $bb'$  et  $cc'$  chacune étant décalée par rapport à la précédente d'un angle de  $120^\circ$  et connectée d'un côté à une phase d'un secteur triphasé de tensions  $v_1$ ,  $v_2$  et  $v_3$  et de l'autre côté à un point neutre  $N$ . Nous admettrons que les courants qui traversent ces bobines sont sinusoïdaux équilibrés (de somme nulle) de même valeur maximum et déphasés l'un de l'autre de  $120^\circ$  :

$$\begin{aligned} i_1 &= I_m \cos \omega t, \\ i_2 &= I_m \cos(\omega t - 2\pi/3), \\ i_3 &= I_m \cos(\omega t - 4\pi/3). \end{aligned} \quad (3-13)$$

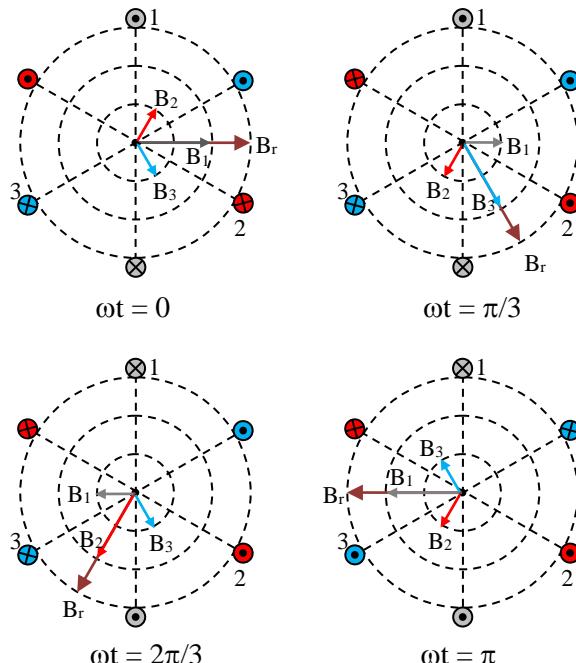
Les spires d'une bobine sont généralement réparties symétriquement des deux côtés d'un plan médian de sorte que, perpendiculairement à ce plan, le courant crée un flux magnétique qui lui est proportionnel et dont l'induction est maximum sur l'axe du rotor et diminue graduellement en se rapprochant des conducteurs de la bobine (fig. 3-12).



**Fig. 3-12** Flux d'une bobine du stator

Les lignes de champ traversent l'entrefer à peu près radialement et l'intensité de l'induction varie autour du rotor presque sinusoïdalement.

L'induction moyenne du champ créé par une bobine (c.à.d. l'induction uniforme qui a le même flux que la vraie induction) est orthogonale au plan médian de cette bobine et varie proportionnellement à son courant donné en (3-13). La figure 3-13 montre comment varient les inductions moyennes  $B_i$  des 3 bobines ainsi que leur résultante  $B_r$  pour différentes valeurs de  $\omega t$  (les cercles ont des rayons proportionnels à  $1/2$ ,  $1$ ,  $3/2$  et le sens des courants dans les bobines est indiqué pour chaque  $\omega t$ ). On voit sur cette figure que  $B_r$  tourne avec une vitesse  $\Omega_s = \omega$  en gardant la même intensité (pour une justification plus précise effectuer l'exercice 3-4).

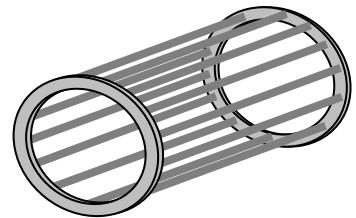


**Fig. 3-13** Variation de l'induction résultante  $B_r$

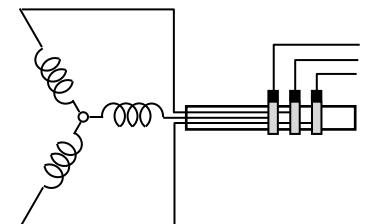
Le rotor comporte sur sa surface extérieure des encoches traversées par des conducteurs qui sont

court-circuités aux deux extrémités par des anneaux métalliques constituant ainsi un circuit fermé dit en cage d'écurieuil (fig. 3-14).

**Fig. 3-14** Circuit en cage d'écurieuil



Le circuit du rotor peut être aussi bobiné, chaque bobine ayant une borne liée à un point neutre et l'autre borne est liée à l'extérieure à travers un balais glissant sur un anneau conducteur fixé sur l'axe du moteur (fig. 3-15, connexion en étoile.).



**Fig. 3-15** Circuit bobiné du rotor

Les connexions externes servent à intercaler des résistances variables afin de limiter le courant de démarrage ou de régler la vitesse du moteur. Comme actuellement ce réglage peut se faire plus efficacement par des moyens électroniques, les rotors bobinés sont de moins en moins utilisés dans les moteurs à induction.

#### EXERCICE 3-4

a) En représentant les inductions moyennes des bobines du stator par les nombres complexes

$$B_1 = B_m R_e(e^{j\omega t}),$$

$$B_2 = B_m e^{-j2\pi/3} R_e(e^{j(\omega t - 2\pi/3)}),$$

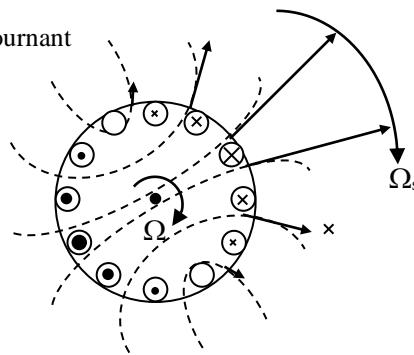
$$B_3 = B_m e^{-j4\pi/3} R_e(e^{j(\omega t - 4\pi/3)}),$$

où  $B_m$  est la valeur maximum de  $B_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , montrer que la représentation complexe de la résultante  $B_r$  de ces inductions est  $(3B_m/2)e^{-j\omega t}$  c.à.d. que  $B_r$  est un vecteur de module constant tournant à la vitesse  $\Omega_s = \omega$ .

b) En négligeant la réductance de l'acier devant celle de l'entrefer d'épaisseur  $e$ , montrer que  $B_m = nI_m \mu_0 / 2e$  où  $n$  est le nombre de spire de la bobine,  $I_m$  son courant maximum et  $\mu_0$  la perméabilité magnétique de l'air.

**Action du champ tournant sur le rotor.** La figure 3-16 montre le flux résultant créé par le stator et tournant à la vitesse  $\Omega_s = \omega$  autour du rotor.

Fig. 3-16 Flux tournant autour du rotor



Quand le rotor est en arrêt, chacun de ses conducteurs coupe une induction qui se déplace avec une vitesse  $\Omega_s = \omega$ , ce qui engendre dans ce conducteur une force électromotrice égale au flux coupé par unité de temps (loi de Lorentz). Pour s'opposer à la cause qui lui a donné naissance (le flux coupé par seconde), le sens du courant qui s'établit dans le conducteur est tel que la force de Laplace tend à déplacer ce conducteur dans le même sens que la vitesse du flux. La figure 3-16 montre schématiquement le sens et l'intensité des courants qui en résultent pour la position considérée du flux. On constate que l'induit se comporte comme une bobine dont l'induction moyenne est orthogonale à celle de l'inducteur et tourne derrière elle avec la même vitesse. Le couple développé sur l'axe du rotor par les forces de Laplace appliquées à tous les conducteurs met le rotor en rotation. Quand la vitesse de ce dernier devient  $\Omega$ , la vitesse avec laquelle le flux coupe les conducteurs diminue et devient  $\Omega_s - \Omega$  dont la valeur relative

$$g = (\Omega_s - \Omega) / \Omega_s \quad (4-14)$$

est appelée *facteur de glissement*. Quand la vitesse  $\Omega$  arrive à la *vitesse de synchronisme*  $\Omega_s = \omega$ , les conducteurs du rotor ne coupant plus le flux, leur force électromotrice et leur courant s'annulent ce qui annule le couple moteur. En fait ceci ne peut pas se réaliser car il faut qu'il subsiste un couple moteur non nul pour équilibrer les frottements inévitables. Durant le fonctionnement normal du moteur on a donc  $0 < g \leq 1$ . Mais, en commutant les phases de

deux bobines en un moment où la vitesse du rotor est  $\Omega$ , le champ du stator tourne dans le sens inverse ce qui rend  $\Omega$  négative et  $g$  supérieur à 1. Dans ce cas, il se développe un couple qui s'oppose à  $\Omega$  et freine le moteur par *contre courant*. D'un autre côté, si par un moyen mécanique externe la vitesse du rotor dépasse la vitesse de synchronisme  $\Omega_s$ ,  $g$  sera négatif et un couple  $\Gamma_r$  opposé à la rotation du rotor transformera la puissance mécanique  $\Gamma_r \Omega$  provenant de l'extérieur en énergie électrique qui sera fournie au secteur. Dans ce cas le moteur se comporte en générateur d'électricité (peu performant).

**Circuit équivalent.** Comme les flux du stator et du rotor tournent à la même vitesse  $\Omega_s = \omega$ , leur flux résultant  $\phi$  a aussi cette vitesse. En considérant l'induit et une bobine de l'inducteur, on peut subdiviser  $\phi$  en 3 parties (fig. 3-17) :

- Le flux mutuel  $\phi_m$  qui traverse à la fois l'induit et la bobine. C'est la majeure partie du flux  $\phi$ .
- Le flux de fuite  $\phi_s$  qui traverse la bobine sans pénétrer dans l'induit et
- le flux de fuite  $\phi_r$  qui traverse l'induit sans pénétrer dans la bobine.

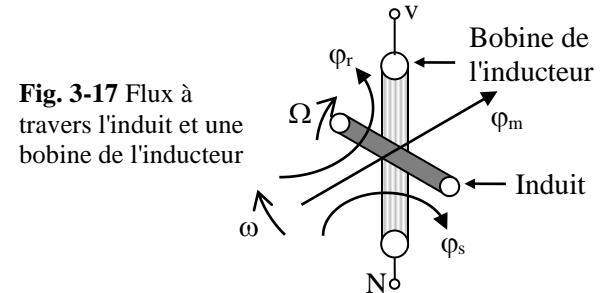


Fig. 3-17 Flux à travers l'induit et une bobine de l'inducteur

Soit  $R_s$  la résistance de la bobine,  $v$  la tension de la phase qui l'alimente et  $i_s$  le courant qui la traverse. En négligeant le courant de Foucault, on a :

$$v = R_s i_s + \frac{d\phi_s}{dt} + \frac{d\phi_m}{dt}. \quad (3-15)$$

Comme le flux  $\phi_s$  ne traverse que la bobine, on peut poser  $\phi_s = L_s i_s$  mais pour le flux  $\phi_m$  qui traverse à la fois la bobine et l'induit, on pose  $\phi_m = L_m i_m$  où  $i_m$  est une fraction du courant  $i_s$  appelé le *courant magnétisant*. En admettant que les variables dans la bobine sont sinusoidales de fréquence  $\omega$  et que le circuit magnétique est non saturé ( $L_s$  et  $L_m$  constants), l'équation (3-15) est la partie réelle de sa

version complexe (notation de Fresnel) qui s'obtient en remplaçant  $\cos(\omega t + \alpha)$  par  $e^{j(\omega t + \alpha)}$  :

$$v = R_s i_s + jX_s i_s + e, \quad e = jX_m i_m \quad (4-16)$$

avec  $X_s = L_s \omega$  et  $X_m = L_m \omega$ .

$e$  est la force contre-électromotrice créée dans la bobine par  $\varphi_m$ . Comme ce flux tourne par rapport à la bobine avec une vitesse  $\Omega_s$ , la tension  $e$  est proportionnelle à  $\Omega_s$ . Ce même flux  $\varphi_m$  tourne par rapport à l'induit avec une vitesse  $\Omega_s - \Omega$  et crée donc dans ce circuit une fem  $e_r$  de fréquence  $\Omega_s - \Omega = g \Omega_s$  et de valeur  $e_r = (\Omega_s - \Omega)(e / \Omega_s) = ge$ . En posant  $R_r$  la résistance de l'induit,  $i_r$  son courant et  $\varphi_r = L_r i_r$ , on a, en notation complexe,

$$e_r = ge = R_r i_r + jL_r (\Omega_s - \Omega) i_r$$

ou  $e = (R_r / g) i_r + jX_r i_r, \quad X_r = L_r \Omega_s.$  \quad (3-17)

Des équations (3-16) et (3-17) on déduit qu'une phase d'un moteur à induction est équivalente au circuit de la figure 3-18 où la position du curseur du potentiomètre dépend de la valeur du glissement  $g$  c.à.d. de la vitesse de rotation  $\Omega$ .

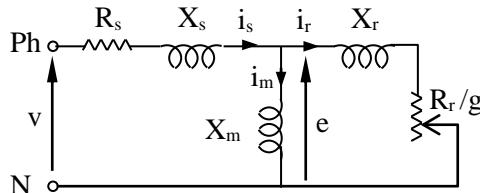


Fig. 3-18 Circuit équivalent d'un moteur à induction.

