

# Chapitre 5

## PROCESSUS ALÉATOIRES ET IDENTIFICATION NON PARAMÉTRIQUE

Un procédé ayant une fonction de transfert connue peut être mieux commandé si l'on dispose d'un modèle qui représente suffisamment bien les perturbations réelles auxquelles il est soumis. Or, ces perturbations sont généralement incertaines pouvant varier aléatoirement avec le temps et d'une expérience à l'autre. Il est donc nécessaire pour les analyser de recourir aux techniques probabilistes dont les notions essentielles sont rappelées aux deux premiers paragraphes. Après une introduction sur les systèmes linéaires échantillonnés au paragraphe 3, on aborde au paragraphe 4 l'identification non paramétrique des systèmes et en particulier des perturbations. Aux deux derniers paragraphes nous montrons l'avantage qu'on peut tirer de cette modélisation pour commander les systèmes.

### 5-1 RAPPEL DE PROBABILITÉ

**Probabilité des événements.** En répétant plusieurs fois une même expérience, on obtient à chaque épreuve un nouveau résultat  $\omega$ . L'ensemble  $\Omega$  de tous les résultats possibles est appelé *univers*. Un *événement* est un sous-ensemble  $A$  de  $\Omega$ . Si, au bout d'une épreuve, on obtient un résultat  $\omega \in A$ , on dit que l'événement  $A$  s'est *réalisé*. Soit  $n_A$  le nombre de fois que l'événement  $A$  se réalise quand on répète l'expérience  $N$  fois. Le rapport  $n_A/N$  est appelé la *fréquence* de  $A$  et la limite de ce rapport quand  $N$  tend vers l'infini existe et on l'appelle la *probabilité* de  $A$ . On écrit :

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_A}{N} \quad (5-1)$$

Il est évident que  $0 \leq P(A) \leq 1$ . Si  $P(A) = 1$ , on dit

que  $A$  est un événement *certain* ou *presque sûr* et si  $P(A) = 0$  on dit qu'il est *impossible*. L'univers  $\Omega$  est un événement certain et l'ensemble vide  $\emptyset$  est un événement impossible. D'autre part, au bout d'une épreuve, deux événements disjoints  $A$  et  $B$  ne peuvent pas se réaliser simultanément, on dit qu'ils sont *incompatibles* et on désigne leur union par  $A+B$ . La probabilité de ce dernier événement est donnée par :

$$P(A+B) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_{(A+B)}}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_A + n_B}{N} \quad (5-2)$$

$$= P(A) + P(B)$$

et, pour  $A_i$   $i = 1, 2, \dots, m$ , disjoints on obtient par récurrence :

$$P\left(\sum_{i=1}^m A_i\right) = \sum_{i=1}^m P(A_i) \quad \forall m = 1, 2, \dots \quad (5-3)$$

Si deux événements  $A$  et  $B$  ne sont pas disjoints, le résultat  $\omega$  d'une épreuve peut appartenir à la fois à  $A$  et à  $B$  et on dit dans ce cas que l'événement d'intersection  $A \cap B$  s'est réalisé. La probabilité de l'union de  $A$  et  $B$  est alors :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (5-4)$$

avec

$$P(A \cap B) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_{A \cap B}}{N}$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_{A \cap B}}{n_B} \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_B}{N}$$

Le rapport  $(n_{A \cap B}/n_B)$  est la fréquence de la réalisation de l'événement  $A$  quand l'événement  $B$  se réalise. Sa limite, quand le nombre des épreuves  $N$  tend vers l'infini, est appelée la *probabilité*

conditionnelle de A sachant B et on la désigne par  $P(A|B)$ . D'après (5-4) et par symétrie, on a :

$$P(A \cap B) = P(B).P(A | B) = P(A).P(B | A) \quad (5-5)$$

et par récurrence de m à 1

$$P(\bigcap_{i=1}^m A_i) = P(A_1).P(A_2 | A_1) \cdots P(A_m | \bigcap_{i=1}^{m-1} A_i). \quad (5-6)$$

On dit que deux événements A et B sont *indépendants* si  $P(A|B) = P(A)$  ou, d'après (5-5), si  $P(B|A) = P(B)$ . En d'autres termes, A et B sont indépendants si la réalisation de l'un n'affecte pas les possibilités de réalisation de l'autre. D'une façon plus générale, on dit que m événements  $A_1, \dots, A_m$  sont indépendants si la probabilité de réalisation de l'un de ces événements n'est pas affectée par la réalisation d'un ou de plusieurs autres événements. Dans ce cas, l'égalité (5-6) devient :

$$P(\bigcap_{i=1}^m A_i) = \prod_{i=1}^m P(A_i). \quad (5-7)$$

Considérons une famille d'événements disjoints  $A_1, \dots, A_m$  dont l'union  $A_1 + \dots + A_m$  est un événement certain. Cette famille forme ce qu'on appelle un *système complet*. D'après (5.5), pour tout événement B et pour tout  $i = 1, \dots, m$ , on a :

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i).P(B | A_i)}{P(B)}. \quad (5-8)$$

Or, pour tout événement certain A et tout événement B,  $P(B \cap A) = P(B)$  car, comme A se réalise toujours,  $B \cap A$  se réalise si et seulement si B se réalise. D'où

$$\begin{aligned} P(B) &= P[B \cap (A_1 + \dots + A_m)] \\ &= P(B \cap A_1 + \dots + B \cap A_m) \\ &= P(A_1).P(B | A_1) + \dots + P(A_m).P(B | A_m) \end{aligned}$$

En remplaçant P(B) par son expression dans (5-8), on obtient la formule de Bayes :

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i).P(B | A_i)}{\sum_{k=1}^m P(A_k).P(B | A_k)}. \quad (5-9)$$

### Exemple 1

Trois machines  $M_1, M_2$  et  $M_3$  produisent le même type de pièces. 40% de ces pièces sont fabriquées par  $M_1$ , 30 % par  $M_2$  et 30 % par  $M_3$ . D'autre part, 5% des pièces produites par  $M_1$ , 3% des pièces produites par  $M_2$  et 2% des pièces produites par  $M_3$  sont défectueuses.

- 1) Déterminer le pourcentage des pièces défectueuses produites par ces trois machines.
- 2) Quelle est la probabilité pour qu'une pièce défectueuse soit fabriquée par  $M_1$ ?

>> Désignons par  $A_i, i = 1, 2, 3$ , l'événement « pièce fabriquée par  $M_i$  » et par B l'événement « pièce défectueuse ». Comme  $A_1, A_2, A_3$  forment un événement complet,

1)

$$\begin{aligned} P(B) &= P[B \cap (A_1 + A_2 + A_3)] \\ &= \sum_{i=1}^3 P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^3 P(A_i).P(B | A_i) \\ &= (0.4).(0.05) + (0.3).(0.03) + (0.3).(0.02) \\ &= 0.035 \text{ soit } 3.5\%. \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} P(A_1 | B) &= P(A_1).P(B | A_1) / P(B) \\ &= (0.4).(0.05) / (0.035) = 0.571. \end{aligned}$$

### Loi de probabilité d'une variable aléatoire.

Considérons l'univers  $\Omega$  d'une certaine expérience dont les éléments sont les résultats possibles  $\omega$ . Ces résultats ne sont pas nécessairement numériques (boule tirée d'une urne, individu choisi au hasard d'une population, ...). Une *variable aléatoire* (v.a) est une application X qui associe à tout  $\omega \in \Omega$  une valeur  $x \in \mathcal{R}$  (le numéro de la boule, la taille de l'individu, ...). L'ensemble  $X(\Omega)$  des valeurs associées aux  $\omega$  est, généralement, une union d'intervalles  $(a_i, b_i)$  fermés, ouverts ou semi-ouverts. En particulier, si  $X(\Omega)$  est dénombrable (c'est-à-dire, si ses éléments peuvent être numérotés:  $x_1, x_2, \dots$ ), il est l'union d'intervalles fermés contenant chacun un seul point :  $X(\Omega) = [x_1, x_1] \cup [x_2, x_2] \cup \dots$ . Dans ce cas on dit que la variable aléatoire X est *discrète* et on écrit  $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots\}$ .