Ce circuit montre que la puissance instantanée  $e_i r$  fournie par la phase au rotor se transforme en une puissance magnétique passive qui s'emmagsaine dans l'inductance  $L_r$  et en une puissance active  $R_r i_r^2 / g$ . Cette dernière se transmet vers l'extérieur sous deux formes : de chaleur ( $R_r i_r^2$ ) et de puissance mécanique. D'où les 3 phases produisent la puissance mécanique moyenne

$$P_m = \Gamma_m \Omega = 3(R_r I_r^2 / g - R_r I_r^2) \quad (3-18)$$

$$= 3R_r I_r^2 \frac{1-g}{g} = 3R_r I_r^2 \frac{\Omega}{\Omega_s - \Omega}$$

où  $\Gamma_m$  est le couple moteur et  $I_r$  la valeur efficace du

courant  $i_r$  du rotor.

**Caractéristique mécanique.** C'est la relation entre la vitesse de rotation  $\Omega$  du rotor et le couple moteur  $\Gamma_m$ . De l'équation (3-18), on tire :

$$\Gamma_m = 3R_r I_r^2 \frac{1}{\Omega_s - \Omega} = \frac{3R_r}{\Omega_s g} I_r^2. \quad (3-19)$$

Il reste à exprimer  $I_r$  en fonction de  $\Omega$  (ou de  $g$ ). Or, d'après le théorème de Thévenin et en posant  $Z_s = R_s + jX_s$ , le circuit de la figure 3-18 est équivalent à celui de la figure 3-19 où la tension et l'impédance équivalentes sont données par

$$V_e = \frac{jX_m}{Z_s + jX_m} V \quad \text{et} \quad Z_e = \frac{jX_m}{Z_s + jX_m} Z_s \quad (3-20)$$

On pose  $Z_e = R_e + jX_e$  avec  $X_e = L_e \Omega_s$ .

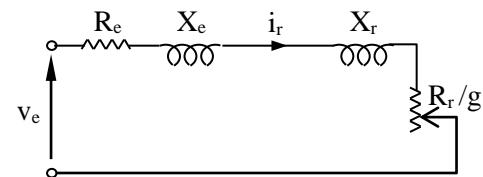


Fig. 3-19 Transformé du circuit 3-18 par Thévenin.

En désignant par  $V_e$  la valeur efficace de  $v_e$ , on déduit du circuit de la figure 3-19 que

$$I_r = \frac{V_e}{\sqrt{(R_e + R_r / g)^2 + (X_e + X_r)^2}}.$$

En remplaçant  $I_r$  par son expression dans (3-19), on obtient :

$$\Gamma_m = \frac{3V_e^2}{\Omega_s} \frac{R_r / g}{(R_e + R_r / g)^2 + (X_e + X_r)^2}. \quad (3-21)$$

Pour  $g > 0$ ,  $\Gamma_m$  est maximum quand sa dérivée par rapport à  $R_r / g$  s'annule, c.à.d. quand  $g = g_{max}$  avec

$$(R_r / g_{max})^2 = R_e^2 + (X_e + X_r)^2. \quad (3-22)$$

De ces deux dernières équations, on déduit que le couple moteur maximum est lié à la tension efficace

$V_e$  et à la fréquence  $\Omega_s$  par la relation

$$\Gamma_{\max} = \frac{3V_e^2}{2\Omega_s R_e + \sqrt{R_e^2 + (X_e + X_r)^2}}. \quad (3-23)$$

En général, la résistance  $R_s$  de l'inducteur et son inductance de fuite  $X_s$  sont négligeables devant l'inductance magnétisante  $X_m$  d'où, d'après (3-20),  $v_e \approx v$  et  $z_e \approx z_s$ . Si en plus on néglige la résistance  $R_e$  ( $\approx R_s$ ) devant  $X_e + X_r$ , les formules (3-22) et (3-23) se réduisent aux suivantes :

$$g_{\max} = \frac{R_r}{L\Omega_s}, \quad L = L_s + L_r \quad (3-24)$$

et  $\Gamma_{\max} = \frac{3}{2L} \left( \frac{V}{\Omega_s} \right)^2. \quad (3-25)$

Enfin, (3-21) et (3-25) conduisent à la relation

$$\frac{\Gamma_m}{\Gamma_{\max}} = \frac{2}{g_{\max}/g + g/g_{\max}}. \quad (3-26)$$

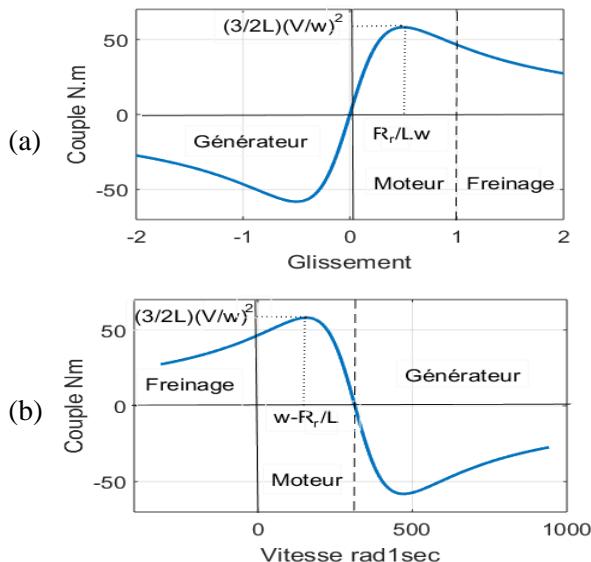


Fig. 3-20 Caractéristique mécanique

Pour  $0 < g \ll g_{\max}$ , la relation (3-26) est presque égale à la droite  $\Gamma_m = (2\Gamma_{\max}/g_{\max})g$ , pour  $g \gg g_{\max}$  elle tend vers l'hyperbole  $\Gamma_m = (2\Gamma_{\max}g_{\max})/g$  et on remarque que  $\Gamma_m(-g) = -\Gamma_m(g)$  (symétrie par rapport à l'origine). Les figures 3-20a et 3-20b montrent la variation du couple monteur  $\Gamma_m$  en fonction, respectivement, du glissement  $g$  et de la vitesse  $\Omega$ . La figure 3-21 représente les

caractéristiques  $\Gamma_m(\Omega)$  relatives au fonctionnement moteur pour deux fréquences  $\omega_1$  et  $\omega_2$  et deux tensions  $V_1$  et  $V_2$  telles que  $V_1/\Omega_{1s} = V_2/\Omega_{2s} = V/\Omega_s$ .

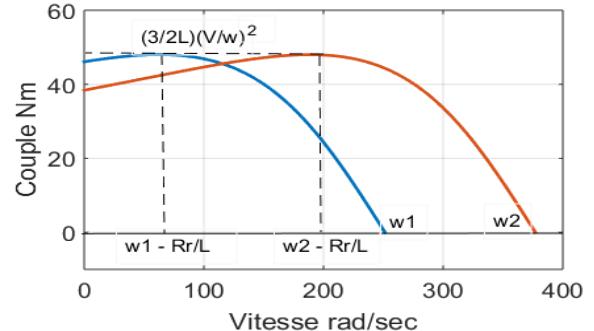


Fig. 3-21 Caractéristiques en fonctionnement moteur

Cette figure montre que les variations de la vitesse de synchronisme  $\Omega_s = \omega$  et de celle du couple maximum  $\Omega_{\max} = \Omega_s - R_r/L$  sont égales à la variation de la fréquence  $\Omega_s$ . En plus, d'après (3-25),  $\Gamma_{\max}$  conserve la même valeur si le rapport  $k = V/\Omega_s$  est maintenu constant. Généralement  $k$  est choisi égal au rapport  $k_n = V_n/\Omega_n$  de la tension nominale sur la fréquence nominale du moteur. Cependant, à des fréquences très basses ( $\omega < \omega_{\min}$ ), la résistance  $R_e$  n'étant plus négligeable devant  $X_e + X_r = (L_e + L_r)\Omega_s$ , les approximations (3-24) à (4-26) de (3-21) à (3-23) ne restent plus valables. Pour ces fréquences on compense la chute de tension à travers  $R_e$  en cessant de diminuer  $V$  avec  $\Omega_s$ . De l'autre côté, à hautes fréquences, la tension du stator  $V$  risque de craquer l'isolant des conducteurs si elle dépasse sa valeur nominale. Se basant sur ces remarques, une politique de commande du moteur consiste à appliquer au stator une tension  $V$  liée à la fréquence  $\omega$  par le profil de la figure 3-22.

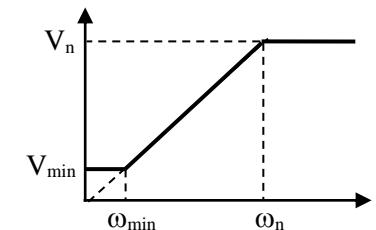


Fig. 3-22 Profil de la commande  $V/\omega = k$

D'autre part, pour les vitesses  $\Omega$  comprises entre 0 et  $\Omega_{\max} = \Omega_s - R_r/L$  (dans la partie croissante de la caractéristique), le moteur est instable car, dans cette région, le couple variant dans le même sens que la vitesse, une légère perturbation diminue la

vitesse jusqu'à l'arrêt ou l'augmente plus haut que  $\Omega_{\max}$ . Le moteur n'est donc stable que pour les vitesses supérieures à  $\Omega_{\max}$  et nous avons vu qu'au voisinage de la vitesse de synchronisme  $\Omega_s$  (c.à.d. pour  $g \ll g_{\max}$ ), la caractéristique se confond presque avec la droite  $\Gamma_m = (2\Gamma_{\max}/g_{\max})g$  qui, tenant compte de (3-24) et (3-25), s'écrit :

$$\Gamma_m = k_m(\Omega_s - \Omega), \quad k_m = \frac{3}{R_r} \left( \frac{V}{\Omega_s} \right)^2. \quad (3-27)$$

Si le moteur entraîne une charge de moment d'inertie  $J$  et de facteur de frottement  $c$  et si l'on maintient le rapport  $k = V/\Omega_s$  constant, la relation entre la fréquence  $\Omega_s$  et la vitesse  $\Omega$  sera

$$k_m(\Omega_s - \Omega) = J \frac{d\Omega}{dt} + c\Omega$$

En remplaçant  $d/dt$  par  $s$ , on obtient une fonction de transfert de même forme que celle d'un moteur cc commandé par son courant d'induit

$$\frac{\Omega}{V} = \frac{k_m / k}{Js + (k_m + c)} = \frac{\Omega_L}{Ts + 1} \quad (3-28)$$

**Remarque.** Dans ce qui précède, nous avons considéré un moteur à une seule paire de pôles (une bobine par phase). Si chaque phase alimente 2 bobines en série, on dit que le moteur possède deux paires de pôles. Dans ce cas, la vitesse du champ tournant devient  $\Omega_s = \omega/2$  au lieu de  $\omega$  car chaque paire de pôles n'occupe que la moitié de la face intérieure du stator. De même, la vitesse du champ tournant (vitesse de synchronisme) d'un moteur à  $p$  paires de pôles est  $\Omega_s = \omega/p$ . Par conséquent, pour un moteur à  $p > 1$ ,  $\Omega_s = \omega$  sera remplacé par  $\Omega_s = \omega/p$ . En particulier, l'expression du glissement devient  $g = (\Omega_s - \Omega)/\Omega_s = (\omega - p\Omega)/\omega$ .

### EXERCICE 3-5

Un moteur asynchrone à 2 paires de pôles de résistances  $R_s = R_r = 1 \Omega$  et de réactances  $X_s = X_r = 4 \Omega$  et  $X_m = 30 \Omega$ , est alimenté par une tension triphasée de valeur efficace  $V_a = 220$  volts et de fréquence 50 Hz. Calculer le courant efficace  $I_s$  d'une phase et le couple moteur  $\Gamma_m$  quand la vitesse est de 1200 tr/min.

## 4-3 MACHINES SYNCHRONES

Nous avons vu que la fréquence du courant rotorique d'une machine à induction s'annule à la vitesse de synchronisme  $\Omega_s$  c'est-à-dire que ce courant devient continu à cette vitesse. Mais, comme son amplitude s'annule en même temps, il ne peut pas produire un couple moteur qui équilibre le couple résistant afin de maintenir la vitesse  $\Omega_s$ . Pour que ceci soit possible, il est nécessaire d'injecter dans le circuit du rotor un courant continu d'intensité convenable. Le principe des machines synchrones est basé sur cette idée.

**Description.** Le stator d'une machine synchrone a la même constitution que celui d'une machine à induction mais le rotor est un électroaimant cc (rotor bobiné) ou un aimant permanent ayant autant de paires de pôles que le stator. Il peut être lisse ou à pôles saillants comme le montre la figure 3-23.

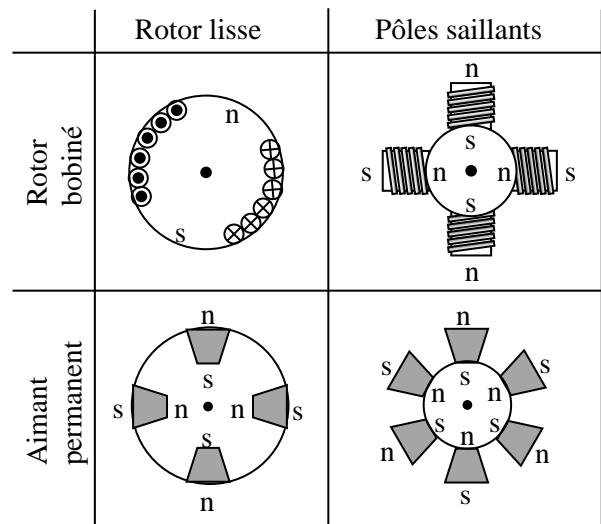


Fig. 3-23 Types de rotor d'une machine synchrone

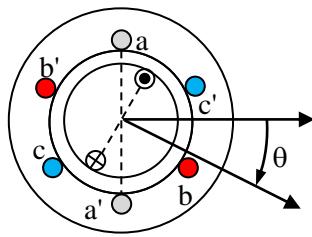
Le rotor bobiné s'alimente soit de l'extérieur par un courant continu  $I_r$  à travers deux balais frottant sur des anneaux conducteurs fixés sur l'axe du moteur soit par le courant redressé d'un petit alternateur synchrone interne dont le rotor est entraîné par l'axe du rotor principal.

Afin de maximiser le flux qui le traverse, le rotor d'un moteur synchrone tend à aligner son champ avec le champ tournant créé par le courant triphasé du stator. Il développe ainsi un couple d'autant plus

grand que l'angle séparant son champ du champ tournant est grand. Ce couple doit équilibrer le couple résistant. Si ce dernier est constant, l'angle entre les deux champs sera constant et ils tourneront donc à la même vitesse. En génératrice, le rotor de la machine est mis en rotation par un moyen externe (moteur thermique, turbine à vapeur, à gaz ou à eau, éolienne, ...) et son flux engendre dans les bobines du stator une force électromotrice triphasée dont la fréquence est  $\omega = \Omega p$  où  $\Omega$  est la vitesse du rotor et  $p$  est le nombre des paires de pôles de la machine.

**Équations d'une machine à 1 paire de pôles.**  
La figure 3-24 est une représentation schématique d'une machine synchrone à rotor bobiné et à une seule paire de pôles.

Fig. 3-24 Machine synchrone bobinée à un pair de pôles.



Le flux  $\varphi_a$  qui traverse la bobine  $aa'$  provient de son propre courant  $i_a$ , des courants  $i_b$  et  $i_c$  des deux autres bobines  $bb'$  et  $cc'$  du stator et du courant continu  $I_r$  du rotor. En admettant que le circuit magnétique n'est pas saturé, on a :

$$\varphi_a = L_a i_a + M_{ab} i_b + M_{ac} i_c + \mathcal{M}_{ar}(\theta) I_r \quad (4-29)$$

où  $L_a$  est l'inductance propre de la bobine  $aa'$ ,  $M_{ab}$ ,  $M_{ac}$  et  $\mathcal{M}_{ar}(\theta)$  les inductances mutuelles entre  $aa'$  et  $bb'$ ,  $aa'$  et  $cc'$  et entre  $aa'$  et le bobinage du rotor. Posons  $\varphi_{aa} = L_a i_a$  le flux propre de  $aa'$ . On a  $\varphi_{aa} = \varphi_{am} + \varphi_{af}$  où  $\varphi_{am} = L_{am} i_a$  est la partie du flux  $\varphi_{aa}$  qui traverse  $bb'$  et, par symétrie,  $cc'$  et où  $\varphi_{af} = L_{af} i_a$  est la partie restante du flux  $\varphi_{aa}$  comme le montre la figure 3-25. Cette figure montre que les flux créés par le courant  $i_a$  de  $aa'$  à travers  $bb'$  et  $cc'$  sont

$$M_{ba} i_a = \varphi_{am} \cos(2\pi/3) = -(L_{am}/2) i_a$$

et

$$M_{ca} i_a = \varphi_{am} \cos(-2\pi/3) = -(L_{am}/2) i_a.$$

Sachant que  $M_{ab} = M_{ba}$  et  $M_{ac} = M_{ca}$ , on déduit que

$$M_{ab} = M_{ac} = -L_{am}/2. \quad (3-30)$$

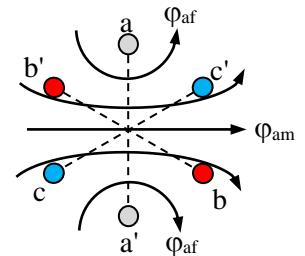


Fig. 3-25 Flux créés par le courant  $i_a$  de  $aa'$

D'autre part, la figure 3-24 montre que le flux créé par le courant  $i_a$  de  $aa'$  à travers le bobinage du rotor peut être approximé par la fonction sinusoïdale  $\mathcal{M}_{ra}(\theta) i_a = (M_{ar} \cos \theta) i_a$ ,  $\theta$  étant l'angle entre ces deux bobines et  $M_{ar}$  est leur inductance mutuelle quand leurs axes sont alignés. D'où

$$\mathcal{M}_{ar}(\theta) = M_{ar} \cos \theta. \quad (3-31)$$

Tenant compte de (3-30) et (3-31), l'équation (3-29) devient :

$$\varphi_a = (L_{am} + L_{af}) i_a - \frac{L_{am}}{2} (i_b + i_c) + (M_{ar} \cos \theta) I_r$$

et comme  $i_a + i_b + i_c = 0$ , on obtient

:

$$\varphi_a = L_{sc} i_a + M_{ar} I_r \cos \theta \quad (3-32)$$

$$\text{où } L_{sc} = \frac{3L_{am}}{2} + L_{af} \quad (3-33)$$

est appelé l'*inductance synchrone* de la machine.

Admettons que les bobines des 3 phases du stator ont la même résistance  $R_s$ . De (3-32), on déduit que la tension aux bornes de la bobine  $aa'$  est

$$v_a = R_s i_a + \frac{d\varphi_a}{dt} = R_s i_a + L_{sc} \frac{di_a}{dt} - M_{ar} I_r \frac{d\theta}{dt} \sin \theta.$$

Sachant qu'en régime stationnaire la vitesse du rotor est  $\Omega = \omega$ , sa position à l'instant  $t$  est  $\theta = \omega t + \theta_0$  où  $\theta_0$  est l'angle initial entre l'axe du pôle du rotor et l'axe de la bobine  $aa'$ . L'équation précédente s'écrit :

$$v_a = R_s i_a + L_{sc} \frac{di_a}{dt} + e_a \quad (3-34)$$

$$\text{avec } e_a = -(M_{ar} I_r \omega) \sin(\omega t + \theta_0)$$

de valeur efficace

$$E_a = \frac{M_{ar} I_r \omega}{\sqrt{2}}. \quad (3-34')$$

Les tensions  $v_b$  et  $v_c$  aux bornes des bobines  $bb'$  et  $cc'$  ont des expressions semblables à (3-34) à part que, par rapport à  $e_a$ , la tension  $e_b$  est déphasée de  $2\pi/3$  et  $e_c$  de  $-2\pi/3$ .

**Circuit équivalent d'une machine synchrone.** La figure 3-26 est une représentation schématique d'une machine synchrone à deux paires de pôles et à rotor bobiné.

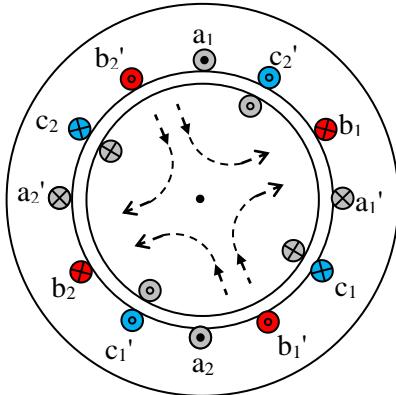


Fig. 3-26 Machine synchrone à 2 pairs de pôles

La phase a du secteur est connectée aux deux bobines en série  $a_1a_1'$  et  $a_2a_2'$ , la phase b à  $b_1b_1'$  en série avec  $b_2b_2'$  et la phase c à  $c_1c_1'$  en série avec  $c_2c_2'$  et les deux bobines en série du rotor sont parcourues par un courant continu  $I_r$ . On remarque que la variation du flux du rotor à travers les deux bobines  $a_1a_1'$  et  $a_2a_2'$  se répète chaque demi tour, d'où l'inductance mutuelle entre le bobinage du rotor et celui de la phase a est maintenant  $M_{ar}(\theta) = M_{ar}\cos(2\theta)$  et que la fréquence du flux à travers les bobines d'une phase est  $\omega = 2\Omega$  où  $\Omega$  est la vitesse du rotor. Ceci se généralise directement à une machine à  $p$  paires de pôles :

$$M_{ar}(\theta) = M_{ar}\cos(p\theta) \text{ et } \omega = p\Omega.$$

En désignant toujours par  $L_a$ ,  $M_{ab}$  et  $M_{ac}$  l'inductance propre des bobines de la phase a et ses inductances mutuelles avec les bobines des deux autres phases et en suivant la même démarche que dans le cas d'une seule paire de pôles, on arrive de nouveau à l'équation

$$v_a = R_s i_a + L_{sc} \frac{di_a}{dt} + e_a \quad (3-35)$$

où l'inductance synchrone  $L_{sc}$  a la même expression

que (3-33) et

$$e_a = \frac{d}{dt} [M_{ar} I_r \cos(p\theta)] = -M_{ar} I_r p\Omega \sin(p\theta).$$

Sachant que  $\theta = \Omega t + \theta_0$  et  $\omega = p\Omega$ , l'équation précédente s'écrit

$$e_a = -M_{ar} I_r \omega \sin(\omega t + p\theta_0) \quad (3-36)$$

dont la valeur efficace  $E_a$  a la même expression que dans (3-34').

Par convention, le sens positif du courant  $i_a$  d'un moteur est dirigé de la phase du secteur vers ses bobines et ce sens s'inverse quand il s'agit d'une génératrice. Par conséquent, (3-35) est l'équation d'un moteur mais celle d'une génératrice s'écrit :

$$e_a = R_s i_a + L_{sc} \frac{di_a}{dt} + v_a. \quad (3-37)$$

Aux équations (3-35) et (3-37) correspondent les circuits de la figure 3-27.

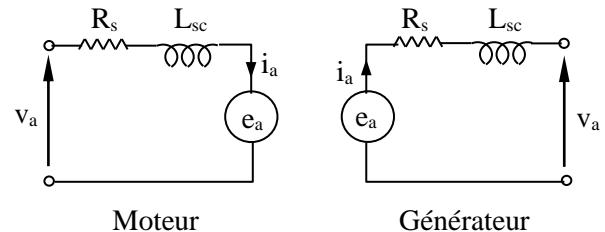


Fig. 3-27 Circuits équivalents d'une machine synchrone

En général la résistance  $R_s$  est négligeable devant la réactance synchrone  $X_{sc} = L_{sc}\omega$ .

**Puissance et couple.** Comme  $R_s$  est négligeable, la puissance active (la puissance moyenne par période) reçue par le moteur ou par le générateur est presque égale à la puissance active que cette machine fournit à l'extérieur. En d'autres termes, si  $\varphi$  et  $\gamma$  sont les déphasages du courant  $i_a$  par rapport à  $v_a$  et  $e_a$  respectivement, on a :

$$P = 3V_a I_a \cos \varphi = 3E_a I_a \cos \gamma \quad (3-38)$$

où  $V_a$ ,  $E_a$  et  $I_a$  sont les valeurs efficaces de  $v_a$ ,  $e_a$  et  $i_a$  ainsi que de  $v_b$ ,  $e_b$  et  $i_b$  et de  $v_c$ ,  $e_c$  et  $i_c$ .

Les équations (3-35) d'un moteur et (3-37) d'un générateur se représentent dans le plan complexe

par le même diagramme de Fresnel (fig. 3-28) à condition d'associer au moteur les vecteurs  $v_a$ ,  $e_a$  et l'angle  $\varphi$  hors parenthèses et au générateur les vecteurs  $e_a$ ,  $v_a$  et l'angle  $\gamma$  entre parenthèses.

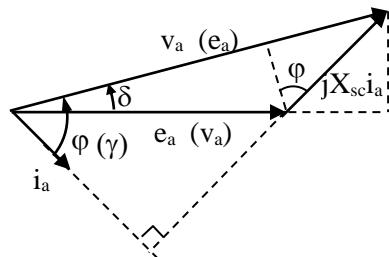


Fig. 3-28 Diagramme d'une machine synchrone

Il est facile de voir sur la figure 3-28 que les projections de  $e_a$  et de  $jX_{sc}i_a$  sur une droite perpendiculaire à  $v_a$  ont le même module. D'où, si  $\sin\delta$  est de même signe que  $\cos\varphi$  et  $\cos\gamma$ , on a les égalités suivantes, respectivement pour le moteur et le générateur :

$$\begin{aligned} X_{sc}I_a \cos\varphi &= E_a \sin\delta, \\ X_{sc}I_a \cos\gamma &= V_a \sin\delta \end{aligned} \quad (3-39)$$

$\delta$  étant l'angle entre les vecteurs  $e_a$  et  $v_a$ . De (3-38) et (3-39) on tire que

$$P = 3(V_a E_a / X_{sc}) \sin\delta$$

et comme  $P = \Gamma\Omega$ , le couple produit par le moteur ou celui qui résiste au couple appliqué au rotor du générateur de l'extérieur est donné par

$$\Gamma = 3(V_a E_a / \Omega X_{sc}) \sin\delta. \quad (3-40)$$

À partir de la relation  $\Gamma = kB_r \wedge B$  où  $B_r$  est l'induction moyenne du rotor,  $B$  est celle du champ tournant et  $k$  une constante, on déduit que  $\delta$ , appelé *angle du couple*, est aussi l'angle entre  $B_r$  et  $B$ . Pour un moteur,  $B_r$  est derrière  $B$  et le couple  $\Gamma$  est dans le sens de la rotation du rotor tandis pour un générateur,  $B_r$  est devant  $B$  et le couple  $\Gamma$  est opposé à la rotation du rotor. Pour éviter le mauvais fonctionnement et les oscillations fortes, le couple résistant au moteur ou appliqué au générateur doit rester inférieur au couple maximum

$$\Gamma_{max} = 3(V_a E_a / \Omega X_s). \quad (3-41)$$

### Effet de la variation du couple résistant.

Considérons un moteur synchrone branché à un secteur triphasé de tension efficace  $V_a$  et de fréquence  $\omega = p\Omega$  constantes. Le courant continu  $I_r$  qui alimente le bobinage du rotor est aussi constant. Dans ces conditions, d'après (3-34'), la force contre électromotrice  $E_a$  est constante mais, d'après (3-40) et (3-39),  $E_a \sin\delta$  et  $I_a \cos\varphi$  sont proportionnels au couple résistant  $\Gamma_r$  (incluant le frottement). La figure 3-29 montre comment varie le courant  $i_a$  d'une phase en fonction de ce couple.