Soit  $x \in \mathcal{R}$  et désignons par  $(X < x)$  l'ensemble  $A$  des  $\omega$  tels que  $X(\omega) < x$  :

$$(X < x) = \{\omega \mid X(\omega) < x\} = A \subset \Omega. \quad (5-10)$$

La fonction  $F$  qui associe à tout  $x \in \mathcal{R}$  la probabilité de l'événement  $A = (X < x)$  est appelée la *fonction de répartition* de la v.a  $X$  et on écrit :

$$F(x) = P(X < x). \quad (5-11)$$

Il est évident que  $F(x)$  est une fonction croissante telle que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1. \quad (5-12)$$

Considérons l'événement

$$\begin{aligned} (x_1 \leq X < x_2) &= \{\omega \mid x_1 \leq X(\omega) < x_2\} \\ &= \{\omega \mid X(\omega) < x_2\} - \{\omega \mid X(\omega) < x_1\}. \end{aligned}$$

où le signe “-” désigne la différence ensembliste. Sa probabilité est donnée par :

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) \quad (5-13)$$

et en particulier, pour  $dx$  infiniment petit,

$$\begin{aligned} P(x \leq X < x + dx) &= F(x + dx) - F(x) \\ &\stackrel{N}{=} dF(x). \end{aligned} \quad (5-14)$$

Si  $F$  est dérivable au point  $x$ , on dit que la v.a  $X$  est *continue* en ce point et la relation précédente s'écrit :

$$P(x \leq X < x + dx) = f(x).dx \quad (5-15)$$

où  $f(x)$ , la dérivée de  $F(x)$ , est appelée la *densité de probabilité* de  $X$  au point  $x$ . Si  $X$  est une v.a discrète dont l'ensemble des valeurs est  $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots\}$ , on a :

$$\begin{aligned} dF(x) &= 0 \quad \text{si } x \notin X(\Omega), \\ &= p_i \quad \text{si } x = x_i \in X(\Omega) \end{aligned} \quad (5-16)$$

où  $p_i = P(X = x_i)$  avec  $(X = x_i)$  est l'événement  $A = \{\omega \mid X(\omega) = x_i\}$ . La *loi de probabilité* ou la

*distribution* d'une v.a  $X$  se définit par la fonction  $f$  si cette v.a est continue en tout point  $x \in X(\Omega)$  et par l'ensemble des probabilités  $\{p_1, p_2, \dots\}$  si elle est discrète. D'après les relations (5.11), (5.15) et (5.16), on peut écrire,  $\forall a \in \mathcal{R}$ ,

$$F(a) = \begin{cases} \int_{-\infty}^a f(x).dx & \text{si } X \text{ est continue,} \\ \sum_{i \mid x_i < a} p_i & \text{si } X \text{ est discrete.} \end{cases} \quad (5-17)$$

On appelle *moment* d'ordre  $k$  d'une v.a  $X$ , le nombre réel

$$\begin{aligned} m_k &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^k . dF(x) \\ &= \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} x^k . f(x).dx & \text{si } X \text{ est continue,} \\ \sum_i x_i^k . p_i & \text{si } X \text{ est discrete} \end{cases} \end{aligned} \quad (5-18)$$

Le moment d'ordre 0 est  $m_0 = 1$ , le moment d'ordre 1 est appelé la *moyenne* ou l'*espérance mathématique* de  $X$  et sera désigné par  $m$  ou par  $E(X)$  et le moment d'ordre 2 est appelé la *moyenne quadratique* de  $X$  et sera désigné par  $E(X^2)$ . La *variance* de  $X$  est définie par :

$$V(X) = E[(X - m)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 . dF(x). \quad (5-19)$$

Elle est la moyenne quadratique des écarts entre les valeurs  $x$  de  $X$  et sa moyenne  $m$ . La racine carrée de  $V(X)$  est l'*écart-type* de  $X$  qu'on note  $\sigma$  :  $\sigma = \sqrt{V(X)}$

Le tableau 1 à la page suivante donne la définition et les caractéristiques de 6 lois de probabilités, 3 continues et 3 discrètes. En appliquant (5-18) et (5-19), le lecteur peut démontrer, à titre d'exercice, les expressions de la moyenne et de la variance de chaque loi de ce tableau.

### Exemple 2

Considérons une v.a  $X$  ayant une loi normale de moyenne 0 et d'écart-type  $\sigma$ . D'après le tableau 1, la densité de  $x$  est donnée par :

Nom de la loi	Domaine: $X(\Omega)$	Distribution	Moyenne	Variance
Uniforme	$[a, b]$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Normale ou de Gauss	$(-\infty, +\infty)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	$m$	$\sigma^2$
Exponentielle négative	$[0, \infty)$	$\lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}$ $\lambda > 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Binomiale	$\{0, 1, \dots, n\}$	$p_i = C_i^n \cdot p^i \cdot q^{n-i}$ $0 < p < 1, q = 1-p$	$n \cdot p$	$n \cdot p \cdot q$
De Poisson	$\{0, 1, \dots\}$	$p_i = \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda}$	$\lambda$	$\lambda$
Géométrique	$\{0, 1, \dots\}$	$p_i = p \cdot q^{i-1}$ $0 < p < 1, q = 1-p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$

Tableau 1

$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}. \quad (5-20)$$

Cherchons les densités de probabilité  $f_y$  et  $f_z$  des v.a

$$Y = a + b \cdot X \text{ et } Z = (X/\sigma)^2, a > 0 \text{ et } b > 0.$$

1)

$$\begin{aligned} f_y(y) \cdot dy &= P(y \leq Y < y + dy) \\ &= P\left(\frac{y-a}{b} \leq X < \frac{y-a}{b} + \frac{dy}{b}\right) = f_x\left(\frac{y-a}{b}\right) \frac{dy}{b}. \end{aligned}$$

Tenant compte de (5.20), on obtient :

$$f_y(y) = \frac{1}{b\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(y-a)^2}{2(b\sigma)^2}}$$

qui montre que Y suit aussi une loi normale de moyenne a et d'écart-type  $b \cdot \sigma$ .

2)

Il est clair que toute valeur z de Z est non-négative c'est-à-dire  $Z(\Omega) = [0, \infty)$ .

$$\begin{aligned} f_z(z) \cdot dz &= P(z \leq Z < z + dz) \\ &= P(\sigma^2 \cdot z \leq X^2 < \sigma^2 \cdot z + \sigma^2 \cdot dz) \\ &= P(\sigma\sqrt{z} \leq X < \sigma\sqrt{z+dz}) \\ &\quad + P(-\sigma\sqrt{z+dz} \leq X < -\sigma\sqrt{z}) \end{aligned} \quad (5-21)$$

Or

$$\frac{\sqrt{z+dz} - \sqrt{z}}{dz} \xrightarrow{dz \rightarrow 0} \frac{d\sqrt{z}}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{z}}$$

et comme la distribution normale de X est paire, l'équation (5-21) s'écrit :

$$\begin{aligned} f_z(z) \cdot dz &= 2 \cdot P\left(\sigma\sqrt{z} \leq X < \sigma\sqrt{z} + \frac{\sigma}{2\sqrt{z}} \cdot dz\right) \\ &= f_x\left(\sigma\sqrt{z}\right) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{z}} \cdot dz \end{aligned}$$

et d'après (5.20), on obtient :

$$f_z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot z}} \cdot e^{-\frac{z}{2}}.$$

qui ne dépend pas de  $\sigma$ .

**Vecteurs aléatoires.** Un *vecteur aléatoire*  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  est une application de  $\Omega$  dans  $\mathcal{R}^n$ . La composante  $X_i$  de X est une variable aléatoire qui associe à tout  $\omega \in \Omega$  la  $i^{\text{ème}}$  composante de  $X(\omega)$ .

Soit  $x = (x_1, \dots, x_n)$  un point de  $\mathbf{R}^n$  et désignons par  $(X < x)$  l'événement

$$\{\omega \mid X_1(\omega) < x_1, \dots, X_n(\omega) < x_n\} \subset \Omega.$$

Il est clair que

$$(X < x) = \bigcap_{i=1}^n (X_i < x_i). \quad (5-22)$$

On appelle *fonction de répartition du vecteur aléatoire X*, la fonction  $F : \mathcal{R}^n \rightarrow [0,1]$  définie par

$$F(x) = P(X < x), \quad \forall x \in \mathcal{R}^n. \quad (5-23)$$

De (5-6), (5-22) et (5-23), on déduit que

$$F(x) = P(X_1 < x_1) \cdot P[(X_2 < x_2) | (X_1 < x_1)] \dots \\ \dots P[(X_n < x_n) | \bigcap_{i=1}^n (X_i < x_i)].$$

Or,  $P(X_1 < x_1)$  n'est autre que la fonction de répartition  $F_1(x_1)$  de la v.a  $X_1$  au point  $x_1$ . D'autre part, on appelle  $P[(X_i < x_i) | (X_1 < x_1) \cap (X_2 < x_2) \cap \dots]$  la *fonction de répartition conditionnelle* de  $X_i$  au point  $x_i$  sachant  $X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots$  et on la désigne par  $F_i(x_i | X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots)$ . D'où

$$F(x) = F_1(x_1) \prod_{i=2}^n F_i(x_i | X_1 < x_1, \dots, X_{i-1} < x_{i-1}) \quad (5-24)$$