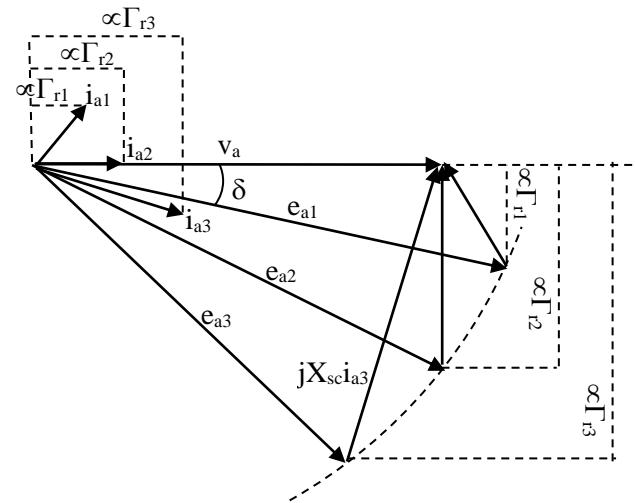


Fig. 3-29 Effet du couple résistant sur un moteur synchrone

On voit sur cette figure que l'intensité de  $I_a$  croît avec la charge et qu'il existe un couple résistant  $\Gamma_{r2}$  pour lequel  $i_a$  (orthogonal à  $jX_{sc}i_a$ ) est en phase avec la tension  $v_a$  et le moteur a donc un comportement résistif pur. Pour  $\Gamma_{r1} < \Gamma_{r2}$ , le courant  $i_a$  est en avance par rapport à  $v_a$  et son comportement est capacitif fournissant au secteur de l'énergie passive  $3V_a I_a \sin\varphi$  et pour  $\Gamma_{r3} > \Gamma_{r2}$ , le courant  $i_a$  est en retard par rapport à  $v_a$  et son comportement est inductif absorbant de l'énergie passive  $3V_a I_a \sin\varphi$  du secteur.

### EXERCICE 3-6

Étudier graphiquement la variation de l'intensité  $I_a$  du courant d'une phase d'un moteur synchrone en fonction du courant du rotor  $I_r$  sachant que ce moteur est alimenté par une tension triphasée de valeur efficace  $V_a$  et de fréquence  $\omega$  constantes et qu'il est soumis à un couple résistant  $\Gamma_r$  constant.

**EXERCICE 3-7**

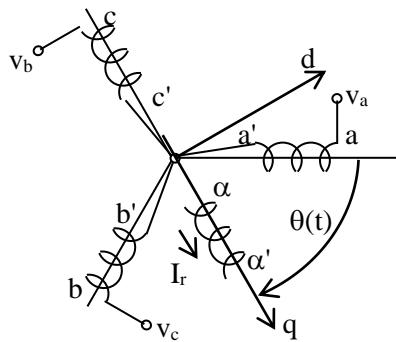
Un moteur synchrone à une seule paire de pôles de réactance synchrone  $X_{sc} = 15 \Omega$  et de résistance  $R_s$  négligeable est alimenté par une tension triphasée de valeur efficace  $V_a = 400$  volts et de fréquence  $\omega = 50$  Hz. Si le courant du rotor est  $I_r = 15$  A, la valeur efficace du courant d'une phase est  $I_a = 20$  A et le facteur de puissance est  $\cos\varphi = 1$ .

- 1) Calculer l'inductance mutuelle maximum  $M_{ar}$  entre la phase aa' et le bobinage du rotor. Que vaut le couple résistant  $\Gamma_r$  ?
- 2) Calculer le courant  $I_a$  et le facteur de puissance  $\cos\varphi$  quand le couple résistant devient  $2\Gamma_r$ .

## 3-4 ÉQUATIONS DE PARK

Dans les paragraphes précédents l'étude des machines à courant alternatif a été limitée à leur comportement en régime permanent sans envisager la transition d'un régime à un autre. Il est évident que la performance d'une commande peut s'améliorer si l'on dispose d'équations décrivant le comportement de ces machines en tout instant, que le régime soit permanent ou transitoire. En plus, nous verrons que la détermination de la commande se simplifie si les équations de ces machines sont écrites dans un repère dit d-q ou de Park.

### 3-4-1 Équations dynamiques du moteur synchrone



**Fig. 3-30** Les bobinages d'un moteur synchrone

La figure 3-30 montre les trois bobines fixes aa', bb' et cc' du stator connectées en étoile et la bobine tournante  $\alpha\alpha'$  du rotor. Les bobines du stator sont soumises aux tensions  $v_a$ ,  $v_b$ ,  $v_c$  et celle du rotor est

parcourue par un courant continu  $I_r$ . La figure montre aussi un repère d-q qui sera considéré plus loin, l'axe q étant celui de la bobine  $\alpha\alpha'$  du rotor et l'axe d est perpendiculaire à q.

**Modèle à variables physiques.**  $R_s$  étant la résistance d'une bobine du stator, la tension  $v_a$  appliquée à la bobine aa' est liée au courant  $i_a$  et au flux  $\varphi_a$  qui traversent cette bobine par la relation

$$v_a = R_s i_a + \frac{d\varphi_a}{dt}. \quad (3-42)$$

Soient  $L_s$  l'inductance propre d'une bobine du stator,  $M_s$  l'inductance mutuelle entre deux de ses bobines et  $M_{sr}$  l'inductance mutuelle maximum entre la bobine du rotor et une bobine du stator. Sachant que  $i_b + i_c = -i_a$ , on déduit de (3-29) et (3-31) que

$$\varphi_a = (L_s - M_s)i_a + M_{ar}(\theta)I_r \quad (3-43)$$

avec

$$M_{ar}(\theta) = M_{sr} \cos\theta \quad (3-44)$$

où  $\theta$  est l'angle entre les axes des bobines aa' et  $\alpha\alpha'$ . Si  $p$  est le nombre des paires de pôles, on remplace  $\theta$  par  $p\theta$ . Tenant compte de (3-43) et (3-44), l'équation (3-42) devient :

$$v_a = R_s i_a + (L_s - M_s) \frac{di_a}{dt} - M_{sr} I_r p \Omega \sin p\theta. \quad (3-45)$$

Les tensions  $v_b$  et  $v_c$  s'expriment de la même manière que  $v_a$  à part que  $p\theta$  doit être remplacé respectivement par  $p\theta + 2\pi/3$  et  $p\theta - 2\pi/3$ .

D'après l'équation (3-45), la puissance  $v_a i_a$  fournie à la bobine aa' se subdivise en une puissance calorifique  $R_s i_a^2$  qui se dissipe, en une puissance magnétique  $(L_s - M_s)i_a di_a/dt$  qui s'emmagsaine dans le circuit magnétique du moteur et en une puissance  $-pM_{sr}I_r \Omega i_a \sin\theta$  qui se transmet au rotor pour se transformer en une puissance mécanique. La puissance totale  $\Gamma_m \Omega$  qui sera recueillie sur l'arbre moteur est la somme des puissances mécaniques provenant des bobines aa', bb' et cc'. D'où le couple moteur  $\Gamma_m$  est lié aux courants et la rotation par

$$\begin{aligned}\Gamma_m &= -pM_{sr}I_r[i_a \sin p\theta \\ &\quad + i_b \sin(p\theta + 2\pi/3) \\ &\quad + i_c \sin(p\theta - 2\pi/3)].\end{aligned}\quad (3-46)$$

Ayant  $\Gamma_m$  et le couple résistant  $\Gamma_r$  de la charge, la vitesse  $\Omega$  du rotor se déduit de l'équation différentielle

$$J \frac{d\Omega}{dt} + c\Omega = \Gamma_m - \Gamma_r, \quad \Omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (3-47)$$

où  $J$  est le moment d'inertie de la charge entraînée et  $c$  est le facteur de frottement supposé visqueux. Cependant l'équation (3-46) montre que, pour obtenir un couple désiré  $\Gamma_m$ , les courants doivent être modifiés en fonction de la position  $\theta$  du rotor ce qui complique la commande. Pour remédier à cette difficulté, nous allons transformer les vecteurs constitués par les variables physiques du stator,  $v^s = [v_a, v_b, v_c]^T$ ,  $i^s = [i_a, i_b, i_c]^T$  et  $\varphi^s = [\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c]^T$ , en des vecteurs tournant avec le rotor.

**Modèle à variables fictives.** Considérons un vecteur quelconque  $x^s = [x_a, x_b, x_c]^T$  dont les composantes sont portées par les axes des bobines aa', bb' et cc'. En projetant ce vecteur sur les axes q et d représentés sur la figure 3-30, on obtient pour un moteur à une seule paire de pôles le vecteur

$$\begin{pmatrix} x_q \\ x_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \cos(\theta + 2\pi/3) & \cos(\theta - 2\pi/3) \\ \sin \theta & \sin(\theta + 2\pi/3) & \sin(\theta - 2\pi/3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{pmatrix}.$$

Pour un moteur à  $p$  paires de pôles, on remplace  $\theta$  par  $p\theta$ . Au lieu de la transformation précédente, il est plus commode de la remplacer par une matrice carrée orthonormée  $K$  (de colonnes orthogonales et unitaires) en l'augmentant d'une troisième ligne et en la multipliant par une constante. L'image de  $x^s$  par  $K$  sera

$$x^p = (x_q \ x_d \ x_0)^T = K(x_a \ x_b \ x_c)^T = Kx^s$$

avec

$$K = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \cos \theta & \cos(\theta + 2\pi/3) & \cos(\theta - 2\pi/3) \\ \sin \theta & \sin(\theta + 2\pi/3) & \sin(\theta - 2\pi/3) \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (3-48)$$

Il est facile de vérifier que cette matrice est orthonormée et il est connu que l'inverse d'une telle matrice est sa transposée (facile à démontrer), d'où  $x^s = K^T x^p$ . D'autre part,

$$x_a + x_b + x_c = 0 \Rightarrow x_0 = 0.$$

Maintenant, tenant compte de (3-42), (3-43) et (3-44), les équations de  $v_a$ ,  $v_b$  et  $v_c$  peuvent se grouper sous la forme matricielle

$$\begin{aligned}v^s &= \mathcal{R}^s i^s + \frac{d\varphi^s}{dt}, \\ \varphi^s &= (L_s - M_s) i^s + M_{sr} I_r C(\theta),\end{aligned}\quad (3-49)$$

avec

$$\mathcal{R}^s = \begin{pmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 \\ 0 & 0 & R_s \end{pmatrix} \text{ et } C(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \cos(\theta + 2\pi/3) \\ \cos(\theta - 2\pi/3) \end{pmatrix}.$$

En remplaçant dans (3-49)  $v^s$ ,  $i^s$  et  $\varphi^s$  par  $K^T v^p$ ,  $K^T i^p$  et  $K^T \varphi^p$  et en multipliant par  $K$ , on obtient :

$$v^p = \mathcal{R}^s i^p + K \frac{d(K^T \varphi^p)}{dt}, \quad (3-50)$$

$$\varphi^p = (L_s - M_s) i^p + M_{sr} I_r K C(\theta).$$

où

$$v^p = [v_q, v_d, v_0]^T, i^p = [i_q, i_d, i_0]^T \text{ et } \varphi^p = [\varphi_q, \varphi_d, \varphi_0]^T.$$

Or, sachant que pour un moteur à  $p$  paires de pôles  $\theta$  doit être remplacé par  $p\theta$  dans (3-48) et dans  $C(\theta)$ , on a :

$$\begin{aligned}K \frac{d(K^T \varphi^p)}{dt} &= K \frac{dK^T}{dt} \varphi^p + \frac{d\varphi^p}{dt}, \text{ avec} \\ K \frac{dK^T}{dt} &= p\Omega \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } K C(\theta) = \sqrt{\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

De (3-50) on tire alors les équations suivantes :

$$\begin{cases} v_q = R_s i_q + p\Omega\varphi_d + \dot{\varphi}_q \\ v_d = R_s i_d - p\Omega\varphi_q + \dot{\varphi}_d \end{cases} \quad (3-51)$$

avec

$$\begin{cases} \varphi_q = (L_s - M_s)i_q + M_{sr}I_r \sqrt{3/2} \\ \varphi_d = -(L_s - M_s)i_d \end{cases} \quad (3-52)$$

et comme  $i_a + i_b + i_c = 0$ , on a  $i_0 = 0$  et on déduit de (3-50) que  $\varphi_0 = v_0 = 0$ .