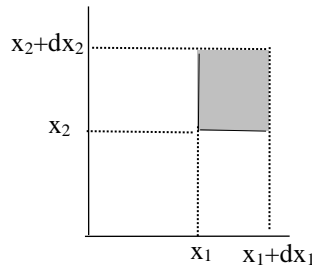
Si,  $\forall x$  les événements  $(X_1 < x_1), \dots, (X_n < x_n)$  sont indépendants, on dit que  $X_1, \dots, X_n$  sont des *variables aléatoires indépendantes* et dans ce cas, d'après (5-7) et (5-24), on a :

$$F(x) = F_1(x_1) \cdot \dots \cdot F_n(x_n). \quad (5-25)$$

Considérons un vecteur aléatoire à 2 composantes  $X = (X_1, X_2)$  et soit  $x = (x_1, x_2)$  un point de  $\mathcal{R}^2$ . Posons, pour  $dx_1$  et  $dx_2$  infiniment petits,

$$dF(x) = P[(x_1 \leq X_1 < x_1 + dx_1) \cap (x_2 \leq X_2 < x_2 + dx_2)]. \quad (5-26)$$

**Fig. 5-1** Surface élémentaire dans  $\mathcal{R}^2$



$dF(x)$  est donc la probabilité de l'événement formé par les  $\omega$  tels que  $X(\omega)$  est un point intérieur au rectangle infinitésimal représenté en gris sur la figure

5-1. D'après cette figure et la définition de  $F$ , l'équation (5-26) peut s'écrire sous la forme :

$$dF(x) = [F(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2) - F(x_1, x_2 + dx_2)] \\ - [F(x_1 + dx_1, x_2) - F(x_1, x_2)]. \quad (5-27)$$

Si  $F$  est deux fois dérivable par rapport à ses variables, on dit que le vecteur aléatoire  $X$  est continu et, dans ce cas, l'équation (5-27) s'écrit :

$$dF(x) = \frac{\partial F(x_1, x_2 + dx_2)}{\partial x_1} dx_1 - \frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 \\ = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 = f(x) \cdot dx$$

où  $f(x)$  est appelé la densité de probabilité du vecteur aléatoire  $X = (X_1, X_2)$  au point  $x = (x_1, x_2)$  et  $dx$  représente la surface élémentaire  $dx_1 dx_2$ . D'un autre côté, pour  $X$  continue, (5-26) peut s'écrire sous la forme :

$$dF(x) = f_1(x_1) dx_1 \cdot f_2(x_2 | x_1) dx_2$$

où

$$f_2(x_2 | x_1) = P[(x_2 \leq X_2 < x_2 + dx_2) | (x_1 \leq X_1 < x_1 + dx_1)] / dx_2$$

est appelé la *densité conditionnelle* de  $X_2$  en  $x_2$  sachant que  $X_1 = x_1$ . Ainsi,

$$f(x) = f(x_1, x_2) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2 | x_1). \quad (5-28)$$

Si l'on désire obtenir, par exemple, la densité de probabilité  $f_1(x_1)$  de la v.a aléatoire  $X_1$ , on écrit, d'après la figure 5-1 et la signification de  $dF(x)$ ,

$$f_1(x_1) dx_1 = P(x_1 \leq X_1 < x_1 + dx_1) \\ = \int_{x_2=-\infty}^{x_2=+\infty} dF(x) = dx_1 \int_{x_2=-\infty}^{x_2=+\infty} f(x_1, x_2) dx_2$$

$$\text{donc} \quad f_1(x_1) = \int_{x_2=-\infty}^{x_2=+\infty} f(x_1, x_2) dx_2. \quad (5-29)$$

Ce qui précède peut se généraliser à un vecteur aléatoire continu  $X$  ayant un nombre quelconque  $n$  de composantes :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\delta^n F(x_1, \dots, x_n)}{\delta x_n \dots \delta x_1} \\
&= f_1(x_1) \cdot f_2(x_2 | x_1) \dots f_n(x_n | x_1, \dots, x_{n-1}), \\
f_i(x_i) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \cdot \prod_{k \neq i} dx_k. \\
&\quad x_k \neq x_i
\end{aligned} \quad (5-30)$$

Si le vecteur aléatoire  $X$  est continu et ses composantes sont indépendantes,

$$f(x) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \dots f_n(x_n). \quad (5-31)$$

**Caractéristiques d'un vecteur aléatoire.** La *moyenne* ou l'*espérance mathématique* d'un vecteur aléatoire  $X = (X_1, \dots, X_n)$  est le vecteur

$$\begin{aligned}
m &= E(X) = [E(X_1), \dots, E(X_n)] \\
\text{avec} \quad E(X_i) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_i f_i(x_i) dx_i.
\end{aligned} \quad (5-32)$$

Soit

$$f(x | y) = P[(x \leq X < x + dx) | (y \leq Y < y + dy)] / dx$$

la densité de probabilité conditionnelle d'un vecteur aléatoire  $X$  au point  $x$  sachant qu'un autre vecteur aléatoire  $Y$  est égal (ou presque) à un vecteur  $y$ . Si  $f(x | y) = f(x) \forall y$ , on dit que les vecteurs  $X$  et  $Y$  sont indépendants. La *moyenne conditionnelle* de  $X$  sachant  $Y = y$  est définie par

$$E(X | Y = y) = E(X | y) = \int_{x_1, \dots, x_n} x \cdot f(x | y) dx. \quad (5-33)$$

D'où si  $X$  et  $Y$  sont indépendants, on a :  $E(X | y) = E(X)$ .

La *matrice des covariances* du vecteur aléatoire  $X$  est définie par :

$$\begin{aligned}
\text{cov}(X) &= E[(X - m)^T \cdot (X - m)] \\
&= \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & \sigma_2^2 & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \quad (5-34)$$

où

$$\begin{aligned}
\sigma_i^2 &= E\{[X_i - E(X_i)]^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} [x_i - E(X_i)]^2 dF_i(x_i) \\
c_{ij} &= c_{ji} = E\{[X_i - E(X_i)][X_j - E(X_j)]\} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [x_i - E(X_i)][x_j - E(X_j)] dF_i(x_i) \cdot dF_j(x_j | x_i).
\end{aligned}$$

$\sigma_i^2$  n'est autre que la variance de la v.a  $X_i$  et  $c_{ij}$  est appelée la *covariance* des v.a  $X_i$  et  $X_j$ . La valeur de  $c_{ij}$  donne une idée sur le lien qui existe entre  $X_i$  et  $X_j$ . Par exemple,  $|c_{ij}|$  est grand si  $x_i - m_i$  est le plus fréquemment de même signe que  $x_j - m_j$  ou le plus fréquemment de signe opposé à  $x_j - m_j$ . Quand les variables aléatoires  $X_i$  et  $X_j$  sont indépendantes, il est facile de démontrer que  $c_{ij} = 0$  (la réciproque n'est pas vraie :  $c_{ij} = 0$  n'implique pas l'indépendance de  $X_i$  et  $X_j$ ). On appelle *facteur de corrélation* entre  $X_i$  et  $X_j$  le nombre :

$$r_{ij} = \frac{c_{ij}}{\sigma_i \cdot \sigma_j}. \quad (5-35)$$

La valeur absolue de ce nombre est toujours plus petite que 1. En effet, en posant  $Y_i = X_i - E(X_i) \forall i$ , on a :  $E(Y_i^2) = \sigma_i^2$ ,  $E(Y_i Y_j) = c_{ij}$  et  $\forall \lambda \in \mathcal{R}$ ,

$$E[(Y_i - \lambda Y_j)^2] = \sigma_i^2 \cdot \lambda^2 - 2c_{ij} \cdot \lambda + \sigma_j^2 \geq 0.$$

Le discriminant de ce trinôme en  $\lambda$  est donc négatif, c'est-à-dire  $c_{ij}^2 \leq \sigma_i^2 \sigma_j^2$ .

On dit qu'un vecteur aléatoire  $X = (X_1, \dots, X_n)$  suit une *loi normale ou Gaussienne* si sa densité de probabilité est donnée en tout point  $x \in \mathcal{R}^n$  par

$$\begin{aligned}
f(x) &= N(m, Q) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \cdot \det Q}} \cdot \exp \left[ -\frac{1}{2} \cdot (x - m) \cdot Q^{-1} \cdot (x - m)^T \right] \\
\text{avec} \quad m &= E(X) \quad \text{et} \quad Q = \text{cov}(X).
\end{aligned} \quad (5-36)$$

### Exemple 3

Considérons un vecteur aléatoire  $X = (X_1, X_2)$  qui suit une loi normale  $N(m, Q)$  avec

$$m = (m_1, m_2) \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & c \\ c & \sigma_2^2 \end{pmatrix}, \quad c^2 < \sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2$$

et déterminons la densité de probabilité  $f_1(x_1)$  de  $X_1$  et la densité conditionnelle  $f_2(x_2 | x_1)$  de  $X_2$ .