En dérivant les équations (3-52) par rapport au temps et en remplaçant dans (3-51), on obtient 2 équations liant les dérivées des courants  $i_q$  et  $i_d$  à ces courants, à la vitesse et aux entrées  $v_p$  et  $v_d$ . Ces équations (non linéaires à cause des termes  $\Omega\varphi_d$  et  $\Omega\varphi_q$ ) constituent avec les deux équations (3-47) les 4 équations d'état du moteur synchrone dont les variables d'état sont les courants, la rotation  $\theta$  et la vitesse  $\Omega$ . Il reste à déterminer la relation entre le couple moteur  $\Gamma_m$  et ces variables d'état. Or en écrivant l'équation (3-46) sous la forme

$$\Gamma_m = -pM_{sr}I_rS(\theta)i^s,$$

où  $S(\theta) = [\sin p\theta, \sin(p\theta + 2\pi/3), \sin(p\theta - 2\pi/3)]$ , et en remplaçant  $i^s$  par  $K^T i^P$ , on obtient :

$$\Gamma_m = -\sqrt{\frac{3}{2}}pM_{sr}I_r i_d. \quad (3-53)$$

On voit bien que le couple instantané  $\Gamma_m$  ne dépend plus de  $\theta$  mais seulement des courants  $i_d$  et  $I_r$ . Il se comporte comme un moteur à courant continu et pour cette raison il est appelé moteur à courant continu sans balais (DC brushless motor). La transformation de Park entre les courants physiques et les courants fictifs est effectuée par un circuit électronique (à ampli-OP ou à microprocesseur) appelé parfois collecteur électronique.

### 3-4-1 Équations dynamiques du moteur à induction

Le bobinage du stator d'un moteur à induction est décrit au paragraphe 3-2. Que le rotor soit bobiné ou à cage d'écureuil, on peut toujours supposer que son flux tournant est produit par un bobinage triphasé connecté en étoile et court-circuité.

**Modèle à variables physiques.** En désignant par  $v^s = [v_a, v_b, v_c]^T$  le vecteur des tensions appliquées au bobinage du stator, par  $i^s = [i_a, i_b, i_c]^T$  et  $\varphi^s = [\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c]^T$  les vecteurs des courants et des flux magnétiques qui traversent ce bobinage et par  $i^r = [i_\alpha, i_\beta, i_\gamma]^T$  et  $\varphi^r = [\varphi_\alpha, \varphi_\beta, \varphi_\gamma]^T$  les vecteurs des courants et des flux magnétiques qui traversent le bobinage du rotor, on a :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v^s \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathcal{R}^s & 0 \\ 0 & \mathcal{R}^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i^s \\ i^r \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varphi^s \\ \varphi^r \end{bmatrix} \\ \text{Notation} \quad \Leftrightarrow \quad v &= \mathcal{R}i + \frac{d\varphi}{dt} \end{aligned} \quad (3-54)$$

où  $\mathcal{R}^s$  et  $\mathcal{R}^r$  sont les matrices des résistances des bobinages du stator et du rotor :

$$\mathcal{R}^s = R_s I, \quad \mathcal{R}^r = R_r I.$$

I étant la matrice unitaire. En admettant la non-saturation du circuit magnétique du moteur, la relation entre les flux magnétiques et leurs courants à travers les bobinages s'écrit :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \varphi^s \\ \varphi^r \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathcal{L}_s & \mathcal{L}_m(\theta) \\ \mathcal{L}_m^T(\theta) & \mathcal{L}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i^s \\ i^r \end{bmatrix} \\ \text{Notation} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi &= \mathcal{L}(\theta)i. \end{aligned} \quad (3-55)$$

Les matrices des inductances constituant l'inductance globale  $\mathcal{L}(\theta)$  sont données par

$$\mathcal{L}_s = \begin{bmatrix} L_s & M_s & M_s \\ M_s & L_s & M_s \\ M_s & M_s & L_s \end{bmatrix}, \quad \mathcal{L}_r = \begin{bmatrix} L_r & M_r & M_r \\ M_r & L_r & M_r \\ M_r & M_r & L_r \end{bmatrix},$$

et  $\mathcal{L}_m(\theta)$  a pour expression

$$\mathcal{L}_m(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(p\theta) & \cos(p\theta + \frac{2\pi}{3}) & \cos(p\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(p\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(p\theta) & \cos(p\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(p\theta + \frac{2\pi}{3}) & \cos(p\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(p\theta) \end{bmatrix}$$

$L_s$  est l'auto-inductance d'une bobine au stator,  $L_r$  d'une bobine au rotor.  $M_s$  est l'inductance mutuelle

entre deux bobines du stator,  $M_r$  entre deux bobines du rotor.  $M$  est l'inductance mutuelle maximum entre une bobine du rotor et une bobine du stator,  $p$  est le nombre des paires de pôles de la machine et  $\theta$  est l'angle entre les axes de la bobine  $aa'$  du stator et la bobine  $\alpha\alpha'$  du rotor.

Le couple moteur étant égal à la dérivée de l'énergie électromagnétique par rapport à la rotation  $\theta$  du rotor (voir § 1-5-2 du chapitre 1), il est donné par

$$\Gamma_m = \frac{1}{2} i^T \frac{d\mathcal{L}(\theta)}{d\theta} i \quad (3-56)$$

où  $\mathcal{L}(\theta)$  est l'inductance globale du moteur définie dans (3-55) et  $i = [i^s, i^r]^T$  est le vecteur des 6 courants du stator et du rotor. Ayant  $\Gamma_m$  et le couple résistant  $\Gamma_r$ , la vitesse  $\Omega$  du rotor se déduit de l'équation différentielle

$$J \frac{d\Omega}{dt} + c\Omega = \Gamma_m - \Gamma_r, \quad \Omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (3-57)$$

où  $J$  est le moment d'inertie de la partie tournante et  $c$  est le facteur de frottement supposé visqueux.

En remplaçant l'expression (3-55) de  $\varphi$  dans (3-54), on obtient avec (3-57) huit équations liant les variables d'état  $i^s, i^r, \theta$  et  $\Omega$  aux entrées  $v^s$ . Comme les bobinages du stator et du rotor sont supposés connectés en étoile, leurs courants vérifient les deux contraintes

$$i_a + i_b + i_c = i_\alpha + i_\beta + i_\gamma = 0 \quad (3-58)$$

ce qui réduit le nombre des équations d'état à 6 au lieu de 8.

**Modèle à variables fictives.** La présence de l'angle  $\theta$  dans les équations (3-54) et (3-56) complique l'analyse et la commande du moteur car le terme  $d\varphi/dt = (d\mathcal{L}/d\theta)\Omega i + \mathcal{L}(\theta)di/dt$  introduit dans ces équations des coefficients de  $i$  et de  $di/dt$  variant avec  $\theta$ . Heureusement, par un changement de base convenable, il existe plusieurs manières d'éliminer  $\theta$  de ces équations. Comme le montre la figure 3-31, une possibilité consiste à projeter les composantes des vecteurs  $v^s, i^s$  et  $\varphi^s$  écrits dans le repère  $(e^a, e^b, e^c)$  et des vecteur  $i^r$  et  $\varphi^r$  écrits dans le

repère  $(e^\alpha, e^\beta, e^\gamma)$  sur un repère fixé au stator d-q-0. L'axe q est confondu avec l'axe de la bobine  $aa'$ , l'axe d est orthogonal à q et un troisième axe immatériel, noté 0, selon lequel la composante des images de  $i^s$  et  $i^r$  par cette transformation sera annulée grâce aux contraintes (3-58).

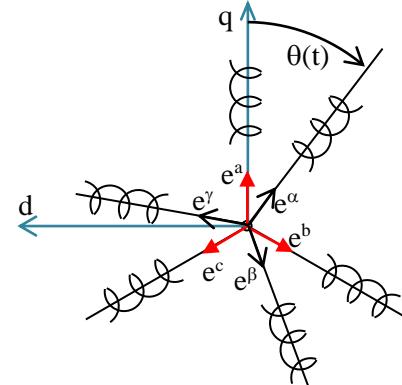


Fig. 3-31 Les repères du stator, du rotor et d-q

De cette figure on déduit que la matrice orthonormée qui associe à un vecteur physique du stator son image dans le repère d-q-0 est

$$K_s = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \quad (3-59)$$

Pour une machine à une seule paire de pôles, la matrice de passage qui associe à un vecteur physique du rotor un vecteur dans le repère d-q-0 dépend évidemment de  $\theta$  et elle est donnée par

$$K_r = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sin\theta & -\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (3-60)$$

La transformation  $K_s$  d'une machine à  $p$  paires de pôles s'obtient en remplaçant dans la formule précédente  $\theta$  par  $p\theta$ . Le choix des constantes

$\sqrt{2/3}$  et  $1/\sqrt{2}$  rend les matrices  $K_s$  et  $K_r$  orthonormées, c.à.d. leurs colonnes (et leurs lignes) sont orthogonales et unitaires. On sait que l'inverse d'une telle matrice est sa transposée.

Désignons par  $v^{ps} = [v_{qs}, v_{ds}, v_{0s}]^T$ ,  $i^{ps} = [i_{qs}, i_{ds}, i_{0s}]^T$  et  $\phi^{ps} = [\phi_{qs}, \phi_{ds}, \phi_{0s}]^T$  les images des vecteurs  $v^s$ ,  $i^s$  et  $\phi^s$  par la transformation  $K_s$  et par  $i^{pr} = [i_{qr}, i_{dr}, i_{0r}]^T$  et  $\phi^{pr} = [\phi_{qr}, \phi_{dr}, \phi_{0r}]^T$  les images des vecteurs  $i^r$  et  $\phi^r$  par la transformation  $K_r$ . D'une façon plus compacte, l'image  $x^p = [x^{ps}, x^{pr}]^T$  d'un vecteur physique  $x = [x^s, x^r]^T$  est

$$x^p = Kx \quad \text{où} \quad K = \begin{pmatrix} K_s & 0 \\ 0 & K_r \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = K^{-1}x^p = K^T x^p$$

De cette relation on déduit que les équations (3-54) et (3-55) sont équivalentes aux suivantes

$$v^p = K\mathcal{R}K^T i^p + K \frac{d(K^T \phi^p)}{dt}$$

$$= \mathcal{R}i^p + K \frac{dK^T}{dt} \phi^p + \frac{d\phi^p}{dt}, \quad (3-61)$$

$$\phi^p = K\mathcal{L}(\theta)K^T i^p.$$

En développant les équations précédentes par un calcul assez long mais direct et tenant compte des contraintes (3-58) qui annulent  $i_{0s}$  et  $i_{0r}$ , on aboutit aux équations suivantes :

$$\begin{cases} v_{qs} = R_s i_{qs} + \dot{\phi}_{qs} \\ v_{ps} = R_s i_{ds} + \dot{\phi}_{ds} \\ 0 = R_r i_{qr} - p\Omega\phi_{dr} + \dot{\phi}_{qr} \\ 0 = R_r i_{dr} - p\Omega\phi_{qr} + \dot{\phi}_{dr} \end{cases} \quad (3-62)$$

avec

$$\begin{cases} \phi_{qs} = A_s i_{qs} + B_i_{qr} \\ \phi_{ds} = A_s i_{ds} + B_i_{dr} \\ \phi_{qr} = B_i_{qs} + A_r i_{qr} \\ \phi_{dr} = B_i_{ds} + A_r i_{dr} \end{cases} \quad (3-63)$$

où  $A_s = L_s - M_s$ ,  $A_r = L_r - M_r$ ,  $B = 3M/2$ .

On constate que les coefficients des  $i$  et des  $\phi$  dans (3-62) et (3-63) sont maintenant indépendants de  $\theta$  mais la non-linéarité de ces équations subsiste à cause des termes  $\Omega\phi_{dr}$  et  $\Omega\phi_{qr}$ .

En dérivant les équations (3-63) par rapport au temps et en remplaçant dans (3-62), on obtient avec les deux équations (3-57) les 6 équations d'état du moteur dont les variables d'état sont les 4 courants  $i_{ds}$ ,  $i_{qs}$ ,  $i_{dr}$ ,  $i_{qr}$ , la rotation  $\theta$  et la vitesse  $\Omega$ . Les entrées sont les tensions  $v_{ds}$  et  $v_{qs}$  ainsi que le couple moteur et le couple résistant. On peut aussi obtenir à partir des équations (3-62) et (3-63) des équations d'état dont les variables d'état sont les flux ou une combinaison de flux et de courants.