1)

$$\det Q = \sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2 - c^2 \quad \text{et} \quad Q^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2 - c^2} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -c \\ -c & \sigma_1^2 \end{pmatrix}$$

$$(5-36) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2 - c^2}} \exp(-z).$$

$$z = \frac{\sigma_2^2(x_1 - m_1)^2 - 2c(x_1 - m_1)(x_2 - m_2) + \sigma_1^2(x_2 - m_2)^2}{2(\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2 - c^2)}$$

En retranchant et en ajoutant au numérateur de l'exposant le terme  $c^2 \cdot (x_1 - m_1)^2 / \sigma_1^2$ , on obtient :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2 - c^2}} \exp\left(-\frac{z_1^2}{2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{z_2^2}{2}\right)$$

avec

$$z_1 = \frac{x_1 - m_1}{\sigma_1},$$

$$z_2 = \frac{(\sigma_1^2 x_2 - c x_1) - (\sigma_1^2 m_2 - c m_1)}{\sigma_1 \sqrt{\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2 - c^2}}.$$

En fixant  $x_1$ , on a :  $dx_2 = \sqrt{\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2 - c^2} (dz_2 / \sigma_1)$  et

comme  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z_2^2}{2}} dz_2 = 1$  (F(∞) de la loi  $N(0,1)$ ),

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx_2 = \frac{1}{\sigma_1 \cdot 2\pi} \exp\left(-\frac{z_1^2}{2}\right) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z_2^2}{2}} dz_2 \\ &= \frac{1}{\sigma_1 \cdot \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x_1 - m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right]. \end{aligned}$$

La loi de  $X_1$  est donc  $N(m_1, \sigma_1)$  et par symétrie  $X_2$  est  $N(m_2, \sigma_2)$ .

2)

$$f_2(x_2 | x_1) = \frac{f(x)}{f_1(x_1)} = \frac{\sigma_1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2 - c^2)}} \cdot \exp\left(-\frac{z_2^2}{2}\right)$$

$\neq f_2(x_2)$  sauf si  $c = 0$ .

On en déduit que  $X_1$  et  $X_2$  sont normales et elles ne sont indépendantes que si  $c = 0$ .

En généralisant cet exemple, on peut démontrer que si un vecteur  $X$  est normal, chacune de ses composantes est aussi normale mais elles ne sont indépendantes que si  $c_{ij} = 0 \forall i, j$ . D'autre part, le lecteur peut facilement démontrer que si les composantes d'un vecteur aléatoire  $X$  sont des v.a normales indépendantes,  $X$  est normal.

**Moyenne aléatoire.** Considérons la variable aléatoire  $S = X_1 + \dots + X_n$ . Il est clair que

$$E(S) = E(X_1) + \dots + E(X_n). \quad (5-37)$$

D'autres part,

$$\begin{aligned} V(S) &= E[S - E(S)]^2 = E\left\{\sum_{i=1}^n [X_i - E(X_i)]\right\}^2 \\ &= \sum_{i=1}^n [X_i - E(X_i)]^2 \\ &\quad + 2 \sum_{i \neq j} E[(X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))] \\ &= \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{i \neq j} c_{ij}. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } c_{ij} = 0 \forall i \neq j \Rightarrow V(S) = \sum_{i=1}^n V(X_i). \quad (5-38)$$

Ainsi, la variance d'une somme de v.a non corrélées (en particulier indépendantes) est égale à la somme de leurs variances.

On appelle *variable moyenne* de  $X_1, \dots, X_n$  la variable aléatoire  $\bar{X} = S/n$ . Si les v.a  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes de même moyenne  $m$  et de même écart-type  $\sigma$  ( $E(X_i) = m$  et  $V(X_i) = \sigma^2 \forall i$ ), on a, d'après (5-37) et (5-38),

$$E(\bar{X}) = m \quad \text{et} \quad V(\bar{X}) = \sigma^2 / n = s^2. \quad (5-39)$$

Si, en plus,  $X_1, \dots, X_n$  ont la même distribution de probabilité ( $f_i(x) = f(x) \forall i$ ), on démontre (*théorème central-limite*) que, quand  $n$  tend vers l'infini, la loi de probabilité de la *variable moyenne réduite* définie par  $(\bar{X} - m)/s$  tend vers la loi normale réduite (de moyenne 0 et d'écart-type 1). En d'autres termes,



$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\bar{X} - m}{s} < a\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (5-40)$$

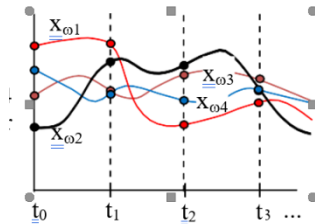
Le théorème central-limite explique la grande utilité de la loi normale de Gauss. En effet, elle est une bonne approximation de la loi de probabilité de tout résultat qui peut varier par les effets additifs de nombreuses causes. Par exemple, la sortie d'un capteur peut être perturbée par les effets cumulés de plusieurs causes externes comme les champs électromagnétiques, la température et l'humidité du milieu ambiant, ainsi que par les variations des paramètres du capteur lui-même.

## 5-2 PROCESSUS ALÉATOIRES

Considérons l'ensemble des instants  $t \in \mathcal{R}$  et associons à chaque instant  $t$  une variable aléatoire  $X_t$ . L'ensemble  $\Pi$  de ces variables aléatoires est appelé *processus aléatoire*. Comme à tout  $\omega \in \Omega$  et pour tout  $t$  la v.a  $X_t$  associe une valeur  $X_t(\omega) \in \mathcal{R}$ , le processus aléatoire  $\Pi$  associe à tout  $\omega \in \Omega$  une fonction du temps  $x_\omega$  définie par  $x_\omega(t) = X_t(\omega) \forall t \in \mathcal{R}$ . En d'autres termes, le résultat  $\omega$  d'une expérience est une courbe (voir figure 5-2). Soit  $I = \{t_0, t_1, t_2, \dots\}$ ,  $t_i < t_{i+1}$ , un ensemble dénombrable d'instants. Le sous-ensemble  $\Pi_I$  de  $\Pi$  des v.a  $X_{t_i}$  associées aux instants  $t_i \in I$  est une *discrétisation* du processus  $\Pi$ . Par analogie avec les vecteurs aléatoires, on définit la fonction de répartition d'un processus aléatoire discrétisé  $\Pi_I$  par

$$F(x) = P\left(\bigcap_{i \in I} (X_{t_i} < x_i)\right), \quad x = (x_0, x_1, x_2, \dots). \quad (5-41)$$

**Fig. 5-2** Courbes associées à 4 expériences et leurs discrétisations



$F(x)$  est donc la probabilité pour que la courbe  $x_\omega(t)$  obtenue au bout d'une expérience passe entièrement au-dessous des points  $(t_0, x_1)$ ,  $(t_1, x_1)$ ,  $(t_2, x_2)$ ,  $\dots$ . Si

toutes les v.a  $X_{t_i}$  sont continues (ce que nous le supposons dans la suite), on définit la densité de probabilité de ce processus par la fonction  $f(x)$  telle que

$$f(x)dx = P\left(\bigcap_{i \in I} (x_i \leq X_{t_i} < x_i + dx_i)\right), \quad (5-42)$$

$$dx = dx_0, dx_1, dx_2, \dots$$

La densité de probabilité d'un processus discrétisé est semblable à celle d'un vecteur :

$$f(x) = f_0(x_0).f_1(x_1 | x_0).f_2(x_2 | x_0, x_1) \dots \quad (5-43)$$

et dans le cas où les v.a  $X_{t_i}$  sont indépendantes,

$$f(x) = f_0(x_0).f_1(x_1).f_2(x_2) \dots \quad (5-44)$$

Par exemple, la perturbation qui affecte le fonctionnement d'un système en un instant  $t_1$  est parfois indépendante de celle qui l'affecte en un autre instant  $t_2$ .

**Processus particuliers.** On dit qu'un processus  $\Pi$  est *gaussien*, si,  $\forall n$  et  $\forall t_1, t_2, \dots, t_n$ , le vecteur  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  suit une loi normale. Nous avons vu qu'une perturbation en un instant  $t_i$ , résultat de nombreuses causes additives, suit approximativement une loi normale (théorème central-limite). Par conséquent, l'ensemble des perturbations  $X_{t_i}$ ,  $t \in \mathcal{R}$ , constitue souvent un processus gaussien.

Un processus aléatoire discrétisé  $\Pi_I$  est appelé *markovien* si

$$\forall i, \quad f_i(x_{i+1} | x_0, x_1, \dots, x_i) = f_i(x_{i+1} | x_i). \quad (5-45)$$

la probabilité de la valeur "prochaine"  $x_{i+1}$  d'un processus markovien ne dépend que de sa valeur "actuelle"  $x_i$  et non de ses valeurs "précédentes"  $x_{i-1}$ ,  $x_{i-2}$ ,  $\dots$ . Par exemple, la charge d'une capacité à l'instant  $t + \Delta t$  ne dépend que de sa charge à l'instant  $t$  et du courant qui lui arrive entre  $t$  et  $t + \Delta t$ . Si ce courant est dû à des causes aléatoires indépendantes du passé, la charge de la capacité est un processus markovien. Pour ces processus l'équation (5-43) devient :



$$f(x) = f_0(x_0).f_1(x_1 | x_0).f_2(x_2 | x_1) \dots \quad (5-46)$$

Soit maintenant  $I_n = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  un ensemble de  $n+1$  instants et soit  $I_n^d = \{t_0 + d, t_1 + d, \dots, t_n + d\}$  l'ensemble des instants décalés de  $d$  par rapport à ceux de  $I_n$ . Posons  $f_{I_n}$  et  $f_{I_n^d}$  respectivement les densités de probabilité des vecteurs  $(X_{t_0}, \dots, X_{t_n})$  et  $(X_{t_0+d}, \dots, X_{t_n+d})$ . On dit qu'un processus  $\Pi$  est *stationnaire* si

$$\forall n, \forall I_n \text{ et } \forall d, \quad f_{I_n} = f_{I_n^d}. \quad (5-47)$$

Le caractère probabiliste d'un processus aléatoire stationnaire ne change pas quand on change l'origine du temps. Par exemple, les perturbations qui affectent un système durant une expérience, ne dépendent pas habituellement de l'instant où commence cette expérience. D'après (5-47), toutes les v.a  $X_t$  d'un processus stationnaire  $\Pi$  ont la même densité de probabilité  $f^1(x)$ . D'autre part, la densité de probabilité d'un vecteur  $(X_{t_0}, X_{t_1})$  ne dépend que de l'écart  $|\tau| = |t_1 - t_0|$  et non des instants  $t_0$  et  $t_1$ ; elle sera désignée par  $f^2(x_1, x_2, \tau) = f^2(x_1, x_2, -\tau)$ . On en déduit que pour un processus aléatoire stationnaire,

$$\begin{aligned} m(t) &= E(X_t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f^1(x).dx = m \quad \forall t, \\ \text{cov}(X_t, X_{t+\tau}) &= E[(X_t - m)(X_{t+\tau} - m)] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - m)(x_2 - m)f^2(x_1, x_2, \tau).dx_1 dx_2 \\ &= R(\tau) = R(-\tau) \quad \forall t \end{aligned} \quad (5-48)$$

et en particulier

$$V(X_t) = R(0) = \sigma^2 \quad \forall t. \quad (5-49)$$

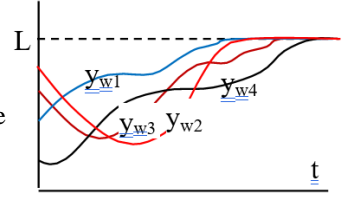
Pour un processus stationnaire, la fonction moyenne  $m(t)$  et la fonction variance  $\sigma^2(t)$  sont donc constantes et la fonction d'*autocorrélation*,  $R(t, t+\tau) = \text{cov}(X_t, X_{t+\tau}) = R(\tau) = R(-\tau)$ , est indépendante de  $t$  et ne dépend que de l'écart  $|\tau|$ . Cependant, l'inverse n'est pas vrai en général, c'est-à-dire que ces propriétés n'impliquent pas que le processus aléatoire est stationnaire. Un processus non-stationnaire qui vérifie ces propriétés est appelé *faiblement stationnaire*.

On dit qu'une famille de v.a  $Y_t$ ,  $t \in \mathcal{R}$ , tend *presque sûrement* (p.s) vers un réel  $L$  si

$$P[\omega | \lim_{t \rightarrow \infty} Y_t(\omega) = L] = 1$$

et on écrit  $L = \lim_{t \rightarrow \infty} Y_t$  p.s.

Cela signifie qu'en répétant une expérience un grand nombre de fois, toutes les fonctions (ou presque) qui seront obtenues convergeront vers une même limite  $L$  quand  $t \rightarrow \infty$  (fig.5-3).



**Fig. 5-3** Convergence presque sûre

Un processus aléatoire stationnaire  $\Pi$  est dit *ergodique* si les moyennes temporelles des v.a  $X_t$  et  $[X_t - m].[X_{t+\tau} - m]$  sur l'intervalle  $[-T, T]$  tendent presque sûrement vers les espérances mathématiques de ces v.a quand  $T \rightarrow \infty$ . En d'autres termes :

$$\begin{aligned} m &= E(X_t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^{+T} X_t dt \\ \sigma^2 &= E[(X_t - m)^2] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^{+T} (X_t - m)^2 dt \\ R(\tau) &= E[(X_t - m)(X_{t+\tau} - m)] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^{+T} (X_t - m)(X_{t+\tau} - m) dt. \end{aligned} \quad (5-50)$$

N.B : La v.a  $\int X_t dt$  associée à un résultat  $\omega \in \Omega$  la valeur  $\int X_t(\omega).dt \in \mathcal{R}$

Par conséquent, pour un processus ergodique, la moyenne, la variance et la fonction d'autocorrélation peuvent être déduites à partir de toute fonction  $x_\omega(t) = X_t(\omega)$  obtenue en n'effectuant qu'une seule expérience. Dans le cas où  $m = 0$ , d'après (5-50)

$$R(0) = \sigma^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^{+T} X_t^2 dt \quad (5-51)$$

et on dit que  $R(0)$  est la *puissance moyenne* du signal aléatoire  $X_t$  (par analogie avec la puissance moyenne

dégagée d'une résistance de 1 ohm quand elle est soumise à une tension aléatoire  $X_t$ ).

**Densité spectrale.** La densité spectrale d'un processus aléatoire stationnaire  $\Pi$  est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation  $R(\tau)$  :

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (5-52)$$

Pour donner une interprétation physique à  $\Phi(\omega)$ , considérons sa transformée de Fourier inverse :

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

d'où 
$$R(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega) d\omega. \quad (5-53)$$

Comme  $R(0)$  est la puissance du signal aléatoire  $X_t$ , d'après (5-53)  $\Phi(\omega) d\omega$  a le sens de la puissance des harmoniques de  $X_t$  ayant une fréquence comprise entre  $\omega$  et  $\omega + d\omega$ . D'autre part, la fonction  $R(\tau)$  (ou  $\Phi(\omega)$ ) détermine la matrice de covariance  $Q$  de tout vecteur  $[X_{t_1}, \dots, X_{t_n}]$  puisque  $c_{ij} = \text{cov}(X_{t_i}, X_{t_j}) = R(t_j - t_i)$ . Comme la loi normale ne dépend que de la moyenne et de la matrice de covariance, un processus stationnaire gaussien ( $X_t$  est normale  $\forall t$ ) est complètement défini par sa moyenne  $m$  et sa densité spectrale  $\Phi(\omega)$  ou sa fonction  $R(\tau)$ .

Un autre cas particulier important est le *bruit blanc* qui est un processus ergodique dont les v.a  $X_t$  sont indépendantes ( $R(\tau) = 0 \forall \tau \neq 0$ ) de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$ . Dans ce cas on peut écrire :

$$R(\tau) = \sigma^2 \delta(\tau) \quad (5-54)$$

où  $\delta(\tau)$  est la distribution de Dirac définie par

$$\delta(\tau) = 0 \quad \forall \tau \neq 0 \quad \text{et} \quad \int_{-a}^{+a} \delta(\tau) d\tau = 1 \quad \forall a > 0.$$

Cette distribution est la limite, quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , d'une impulsion rectangulaire entre  $-\varepsilon$  et  $+\varepsilon$  de hauteur  $1/2\varepsilon$ . En remplaçant dans (5-52)  $R(\tau)$  par son expression (5-54) on obtient :

$$\Phi(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \cdot \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{\sigma^2}{2\pi} \quad (5-55)$$

$$\text{car} \quad \forall f(\tau), \forall a > 0, \quad \int_{-a}^a f(\tau) \delta(\tau) d\tau = f(0).$$

La densité spectrale d'un bruit blanc est donc constante (toutes les harmoniques du signal ont la même puissance).