Enfin en remplaçant dans (3-57) le vecteur de courant  $i$  par  $K^T i^p$  et tenant compte de l'expression  $\mathcal{L}(\theta)$  donnée dans (3-55), on trouve que le couple moteur est lié à la transformation des courants par

$$\Gamma_m = \frac{1}{2} (i^p)^T K \frac{d\mathcal{L}(\theta)}{d\theta} K^T i^p,$$

$$= (i^{ps})^T K_s \frac{d\mathcal{L}_m}{d\theta} K_r^T i^{pr}.$$

Le calcul de ce produit donne :

$$\Gamma_m = \frac{3}{2} M_p (i_{qs} i_{dr} - i_{ds} i_{qr}). \quad (3-64)$$

### EXERCICE 3-8

En choisissant pour un moteur à induction les variables d'état

$x_1 = \theta$ ,  $x_2 = \Omega$ ,  $x_3 = \phi_{qr}$ ,  $x_4 = \phi_{dr}$ ,  $x_5 = i_{qs}$ ,  $x_6 = i_{ds}$ , écrire ses équations d'état.

## 3-5 MOTEURS LINÉAIRES À FLUIDE

Un moteur linéaire à fluide effectue des mouvements de translation et se déplace sous l'action d'une pression hydraulique ou pneumatique. En général, un moteur hydraulique (à l'huile) est lent mais exerce une force élevée tandis qu'un

moteur pneumatique (à air) est rapide mais exerce une force faible.

La figure 3-32 représente les deux parties de ce moteur. Il est constitué d'un cylindre muni d'un piston, appelé *vérin*, connecté par ses 2 orifices à un autre cylindre, appelé *distributeur*, de plus petites dimensions, comportant 5 orifices et muni d'un tiroir à 2 pistons.

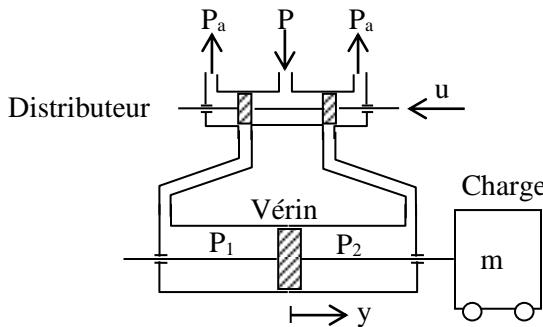


Fig. 3-32 Moteur linéaire à fluide

Quand le tiroir du distributeur est déplacé de  $u$  vers la gauche, un fluide sous une pression  $P$  (provenant d'une pompe s'il s'agit d'huile ou d'un compresseur s'il s'agit d'air) traverse l'orifice inférieur gauche du distributeur, pénètre dans le compartiment 1 du vérin et déplace le piston avec sa charge de  $y$  vers la droite. Un autre débit de fluide sort du compartiment 2 du vérin à travers l'orifice inférieur droit du distributeur pour retourner à un milieu (réservoir, atmosphère, ...) où règne une pression  $P_a < P$ . Par symétrie, quand le tiroir du distributeur est déplacé vers la droite, la charge est tirée par le piston du vérin vers la gauche.

Il est à remarquer que grâce à l'équilibre des forces dans le distributeur, le déplacement de son tiroir ne nécessite qu'une action très faible pouvant être appliquée par un petit électroaimant, par une pression externe ou par un petit moteur. L'énergie qui déplace la charge provient de la pompe ou du compresseur et le distributeur joue le rôle d'un amplificateur qui transforme le signal  $u$  de faible puissance en un signal  $y$  de forte puissance.

Nous établissons le modèle de ce moteur dans le cas où le fluide moteur est un liquide incompressible (huile) et dans le cas où le fluide est un gaz compressible (air).

**Vérin hydraulique.** Durant un laps de temps  $dt$ , la charge se déplace de  $dy$  tel que

$$Sdy = qdt \quad (3-65)$$

où  $S$  est la section du cylindre et  $q$  est le débit d'huile qui rentre dans le vérin par l'un des orifices inférieurs du distributeur et sort de l'autre. Le liquide étant incompressible, ce débit est le même aux deux orifices et comme leur ouverture  $u$  est aussi la même, on a la même chute de pression  $\Delta P_0$ . D'où  $P - P_a = \Delta P - 2\Delta P_0$ ,  $\Delta P$  étant la différence entre les pressions  $P_1$  et  $P_2$  dans les deux compartiments du vérin. Le débit  $q$  croît avec l'ouverture  $u$  et il décroît quand  $\Delta P$  augmente. En posant  $q = g(u, \Delta P)$ , l'équation (4-65) s'écrit :

$$S\dot{y} = g(u, \Delta P). \quad (3-66)$$

En admettant que  $u$  et  $\Delta P$  restent suffisamment petits et sachant que  $g(0, 0) = 0$ , on peut remplacer dans l'équation précédente  $g(u, \Delta P)$  par son développement de Taylor de premier ordre et écrire

$$S\dot{y} = a.u - b.(\Delta P) \quad (3-66)$$

où

$$a = \frac{\delta g}{\delta u} \Big|_{\substack{u=0 \\ \Delta P=0}} > 0, \quad b = -\frac{\delta g}{\delta \Delta P} \Big|_{\substack{u=0 \\ \Delta P=0}} > 0.$$

Pour obtenir la relation entre l'entrée  $u$  et la sortie  $y$ , il reste à écrire  $\Delta P$  en fonction de ces variables. Or si  $m$  est la masse du piston du vérin avec sa charge et  $c$  le facteur de frottement, on a :

$$S\Delta P = m\ddot{y} + c\dot{y}.$$

En remplaçant l'expression de  $\Delta P$  dans (3-66) et en employant l'opérateur de dérivation «  $s$  », on arrive à la fonction de transfert :

$$\frac{y}{u} = \frac{v_L}{s(\tau s + 1)} \quad (3-67)$$

où

$$v_L = \frac{a}{cb + S^2} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{bm}{cb + S^2}.$$

$v_L$  est la vitesse limite du piston du vérin par unité de déplacement du tiroir et  $\tau$  est la constante de temps de cette vitesse. Moyennant certains dispositifs, ce moteur ainsi que les moteurs alternatifs peuvent être traités comme un moteur à courant continu commandé par son induit.

**Vérin pneumatique.** D'après la loi de Newton, le mouvement du piston du vérin avec sa charge a pour équations

$$\frac{dy}{dt} = v, \quad m \frac{dv}{dt} = S(P_1 - P_2).$$

En admettant que le fluide est un gaz parfait et que la température  $T$  est constante égale à celle du milieu ambiant, les équations précédentes s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= v \\ m \frac{dv}{dt} &= S \left( \frac{n_1 \mathcal{R}T}{V_1} - \frac{n_2 \mathcal{R}T}{V_2} \right) \\ &= \mathcal{R}T \left( \frac{n_1}{L+y} - \frac{n_2}{L-y} \right) \end{aligned} \quad (3-68)$$

où  $\mathcal{R}$  est la constante des gaz,  $L$  la demi-longueur du vérin,  $n_1$  et  $n_2$  les nombres de moles dans ses compartiments. Comme le débit molaire à travers un orifice inférieur du distributeur dépend de la différence de pression à ses bornes et du déplacement  $u$  du tiroir, on a :

$$\begin{aligned} \frac{dn_1}{dt} &= g(u, \Delta_1 P), \\ \frac{dn_2}{dt} &= -g(u, \Delta_2 P), \end{aligned} \quad (3-69)$$

avec

$$\Delta_1 P = \begin{cases} P - P_1 & \text{si } u \geq 0 \\ P_1 - P_a & \text{si } u < 0 \end{cases}, \quad \Delta_2 P = \begin{cases} P - P_2 & \text{si } u < 0 \\ P_2 - P_a & \text{si } u \geq 0 \end{cases}$$

et

$$P_1 = \frac{n_1 \mathcal{R}T}{S(L+y)}, \quad P_2 = \frac{n_2 \mathcal{R}T}{S(L-y)}.$$

Les quatre équations (3-68) et (3-69) constituent les équations d'état du moteur.

### EXERCICE 3-9

Simuler sur Matlab l'état  $x(t)$  d'un vérin pneumatique à un déplacement  $u = 5 \sin(0.1\pi t)$  mm du tiroir. Paramètres : la demi longueur du vérin est  $L = 0.5$ m, sa section est  $S = 50 \text{ cm}^2$ , la masse de la charge est  $m = 5 \text{ kg}$ ,  $T = 300 \text{ }^\circ\text{K}$ ,  $\mathcal{R} = 8.3 \text{ J/(moles.}^\circ\text{K)}$  et  $g(u, \Delta P) = 10^{-2} u \sqrt{\Delta P}$  moles/sec.  $P = 5$  bars et  $P_a = 1$  bar.

## 3-6 TRANSMISSION MÉCANIQUE

On rencontre souvent la nécessité de transmettre le mouvement d'un moteur d'un point de l'espace à un autre et de le modifier : augmenter ou diminuer la vitesse ou le couple, changer la direction du mouvement, transformer la rotation en translation ou vis versa. Avant de dire comment ceci peut être réalisé, nous allons commencer par montrer que si les éléments de l'arbre de transmission ne sont pas suffisamment rigides, ils peuvent déphasier le mouvement transmis et lui ajouter des vibrations.

### Transmission entre 2 inerties.

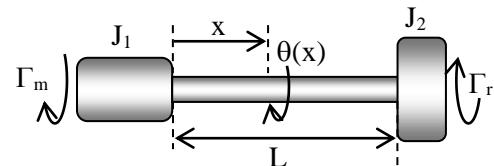


Fig. 3-33 Transmission entre deux inerties

La figure 3-33 représente deux cylindres d'inerties  $J_1$  et  $J_2$  fixés aux extrémités d'un axe de longueur  $L$ , de moment d'inertie  $\mu$  par unité de longueur et de module de rigidité  $G$ .

En appliquant un couple moteur  $\Gamma_m$  sur  $J_1$  et un couple résistant  $\Gamma_r$  sur  $J_2$ ,  $J_1$  tourne de  $\theta_1$  et  $J_2$  de  $\theta_2$  et on suppose, pour simplifier, que la rotation  $\theta(x)$  d'une section de l'axe d'abscisse  $x$  varie de  $\theta_1$  et  $\theta_2$  d'une manière linéaire, c.à.d.

$$\theta(x) = (1 - \xi)\theta_1 + \xi\theta_2, \quad \xi = x / L. \quad (3-70)$$

Sa dérivée par rapport au temps (sa vitesse) est

$$\dot{\theta}(x) = (1 - \xi)\dot{\theta}_1 + \xi\dot{\theta}_2. \quad (3-71)$$

Pour déterminer la relation entre le vecteur d'entrée  $[\Gamma_m; -\Gamma_r]$  et le vecteur de sortie  $[\theta_1; \theta_2]$ , appliquons les équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\delta W_c}{\delta \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\delta W_c}{\delta \theta_i} + \frac{\delta W_p}{\delta \theta_i} = f_{\theta_i}, \quad i=1,2, \quad (3-72)$$

où  $W_c$  et  $W_p$  sont respectivement l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système et où  $f_{\theta_i} = \Gamma_m$  et  $f_{\theta_2} = -\Gamma_r$ .  $W_c$  est la somme des énergies cinétiques  $J_1\dot{\theta}_1^2/2, J_2\dot{\theta}_2^2/2$  de  $J_1$  et  $J_2$  et de celle de l'axe. En désignant par  $\mu$  le moment d'inertie par unité de longueur de l'axe et tenant compte de (3-71), l'énergie cinétique de l'axe est donnée par

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^L (\mu dx) \dot{\theta}^2(x) \\ &= \frac{L\mu}{2} \left[ \dot{\theta}_1^2 \int_0^1 (1-\xi)^2 d\xi + \dot{\theta}_2^2 \int_0^1 \xi^2 d\xi + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \int_0^1 (1-\xi)\xi d\xi \right] \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{J}{3} \dot{\theta}_1^2 + \frac{J}{3} \dot{\theta}_2^2 + \frac{J}{3} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \right) \end{aligned}$$

où  $J = L\mu$  est le moment d'inertie de la tige. Donc

$$W_c = \frac{1}{2} \left( J_1 + \frac{J}{3} \right) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \left( J_2 + \frac{J}{3} \right) \dot{\theta}_2^2 + \frac{J}{6} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2. \quad (3-73)$$

D'autre part, la raideur à la torsion d'un élément de l'axe de longueur  $dx$  est  $GI/dx$ ,  $I$  étant le moment quadratique de la section. L'énergie potentielle emmagasinée dans cet axe est donc

$$W_p = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{GI}{dx} (d\theta)^2 = \frac{GI}{2} \int_0^L \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx.$$

De l'hypothèse de linéarité (3-70) de  $\theta(x)$ , on déduit que

$$W_p = \frac{1}{2} k (\theta_2 - \theta_1)^2 \quad (3-74)$$

où  $k = GI/L$  est la raideur de l'axe.