Dans les sections suivantes nous allons surtout considérer des processus aléatoires échantillonnés. L'échantillonnage d'un processus  $\Pi$  est sa discrétisation  $\Pi_I$  où  $I = \{t_0, t_0 + T, t_0 + 2T, \dots\}$  ;  $T$  est une durée constante appelée *période d'échantillonnage* et la constante  $\omega_e = 2\pi/T$  est appelée *fréquence d'échantillonnage*. Dans ce cas, la fonction d'autocorrélation  $R(\tau)$  s'annule si  $\tau$  n'est pas un multiple de  $T$  et, avec la notation de Dirac, elle s'écrit donc sous la forme :

$$R(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R(nT) \delta(\tau - nT). \quad (5-56)$$

En remplaçant  $R(\tau)$  par son expression dans (5-52), on obtient :

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R(nT) e^{-j(n\omega T)}. \quad (5-57)$$

C'est la transformée de Fourier de la fonction échantillonnée  $R(nT)$ . Notons que la densité spectrale de  $\Pi_I$  est périodique en  $\omega$  :  $\Phi(\omega + 2\pi/T) = \Phi(\omega) \forall \omega$ . En multipliant les deux membres de (5-57) par  $e^{j(k\omega T)}$  et en intégrant par rapport à  $\omega$  sur la période  $[-\pi/T, \pi/T]$ , on obtient :

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R(nT) \int_{-\pi/T}^{\pi/T} e^{-j(n-k)\omega T} d\omega = \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \Phi(\omega) e^{jk\omega T} d\omega.$$

$$\text{Comme} \quad \int_{-\pi/T}^{\pi/T} e^{-j(n-k)\omega T} d\omega = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq k, \\ 2\pi/T & \text{si } n = k, \end{cases}$$

on déduit que

$$R(kT) = T \int_{-\pi/T}^{+\pi/T} \Phi(\omega) e^{jk\omega T} d\omega \quad (5-58)$$

$$\text{d'où} \quad R(0) = T \cdot \int_{-\pi/T}^{+\pi/T} \Phi(\omega) d\omega. \quad (5-59)$$

Considérons en particulier les v.a  $e(i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , d'un bruit blanc échantillonné. Par définition,  $E[e(i)] = 0 \forall i$  et la variable  $e(i)$  est indépendante de  $e(j) \forall i$  et  $\forall j$ . Sachant d'autre part qu'un bruit blanc est un processus ergodique, la discrétisation des relations (5-50) et (5-52) donne,  $\forall t \in \mathcal{N}$ ,  $\tau \in \mathcal{Z}$  et  $\omega \in \mathcal{R}$  les égalités presque sûres suivantes où  $N \rightarrow \infty$  :

$$\begin{aligned} E[e(t)] &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N e(i) = 0, \\ R(\tau) &= E[e(t) \cdot e(t + \tau)] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N e(i) \cdot e(i + \tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau \neq 0 \\ \sigma^2 & \text{si } \tau = 0 \end{cases} \quad (5-60) \\ \Phi_e(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} R(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} = \frac{R(0)}{2\pi} = \frac{\sigma^2}{2\pi}. \end{aligned}$$

Nous reviendrons souvent à ces relations dans les sections suivantes.

### 5-3 SYSTÈMES LINÉAIRES ÉCHANTILLONNÉS

Ce paragraphe est une introduction à l'étude des signaux échantillonnés et leur transformée dite  $Z$  dans le but d'établir les relations essentielles entre l'entrée et la sortie échantillonnées d'un système linéaire. Ces notions sont détaillées davantage dans la partie III de ces notes.

**Transformée  $Z$ .** Soit  $T$  un nombre réel positif et désignons par  $f_n$  la valeur à l'instant  $nT$ ,  $n \in \mathcal{N}$ , d'une fonction  $f(t) \in \mathcal{C}$ . La suite  $S = \{f_0, f_1, f_2, \dots\}$  est appelée l'échantillonnage de période  $T$  de  $f(t)$  et l'opérateur  $Zf$  qui associe à cette suite le nombre complexe

$$Zf(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}, \quad z \in \mathcal{C}. \quad (5-61)$$

est appelé la *transformée  $Z$*  de la suite  $S$ . Parfois, par abus de langage, on dit que  $Zf(z)$  est la transformée

$Z$  de la fonction  $f(t)$  et on la désigne par  $Z[f(t)]$  ou simplement  $f(z)$ .

Déterminons, à titre d'exemple, les transformées  $Z$  des fonctions importantes  $e^{-at}$  et  $t^k$ ,  $a \in \mathcal{C}$  et  $k \in \mathcal{N}$ .

$$1) \quad Z(e^{-at}) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-anT} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-aT} z^{-1})^n.$$

Le dernier terme étant une progression géométrique, on déduit que

$$\begin{aligned} Z(e^{-at}) &= \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} \\ &= \frac{z}{z - e^{-aT}} \quad \text{si } |z| > 1. \end{aligned} \quad (5-62)$$

$$2) \quad Z(t^k) = \sum_{n=0}^{\infty} (nT)^k z^{-n} = -Tz \sum_{n=0}^{\infty} (nT)^{k-1} (-nz^{-n-1}).$$

Sachant que  $-nz^{-n-1} = dz^{-n}/dz$ , on obtient la formule de récurrence :

$$Z(t^k) = -Tz \frac{dZ(t^{k-1})}{dz}. \quad (5-63)$$

Des relations (5-62) et (5-63), on peut déduire d'autres transformées utiles. En effet, pour  $a = 0$ , la transformée (5-62) devient :

$$Z[1(t)] = \frac{z}{z-1} \quad \text{si } |z| > 1 \quad (5-64)$$

où  $1(t)$  est l'échelon unité qui est nul si  $t < 0$  et vaut 1 si  $t \geq 0$ . D'après (5-63) et (5-64), on déduit que

$$Z(t) = -Tz \frac{dZ[1(t)]}{dz} = \frac{Tz}{(z-1)^2} \quad (5-65)$$

Comme la somme est une opération linéaire, la définition (5-61) montre que la transformée  $Z$  est aussi linéaire c.à.d.  $Z(af + bg) = aZf + bZg$ ,  $\forall a \in \mathcal{C}$  et  $\forall b \in \mathcal{C}$ . Par exemple, sachant que

$$\cos \omega t = (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) / 2,$$

la linéarité et (5-63) donnent :

$$\begin{aligned}
 Z(\cos \omega t) &= \frac{1}{2} \left( \frac{z}{z - e^{j\omega T}} + \frac{z}{z - e^{-j\omega T}} \right) \\
 &= \frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - (2 \cos \omega T)z + 1}. \quad (5-66)
 \end{aligned}$$

De la même manière le lecteur peut obtenir l'expression de  $Z(\sin \omega t)$ . Vérifions la formule (5-66) pour  $\omega = \pi/3$  et  $T = 1$  en effectuant la division euclidienne du numérateur par le dénominateur :

$z^2 - z/2$	$z^2 - z + 1$
$z/2 - 1$	$1 + z^{-1}/2 - z^{-2}/2 - z^{-3} - z^{-4}/2 \dots$
$-1/2 - z^{-1}/2$	
$-z^{-1} + z^{-2}/2$	
$-z^{-2}/2 + z^{-3} \dots$	

D'où  $Z(\cos \pi t/3) = 1 + z^{-1}/2 - z^{-2}/2 - z^{-3} - z^{-4}/2 \dots$  et de la définition (5-61) de la transformée  $Z$  on tire :  $\cos 0 = 1$ ,  $\cos \pi/3 = 1/2$ ,  $\cos 2\pi/3 = -1/2$ ,  $\cos \pi = -1$ ,  $\cos 4\pi/3 = -1/2$ , ... ce qui est vrai.

#### Transformée inverse.

L'exemple précédent montre qu'on peut calculer les éléments d'une suite  $S = \{f_n\}$  à partir de sa transformée  $Z$ . En désignant par  $Z^{-1}$  l'inverse de la transformée  $Z$ , on écrit :  $S = Z^{-1}(Zf)$ .

Généralement  $Zf$  est une fonction rationnelle  $N(z)/D(z)$  avec  $d^0 N \leq d^0 D$ . La décomposition de cette fonction en fractions simples permet de déduire une expression analytique des éléments  $f_n$  de  $S$ . En effet, si  $p_i \in \mathbb{C}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , sont les pôles de  $Zf$  (les racines de  $D(z)$ ) supposés distincts, on a :

$$\begin{aligned}
 Zf &= \frac{N(z)}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_k)} \\
 &= \sum_{i=1}^k \frac{A_i}{(z - p_i)}, \quad A_i = (z - p_i)Zf|_{z=p_i}, \\
 \Rightarrow Zf &= z^{-1} \sum_{i=1}^k A_i \frac{z}{(z - p_i)}.
 \end{aligned}$$

En remplaçant dans (5-62)  $e^{-aT}$  par  $p_i$  on obtient :

$$f_n = A_1 p_1^{n-1} + A_2 p_2^{n-1} + \dots + A_k p_k^{n-1}. \quad (5-67)$$

Ceci montre que  $f_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$  si et seulement si  $|p_i| < 1 \quad \forall i$ . Cette convergence est d'autant plus rapide que  $|p_i|$  est voisin de 0 et les oscillations de  $f_n$  sont d'autant plus faibles que les arguments  $\omega_i T$  des  $p_i (= |p_i| e^{j\omega_i T})$  sont petits.

#### Retard.

Soit maintenant la suite  $S_k = \{h_n\}$  définie par

$$h_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n < k, \\ f_{n-k} & \text{si } n \geq k. \end{cases}$$

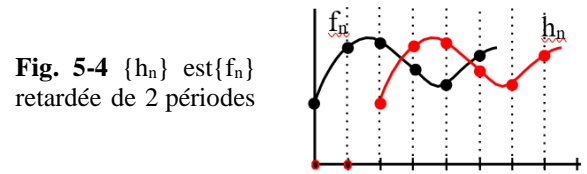


Fig. 5-4  $\{h_n\}$  est  $\{f_n\}$  retardée de 2 périodes

$S_k$  n'est autre que la suite  $S = \{f_n\}$  retardée de  $k$  périodes comme le montre la figure 5-4. Par commodité, on écrit aussi  $S_k = \{f_{n-k}\}$ . On a :

$$Zh = \sum_{n=k}^{\infty} f_{n-k} z^{-n} = \sum_{v=0}^{\infty} f_v z^{-(v+k)}, \quad v = n - k.$$

$$\text{D'où} \quad Zh = Zf_{n-k} = z^{-k} Zf. \quad (5-68)$$

Par exemple, la période  $T$  étant généralement très petite, la dérivée de la fonction  $f(t)$  en  $nT$  peut être approximée par  $f'_n = (f_n - f_{n-1})/T$ . D'où

$$Zf' = \frac{Zf - z^{-1}Zf}{T} = \frac{1 - z^{-1}}{T} Zf. \quad (5-69)$$

#### Avance.

Soit la suite  $S_{+k} = \{h_k\}$  définie par

$$h_k = f_{n+k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

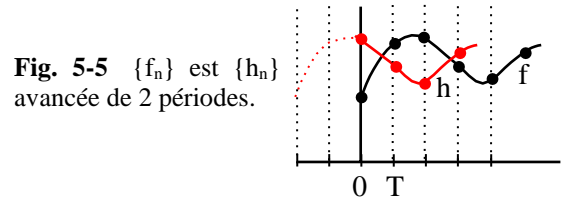


Fig. 5-5  $\{f_n\}$  est  $\{h_n\}$  avancée de 2 périodes.

$S_{+k}$  n'est autre que la suite  $S = \{f_n\}$  avancée de  $k$

périodes comme le montre la figure 5-5. Par commodité, on écrit aussi  $S_{+k} = \{f_{n+k}\}$ . On a :

$$Zh = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+k} z^{-n} = \sum_{v=k}^{\infty} f_v z^{-(v-k)}, \quad v = n+k.$$

$$\text{D'où} \quad Zh = Zf_{n+k} = z^k \left( Zf - \sum_{v=0}^{k-1} f_v z^{-v} \right). \quad (5-70)$$

À remarquer qu'il faut retrancher de  $Zf$  la transformée des  $k$  premières valeurs de  $\{f_n\}$ .

**Valeur initiale et valeur finale.** Quand  $z \rightarrow 0$  le second membre de la définition (5-61) se réduit à la valeur initiale  $f_0$ , d'où

$$f_0 = \lim_{z \rightarrow 0} Zf. \quad (5-71)$$

La limite quand  $z \rightarrow 1$  de la différence entre les  $k+1$  premiers termes de  $Zf$  et de  $z^{-1}Zf$  est :

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left[ \sum_{n=0}^k f_n z^{-n} - \left( 0 + \sum_{n=1}^k f_{n-1} z^{-n} \right) \right] = f_k.$$

Ainsi, quand  $k \rightarrow \infty$  l'équation précédente devient :

$$\lim_{z \rightarrow 1} (Zf - z^{-1}Zf) = f_{\infty}$$

à condition que  $f_{\infty}$  existe. Dans ce cas, la valeur finale de  $\{f_n\}$  est

$$f_{\infty} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})Zf. \quad (5-72)$$

### Transmittance Z.

Désignons par  $g(t)$  la réponse à une impulsion de Dirac d'un système linéaire  $G$  initialement inerte (conditions initiales nulles) (fig. 5-6).

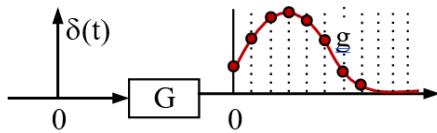


Fig. 5-6 Réponse de  $G$  à  $d(t)$  et son échantillonnage

La transformée  $Z$  de l'échantillonnage  $\{g_n\}$  de période  $T$  de  $g(t)$  est appelée la fonction de transfert échantillonnée de  $G$  ou sa *transmittance*  $Z$ . On écrit

$$G(z) = Zg = Z[g(t)]. \quad (5-73)$$

On dit que le système  $G$  est stable si  $g_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Or nous avons vu (voir 5-67) que cette condition sera vérifiée si et seulement si les pôles  $p_i$  de  $G(z) = Zg$  sont tous à l'intérieur du cercle unité c.à.d. si et seulement si  $|p_i| < 1 \quad \forall i$ . D'autre part,  $g_n$  converge d'autant plus rapidement vers 0 que les  $p_i$  sont voisins de 0 et oscille d'autant moins que les arguments  $\omega_i T$  des  $p_i$  sont petits (c.à.d. quand les  $p_i$  sont voisins de l'axe de réels positifs).

Appliquons maintenant à l'entrée du système  $G$  une suite d'impulsions  $\{u_k \delta(kT)\}$ . La réponse du système à une impulsion  $u_k \delta(kT)$  est nulle avant l'instant  $kT$  et elle est égale à  $u_k g(t - kT)$  pour  $t \geq kT$ . Comme le système est linéaire, la réponse  $y$  en un instant  $nT$  est la somme des réponses aux impulsions qui arrivent avant  $nT$  (causalité). En d'autres termes,

$$y(nT) = y_n = \sum_{k=0}^n u_k g(nT - kT).$$

Comme  $g(nT - kT) = 0 \quad \forall k > n$ , l'égalité précédente peut s'écrire sous la forme :

$$y_n = \sum_{k=0}^{\infty} u_k g_{n-k}. \quad (5-74)$$

Le second membre de cette équation est appelé le produit de convolution, notée  $u * g$ , des suites  $\{u_n\}$  et  $\{g_n\}$ . Déterminons la transformée  $Z$  de la réponse  $\{y_n\}$ . D'après (5-74) on a :

$$\begin{aligned} Zy &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{\infty} u_k g_{n-k} \right) z^{-n} \\ &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} g_{n-k} z^{-(n-k)} \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^{-k} \right) \\ &= \left( \sum_{v=0}^{\infty} g_v z^{-v} \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^{-k} \right), \quad v = n-k, \end{aligned}$$

car, pour  $v < 0$ ,  $g_v = 0$ . Par conséquent,

$$y(z) = Zy = G(z)u(z). \quad (5-75)$$

La connaissance de la transmittance  $G(z)$  d'un système permet donc de déterminer sa réponse échantillonnée  $\{y_n\}$  à toute entrée échantillonnée  $\{u_n\}$ . Deux entrées particulières servent à déduire la transmittance  $G(z)$  d'un système : l'échelon et la sinusoïde dont les réponses sont respectivement

appelées temporelle et fréquentielle.

### Réponse temporelle.

C'est la réponse échantillonnée à l'échelon unité  $1(t)$ . D'après (5-65) et (5-75), la transformée Z de cette réponse est :

$$y(z) = G(z) \frac{1}{1-z^{-1}} \Rightarrow y(z) - z^{-1}y(z) = g(z).$$

$$\text{D'où} \quad g_n = y_n - y_{n-1}. \quad (5-76)$$

La valeur  $g_n$  de la réponse impulsionnelle à l'instant  $nT$  est donc l'accroissement de la réponse temporelle en cet instant. Comme l'impulsion de Dirac n'est pas réalisable physiquement on peut déduire  $g_n$  et, par conséquent  $G(z)$ , à partir de la réponse temporelle  $y_n$  du système.