Ayant les expressions (3-73) et (4-74) de  $W_c$  et  $W_p$ , l'application des équations de Lagrange (3-72) conduit aux suivantes :

$$\left( J_1 + \frac{J}{3} \right) \ddot{\theta}_1 + \frac{J}{6} \ddot{\theta}_2 - k(\theta_2 - \theta_1) = \Gamma_m, \quad (3-75)$$

$$\left( J_2 + \frac{J}{3} \right) \ddot{\theta}_2 + \frac{J}{6} \ddot{\theta}_1 + k(\theta_2 - \theta_1) = -\Gamma_r. \quad (3-76)$$

En remplaçant dans les équations précédentes l'opérateur  $d/dt$  par  $s$ , on trouve que le vecteur d'entrée  $u = [\Gamma_m; -\Gamma_r]$  est lié au vecteur de sortie  $y = [\theta_1; \theta_2]$  par

$$y = G(s)u,$$

où

$$G(s) = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \left( J_2 + \frac{J}{3} \right) s^2 + k & -\left( \frac{J}{6} s^2 - k \right) \\ -\left( \frac{J}{6} s^2 - k \right) & \left( J_1 + \frac{J}{3} \right) s^2 + k \end{pmatrix} \quad (3-77)$$

avec

$$\Delta = \left[ \left( J_1 + \frac{J}{3} \right) s^2 + k \right] \left[ \left( J_2 + \frac{J}{3} \right) s^2 + k \right] - \left( \frac{J}{6} s^2 - k \right)^2$$

est appelé la matrice de transfert entre les vecteurs  $u$  et  $y$ . Pour avoir une idée sur la fréquence des oscillations de la torsion  $\alpha = \theta_1 - \theta_2$  de l'axe, supposons que  $J_1 = J_2 = J_m$  et retranchons (3-76) de (3-75). On obtient :

$$\left( J_m + \frac{J}{6} \right) \ddot{\alpha} + 2k\alpha = \Gamma_m + \Gamma_r.$$

La fréquence naturelle de ces oscillations est donc

$$\omega_\alpha = \sqrt{2k / (J_m + J/6)}.$$

#### EXERCICE 3-10

Montrer à partir de (3-77) que si  $k \rightarrow \infty$ , le système de la figure 3-33 se comporte comme une seule inertie et si, pour  $k < \infty$ , on néglige le moment d'inertie de l'axe, il se comporte comme deux inerties liées par un ressort rotatif.

**Transmission par engrenages.** La rotation d'une inertie  $J_1$  peut être transmise à une autre inertie  $J_2$  à travers un engrenage de roues dentées, appelées pignons (fig. 3-34). Cette transmission de mouvement est effectuée grâce à la force de contact entre une dent d'un pignon avec une dent de l'autre pignon comme le montre la figure 3-35.

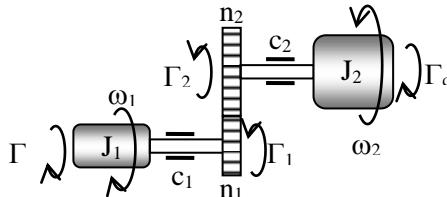


Fig. 3-34 Arbre de transmission par

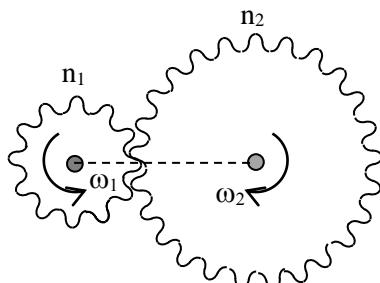


Fig. 3-35 Engrenage de deux pignons à axes

Durant un temps donné, la droite joignant les centres de rotation est traversée par autant de dents du premier pignon que du second. Par conséquent, si les pignons comportent  $n_1$  et  $n_2$  dents et tournent avec les vitesses  $N_1 = \omega_1/2\pi$  et  $N_2 = \omega_2/2\pi$  tours par seconde, on a :

$$n_1\omega_1 = n_2\omega_2 \quad \text{ou} \quad \omega_2 = \frac{\omega_1}{n} \quad (3-78)$$

où  $n = n_2/n_1$  est le *rappor de réduction* de la vitesse.

D'autre part, soit  $\Gamma_1$  le couple qui résiste à la rotation du premier pignon de vitesse  $\omega_1$  et  $\Gamma_2$  le couple transmis par contact au second pignon pour l'entrainer à la vitesse  $\omega_2$ . Si l'on néglige les pertes d'énergie par frottement entre les dents des pignons, la puissance fournie au premier pignon sera entièrement reçue par le second d'où  $\Gamma_1\omega_1 = \Gamma_2\omega_2$  et, d'après (3-78), on a :

$$\Gamma_2 = n\Gamma_1. \quad (3-79)$$

Ainsi, la vitesse du petit pignon est plus grande que la vitesse du grand mais le couple du petit est inférieur au couple du grand.

Considérons maintenant le système de la figure 3-34 et supposons que les axes liant les inerties aux pignons sont infiniment rigides (grandes sections par rapport aux longueurs) et que les frottements sur ces axes sont visqueux de facteurs  $c_1$  et  $c_2$ . La loi de Newton appliquée à chaque axe de l'arbre s'écrit :

$$\begin{aligned} \Gamma_m - \Gamma_1 &= J_1 s\omega_1 + c_1\omega_1, \\ \Gamma_2 - \Gamma_c &= J_2 s\omega_2 + c_2\omega_2. \end{aligned}$$

où  $s$  est l'opérateur  $d/dt$ . Tenant compte des relations (3-78) et (3-79), on déduit des équations précédentes les relations suivantes liant les vitesses  $\omega_1$  et  $\omega_2$  aux couples  $\Gamma_m$  et  $\Gamma_c$

$$\omega_1 = \frac{\Gamma_m - \Gamma_c / n}{(J_1 + J_2 / n^2)s + (c_1 + c_2 / n^2)} \quad (3-80)$$

$$\text{et} \quad \omega_2 = \frac{n\Gamma_m - \Gamma_c}{(n^2 J_1 + J_2)s + (n^2 c_1 + c_2)}. \quad (3-81)$$

L'expression (3-80) montre que la vitesse  $\omega_1$  est celle d'un axe unique d'inertie  $J_{eq} = J_1 + (n_1/n_2)^2 J_2$ , de facteur de frottement  $c_{eq} = c_1 + (n_1/n_2)^2 c_2$  et soumis au couple  $\Gamma_{eq} = \Gamma_m - (n_1/n_2)\Gamma_c$ . De même l'expression d'après (3-81) montre que la vitesse  $\omega_2$  est celle d'un axe d'inertie  $J_{eq} = J_2 + (n_2/n_1)^2 J_1$ , de facteur de frottement  $c_{eq} = c_2 + (n_2/n_1)^2 c_1$  et soumis au couple  $\Gamma_{eq} = (n_2/n_1)\Gamma_m - \Gamma_c$ .

Comme le montre la figure 3-36, le train de transmission par engrenage est analogue à un transformateur réel où les vitesses sont remplacées par des courants, les couples par des tensions, les inerties par des inductances, les frottements par des résistances et l'engrenage, ayant les relations (3-78) et (3-79), par un transformateur idéal. D'autre part, conformément aux équations (3-80) et (3-81), le transformateur vu du primaire est équivalent au circuit de la figure 3-37a et vu du secondaire, il est équivalent au circuit de la figure 3-37b.

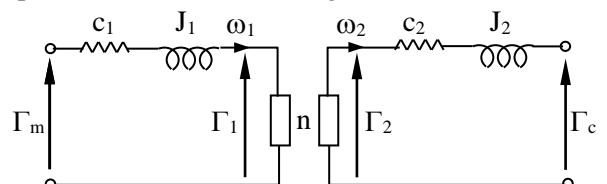


Fig. 4-36 Circuit équivalent à un train de transmission

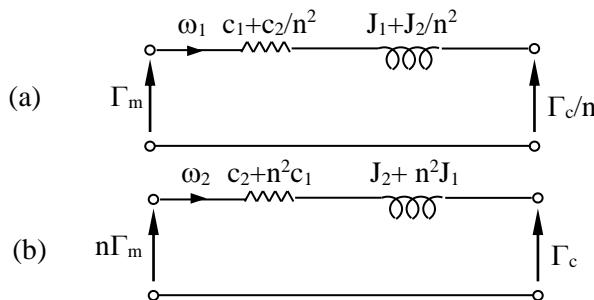


Fig. 3-37 Circuits équivalents d'un transformateur

Les relations (3-80) et (3-81) se généralisent au cas d'un train de transmission à  $k$  axes et  $k - 1$  engrenages de rapports de réduction  $n_1, n_2, \dots, n_{k-1}$  (fig. 3-38).

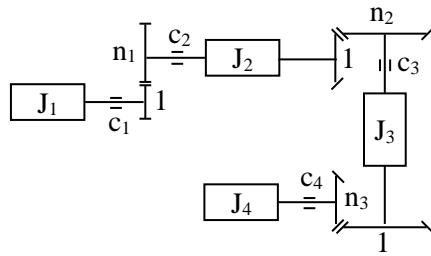


Fig. 3-38 Train de transmission à plusieurs engrenages

La vitesse du  $i^{\text{ème}}$  axe est donnée par la formule :

$$\omega_i(s) = \frac{\Gamma_{im}(s) - \Gamma_{ic}(s)}{J_{ieq}s + c_{ieq}}, \quad i = 1, \dots, k, \quad (3-82)$$

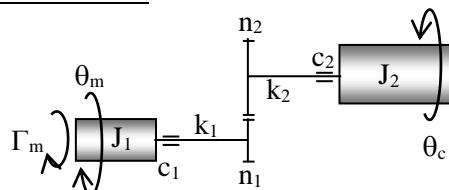
$$\text{où } \Gamma_{im} = n_1 \dots n_{i-1} \Gamma_m, \quad \Gamma_{ic} = \frac{c}{n_{k-1} \dots n_i}$$

et

$$J_{ieq} = J_i + \sum_{r=1}^{i-1} n_r^2 \dots n_{i-1}^2 J_r + \sum_{r=i+1}^k \frac{J_r}{n_{r-1}^2 \dots n_i^2},$$

$$c_{ieq} = c_i + \sum_{r=1}^{i-1} n_r^2 \dots n_{i-1}^2 c_r + \sum_{r=i+1}^k \frac{c_r}{n_{r-1}^2 \dots n_i^2}.$$

### EXERCICE 3-11



Écrire la fonction de transfert entre  $\Gamma_m$  et  $\theta_c$  du système ci-dessus où les axes connectant les inerties  $J_1$  et  $J_2$  à l'engrenage sont d'inertie négligeable mais

de raideurs  $k_1$  et  $k_2$ . Les inerties des pignons sont aussi négligeables.

**Transmission par courroie.** La figure 3-38 représente un système de transmission par courroie. L'axe moteur et l'axe de charge sont reliés aux centres de deux poulies de rayons  $r_1$  et  $r_2$ . Les inerties de ces deux arbres sont  $J_1$  et  $J_2$  de facteurs de frottement  $c_1$  et  $c_2$ . Une courroie élastique montée autour des poulies assure la transmission de la rotation de l'axe moteur à l'axe de charge.

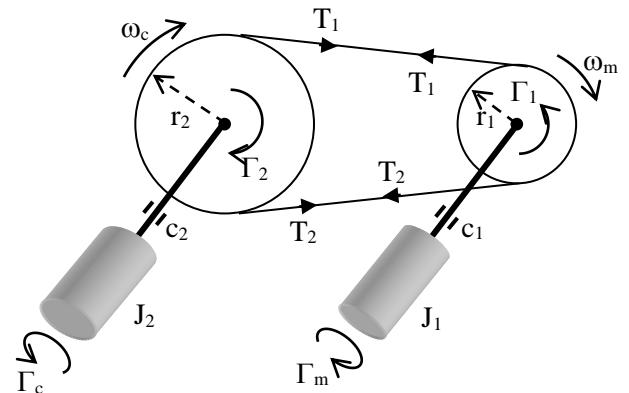


Fig. 3-39 Transmission par courroie

La courroie, préalablement tendue, exerce sur les poulies durant leur rotation une tension  $T_1$  par sa partie supérieure et une tension  $T_2$  par sa partie inférieure. La variation de ces tensions durant un laps de temps  $dt$  est proportionnelle à la variation des longueurs des parties correspondantes de la courroie. En d'autres termes,

$$dT_1 = -dT_2 = \lambda(r_1\omega_m - r_2\omega_c)dt \quad (3-83)$$

où  $\omega_m$  et  $\omega_c$  sont les vitesses angulaires des poulies et  $\lambda$  le module d'élasticité de la courroie. Le couple qui résiste à la rotation de l'axe moteur et le couple qui entraîne l'axe de charge sont respectivement :

$$\Gamma_1 = r_1(T_1 - T_2) \quad \text{et} \quad \Gamma_2 = r_2(T_1 - T_2). \quad (3-84)$$

Les équations (3-83) et (3-84) impliquent que

$$\frac{d\Gamma_1}{dt} = 2\lambda r_1^2 (\omega_m - \frac{r_2}{r_1} \omega_c) \quad (3-85)$$

$$\text{et} \quad \Gamma_2 = \frac{r_2}{r_1} \Gamma_1. \quad (3-86)$$

La loi de Newton à chaque axe s'écrit

quand le couple moteur est le créneau  $\Gamma_m(t) = 1(t) - 1(t-1)$  Nm.

$$\begin{aligned}\Gamma_m - \Gamma_1 &= J_1 s\omega_m + c_1 \omega_m, \\ \Gamma_2 - \Gamma_c &= J_2 s\omega_c + c_2 \omega_c,\end{aligned}\quad (3-87)$$

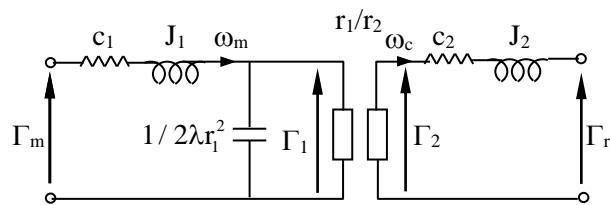
et les équations (3-85) et (3-86) conduisent à la relation matricielle suivante entre l'entrée  $[\Gamma_m ; \Gamma_c]$  et la sortie  $[\omega_m ; \omega_c]$ .

$$\begin{pmatrix} \omega_m \\ \omega_c \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} s(J_2 s + c_2) + 2\lambda r_2^2 & -2\lambda r_1 r_2 \\ 2\lambda r_1 r_2 & s(J_1 s + c_1) + 2\lambda r_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_m \\ \Gamma_c \end{pmatrix} \quad (3-88)$$

avec

$$\Delta = s(J_1 s + c_1)(J_2 s + c_2) + 2\lambda[r_1^2(J_2 s + c_2) + r_2^2(J_1 s + c_1)]$$

L'analogue électrique de l'arbre de transmission par courroie est le circuit de la figure 3-39 déduit des équations (3-85), (3-86) et (3-87). Ce circuit diffère de celui de la figure 3-36 par la présence de la capacité aux bornes du primaire du transformateur. Cette capacité, qui simule l'élasticité de la courroie, amortie les variations des courants en absorbant ou en débitant des charges électriques. De la même manière, la courroie amortit les variations des vitesses en cédant une partie de son énergie potentielle pour la transformer en énergie cinétique ou en absorbant de l'énergie cinétique et l'emmagasse sous forme d'énergie potentielle.



**Fig. 3-39** Circuit équivalent de la transmission par courroie

#### EXERCICE 3-12

Les systèmes des figures 3-34 et 3-39 ont les mêmes moments d'inertie  $J_1 = J_2 = 2(10^{-2})$  kgm<sup>2</sup>, les mêmes facteurs de frottement  $c_1 = c_2 = 4(10^{-2})$  Nm/(rd/s) et le même facteur de réduction  $n = n_2/n_1 = r_2/r_1$  avec  $r_1 = 4$  cm et  $r_2 = 20$  cm. Le module d'élasticité de la courroie est  $\lambda = 80$  N/cm. Pour un couple résistant nul ( $\Gamma_c = 0$ ), Représenter dans le même plan la vitesse de la charge de chacun de ces systèmes

### AUTRES EXERCICES ET COMPLÉMENTS

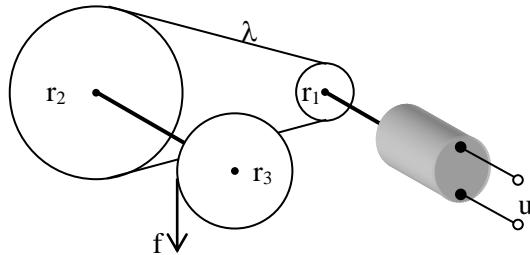
**3-13** Un moteur à courant continu commandé par son courant d'armature avec un courant d'excitation  $i_f = 2 \text{ A}$ , a la fonction de transfert

$$\frac{\Omega}{u_a} = \frac{3}{s+1}$$

où  $u_a$  est la tension appliquée à l'armature et  $\Omega$  sa vitesse de rotation. La résistance de l'induit est  $R_a = 2 \Omega$  et pour  $u_a = 100 \text{ V}$ , le courant limite de l'induit est 2 A. En négligeant l'inductance de l'induit et les pertes dans l'acier,

- déterminer le moment d'inertie  $J$  de l'arbre moteur, sa constante de frottement  $c$  et le facteur  $k$  du couple moteur ( $\Gamma_m = k_i a i_f$ ).
- La résistance et l'inductance de l'inducteur étant  $R_f = 1.5 \Omega$  et  $L_f = 0.3 \text{ H}$ , déterminer la fonction de transfert du moteur quand il est commandé par la tension  $u_f$  appliquée à l'inducteur avec un courant d'induit  $i_a = 1 \text{ A}$ .

**3-14** Un moteur cc commandé par son induit, d'inductance négligeable et de résistance  $R_a = 5 \Omega$ , a un facteur de couple  $k_a$  et un facteur de contre réaction de la vitesse  $k_b$  égales à  $0.4 \text{ Nm/A}$ . Ce moteur entraîne 2 arbres par l'intermédiaire de 2 poulies de rayons  $r_1 = 5 \text{ cm}$  et  $r_2 = 15 \text{ cm}$  et d'une courroie d'élasticité  $\lambda = 10^4 \text{ N/m}$ .

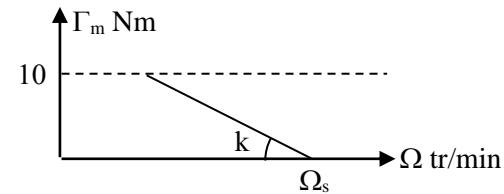


Une troisième poulie de rayon  $r_3 = 10 \text{ cm}$  à l'extrémité du deuxième arbre entraîne une charge qui exerce une force  $f$ . Les moments d'inertie des deux arbres sont  $J_1 = 10^{-3}$  et  $J_2 = 2(10^{-2}) \text{ kgm}^2$  leurs facteurs de frottement sont  $c_1 = c_2 = 5(10^{-3}) \text{ N/(rd/s)}$ .

Écrire les équations de ce système et déduire, en fonction de  $f$ , la relation entre  $v$ ,  $u$  et  $f$  où  $v$  est la vitesse de la charge et  $u$  est la tension appliquée à l'induit du moteur.

**3-15** La partie stable de la caractéristique mécanique d'un moteur à induction triphasé,

alimenté par une tension efficace  $V$  volts et une fréquence  $f$  Hz telles que  $V/f = 6$  volts/Hz, peut être approximée par le segment suivant dont la pente est  $k = -0.01 \text{ Nm/(tours/min)}$  et la vitesse de synchronisme est  $\Omega_s = 60f$  tours/min.



Déterminer en fonction du couple résistant  $\Gamma_r$ , compris entre 0 et 10 Nm, la tension  $V$  qu'il faut appliquer à ce moteur pour que la vitesse en régime permanent soit égale à 1500 tr/min.

**3-16** On considère un moteur dont le bobinage du rotor est le même qu'un moteur à induction mais que son stator ne comporte que deux bobines  $aa'$  et  $bb'$  décalées dans l'espace de  $90^\circ$  et alimentées par deux tensions  $v_p = V_p \cos \omega t$  et  $v_c = V_c \sin \omega t$  appelées respectivement principale et de commande.

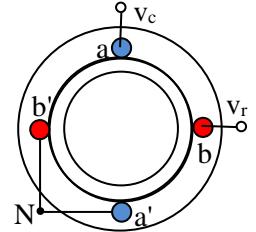
- En écrivant les inductions moyennes des deux bobines  $aa'$  et  $bb'$  sous la forme complexe

$$B_p = B_{pm} R_e (e^{j\omega t}), \quad B_c = B_{cm} e^{-j\pi/2} R_e (e^{j(\omega t - \pi/2)}),$$

$B_{pm} \geq B_{cm} > 0$ , montrer que leur résultante  $B_r$  est la somme de deux inductions  $B_1$  et  $B_2$  tournant en sens opposés avec la même vitesse  $\omega$ .

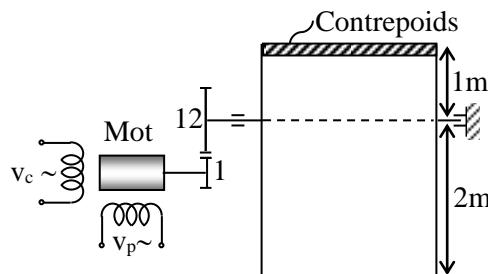
b) Montrer que l'extrémité du vecteur  $B_r$  décrit une ellipse et que son argument  $\alpha$  varie en fonction du temps selon la relation  $\tan \alpha = -(B_{cm}/B_{pm}) \tan \omega t$ . Est-ce que le flux résultant sera tournant si  $B_{pm}$  ou  $B_{cm}$  s'annule ?

c) Représenter dans le même plan en fonction de la vitesse  $\Omega$  du rotor l'allure du couple  $\Gamma_1$  et celle du couple  $\Gamma_2$  ainsi que la caractéristique mécanique  $\Gamma_m$  de ce moteur. On suppose que la résistance du rotor est  $R_r > L\omega$ .

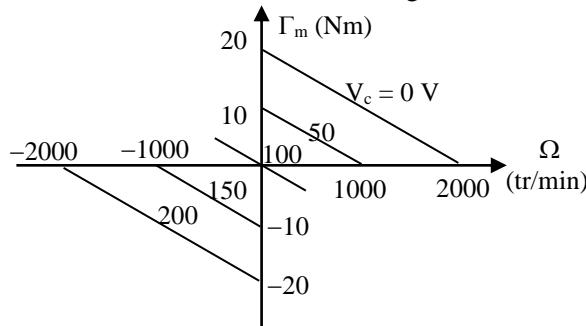


**3-17** À l'aide d'un moteur à deux phases (voir exercice 3-16) et d'un engrenage de rapport de réduction  $n = 12$ , une porte de garage dont la longueur est 3 m tourne autour d'un axe horizontal situé à 2 m de l'extrémité inférieure de la porte. Sans

le contrepoids fixé à son extrémité supérieure, la masse de la porte est  $m = 120 \text{ Kg}$ .



Pour une tension principale efficace  $V_p$  constante et pour chaque tension efficace de commande  $V_c$ , la caractéristique mécanique du moteur est presque linéaire, de pente indépendante de  $V_c$  valant  $0.01 \text{ Nm}/(\text{tr/min})$  comme le montre la figure suivante.



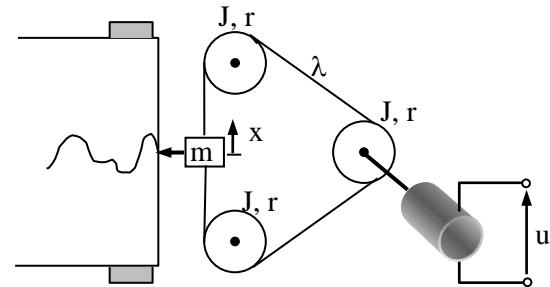
- a) Déterminer la masse du contrepoids pour que le couple résistant soit nul et calculer le moment d'inertie  $J_2$  de la porte munie de son contrepoids.
- b) Le moment d'inertie de l'arbre moteur est  $J_1 = 0.025 \text{ kgm}^2$  et le facteur de frottement global ramené à l'arbre moteur est  $c = 0.5 \text{ Nm}/(\text{rd/s})$ . Déterminer la fonction de transfert  $\Omega/V_c$  où  $\theta$  est l'angle que fait la porte avec la verticale.

**3-18** La réactance synchrone d'une phase d'un générateur triphasé synchrone à 3 pairs de pôles est  $X_{sc} = 1 \Omega$  et sa résistance  $R_s$  est négligeable. La vitesse  $\Omega$  du rotor et son courant  $I_r$  sont ajustés de sorte que la fréquence soit  $f = 50 \text{ Hz}$  et que la tension efficace à vide (courant nul) de chaque phase soit de  $V_s = 280 \text{ V}$ .

- a) Que vaut la vitesse du rotor ?
- b) La charge branchée au générateur absorbe un courant efficace  $I_s = 60 \text{ A}$  par phase. Que vaut  $V_s$  si le facteur de puissance  $\cos\phi = 0.8$  avec  $\phi > 0$  ?

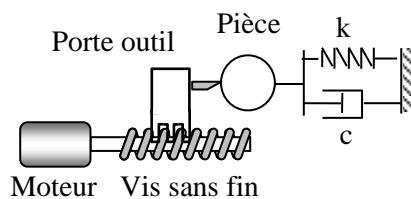
**3-19** Le stylet d'un enregistreur est entraîné par une courroie entourant 3 poulies identiques chacune de moment d'inertie  $J$  et de rayon  $r$ . La rotation des

poulies est effectuée par un moteur à courant continu commandé par son courant d'induit comme le montre la figure.



La masse du stylet est  $m$ , le module d'élasticité de la courroie est  $\lambda$ , l'inertie du rotor est  $J_m$ , la résistance de l'induit est  $R$  et la constante du couple moteur est  $k_a$ . En négligeant les frottements, l'inductance de l'induit et les pertes par courant de Foucault, déterminer la fonction de transfert  $x/u$  où  $x$  est le déplacement du stylet et  $u$  est la tension appliquée à l'induit du moteur.

**3-20** Un porte-outil est entraîné par un moteur à courant continu qui tourne (dans un sens ou dans l'autre) une vis sans fin de pas  $p$  (distance entre 2 spires). Sous l'action de l'outil et de sa propre élasticité, la pièce en usinage fléchit légèrement et se comporte comme une masse retenue par un ressort de raideur  $k$  et un amortisseur de facteur  $c$ .



Le moteur commandé par son courant d'induit  $i_a$  a un facteur de couple  $k_a$ ; le porte outil et la masse entraînée ont ensemble une masse  $m$ . En négligeant les frottements et les pertes par courant de Foucault, déterminer la fonction de transfert  $x/u$  où  $x$  est la flexion de la pièce et  $u$  est la tension appliquée à l'induit du moteur.