### Exemple 3

Considérons un système de transmittance

$$G(z) = \frac{z^2 + 2}{z^2 + 0.4z + 0.25}.$$

Il a deux pôles complexes conjugués de module  $(0.25)^{1/2} = 0.5$  et de partie réelle  $-0.4/2 = -0.2$ . Il est donc stable. Les instructions «step» et «impulse» de Matlab donnent les réponses de  $G(z)$  à  $1(t)$  et  $\delta(t)$ .

#### Définition du système

```
>> n = [1 0 2];
>> d = [1 0.4 0.25];
>> sys = tf(n,d,1,'variable','z') % T = 1.
```

sys =

$$\frac{z^2 + 2}{z^2 + 0.4z + 0.25}$$

Sample time : 1 seconds

Discrete-time transfer function.

```
>> y = step(sys);
>> g = impulse(sys);
>> [y(1:10),g(1:10)]
```

$y_n$	$g_n$
1.0000	1.0000
0.6000	-0.4000
2.5100	1.9100
1.8460	-0.6640

1.6341	-0.2119
1.8849	0.2508
1.8375	-0.0473
1.7938	-0.0438
1.8231	0.0293
1.8223	-0.0008

Ce tableau vérifie bien la relation (5-76) et montre la stabilité du système puisque  $g_n \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ .

Supposons maintenant qu'on ignore la transmittance du système et qu'une expérience donne les données  $\{y_n\}$  du tableau ci-dessus. D'abord, de  $\{y_n\}$  on déduit  $\{g_n\}$ . D'autre part, si l'on désire modéliser le système par une transmittance de second ordre (le degré du dénominateur est 2), on pose

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}{b_2 z^2 + b_1 z + b_0} \\ &= \frac{a_2 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}}{b_2 + b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^{-n}. \end{aligned} \quad (5-77)$$

Le choix de l'ordre de  $G(z)$  est en principe arbitraire mais physiquement il est égal en général au nombre de magasins d'énergie dans le système (capacités, inductances, inerties, masses calorifiques, ...). Par identification des deux derniers membres de (5-77), on obtient les 6 équations à 6 inconnues suivantes :

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 & 0 & 0 \\ g_1 & g_0 & 0 \\ g_2 & g_1 & g_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_3 & g_2 & g_1 \\ g_4 & g_3 & g_2 \\ g_5 & g_4 & g_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix}.$$

Le lecteur peut vérifier que le déterminant de la matrice de droite est nul :

$$>> \det[g(4:6), g(3:5), g(2:4)] = 0$$

(sinon tous les  $b_i$  et  $a_i$  seraient nuls). D'où les trois dernières équations sont dépendantes ce qui permet d'éliminer l'une d'elles et de donner à l'une des inconnues  $b_i$  une valeur arbitraire. En choisissant  $b_2 = 1$ , on obtient les autres paramètres en écrivant :

$$>> N = [g(3:4), g(2:3)];$$

$$>> x = -\text{inv}(N)*g(4:5)$$

$$\rightarrow x(1) = b_1 = 0.4000 \quad x(2) = b_0 = 0.2500$$

$$>> K = [g(1) \ 0 \ 0; g(2) \ g(1) \ 0; g(3) \ g(2) \ g(1)];$$

$$>> a = K*[1;x]$$

$$\rightarrow a_1 = 1.0000 \quad a_2 = 0.0000 \quad a_3 = 2.0000.$$



On retrouve donc la transmittance  $G(z)$  de départ. En réalité, les résultats expérimentaux sont toujours entachés d'erreurs et les  $y_n$  n'auront pas exactement les mêmes valeurs données dans le tableau ci-dessus. La détermination de la transmittance  $G(z)$  qui modélise le mieux le système en présence des incertitudes sur les valeurs des  $y_n$  fera l'objet du chapitre 6.

### Réponse fréquentielle.

C'est la réponse  $\{y_n\}$  d'un système de transmittance  $G(z)$  à l'échantillonnage de la sinusoïdale

$$a \cdot \cos \omega t = a(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) / 2.$$

Par linéarité,  $y_n = a(y_{1n} + y_{2n})/2$  où  $y_{1n}$  et  $y_{2n}$  sont respectivement les réponses à l'échantillonnage de  $e^{j\omega t}$  et  $e^{-j\omega t}$  à l'instant  $nT$ . Or,

$$\begin{aligned} y_{1n} &= \sum_{k=0}^n e^{j\omega kT} g(nT - kT) \\ &= e^{j\omega nT} \sum_{k=0}^n e^{-j\omega(nT - kT)} g(nT - kT) \\ &= e^{j\omega nT} \sum_{v=0}^n g_v \cdot (e^{j\omega T})^{-v}, \quad v = n - k, \end{aligned}$$

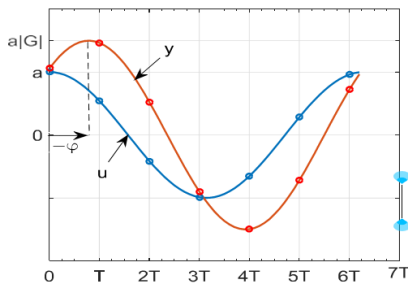
car pour  $k < 0$ , l'entrée  $u_k$  est nulle. Donc

$$y_{1n} = G(e^{j\omega T}) e^{j\omega nT} = |G(e^{j\omega T})| e^{j(\omega nT + \varphi)}$$

où  $\varphi$  est l'argument de  $G(e^{j\omega T})$ . La réponse  $y_{2n}$  s'obtient de  $y_{1n}$  en remplaçant  $j$  par  $-j$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned} y_n &= a |G(e^{j\omega T})| (e^{j(\omega nT + \varphi)} + e^{-j(\omega nT + \varphi)}) / 2 \\ &= a |G(e^{j\omega T})| \cdot \cos(\omega nT + \varphi). \end{aligned}$$

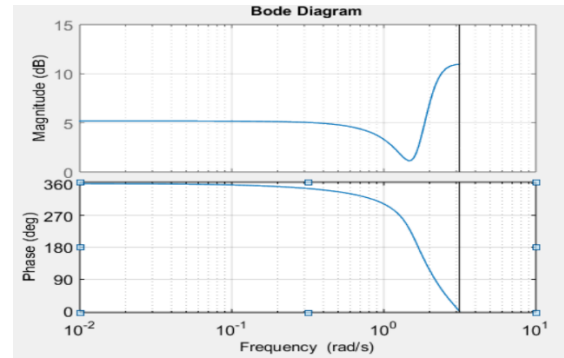
Ainsi, la réponse d'un système  $G(z)$  à une sinusoïde échantillonnée est l'échantillonnage d'une sinusoïde de même fréquence  $\omega$  que l'entrée mais amplifiée de  $|G(e^{j\omega T})|$  et déphasée de  $-\varphi = -\arg[G(e^{j\omega T})]$  comme le montre le graphe suivant.



D'après Shannon, pour reconstituer un signal  $y$  à partir de son échantillonnage  $\{y_n\}$ , il est nécessaire que le nombre d'échantillons durant la plus petite période des harmoniques de  $y$  soit plus que 2. En d'autres termes, si  $\omega_M$  est la plus grande fréquence que contient  $y$ , la fréquence d'échantillonnage  $\omega_e = 2\pi/T$  doit vérifier  $\omega_e > 2\omega_M$ .

Les fonctions  $|G(e^{j\omega T})|$  et  $\varphi(\omega)$  sont appelés respectivement *gain* et *phase* du système à la fréquence  $\omega$ . Le gain est généralement exprimé en décibels ( $|G(e^{j\omega T})|_{\text{db}} = 20\log_{10}|G(e^{j\omega T})|$ ), la phase  $\varphi(\omega)$  en degrés et leurs graphes en fonction de  $\log_{10}\omega$  constituent le diagramme de Bode qu'on peut obtenir par l'instruction «bode» de Matlab. Comme  $G(e^{j(\omega + \pi/T)T}) = -G(e^{j\omega T})$ , Matlab ne représente le gain et la phase de  $G(e^{j\omega T})$  que pour les fréquences  $\omega \in [0, \pi/T]$ , ce qui est en conformité avec l'exigence de Shannon ( $\pi/T > \omega_M$ ). En désignant de nouveau par "sys" la transmittance de l'exemple 3 précédent, on écrit :

```
>> bode (sys)
```



## 5-4 MODÉLISATION DES SYSTÈMES PERTURBÉS

Nous commençons par montrer qu'une perturbation aléatoire peut être vue comme la réponse d'un système linéaire à un bruit blanc et nous définirons ensuite le modèle ARMAX généralement adopté pour décrire les perturbations aléatoires agissant sur un système linéaire.

**Réponse d'un système linéaire à un bruit blanc.** Nous adoptons dans la suite la période

d'échantillonnage comme unité de temps c.à.d. nous posons  $T = 1$ .

La figure ci-contre représente un système linéaire de transmittance  $G_b(z)$  soumis à un bruit blanc échantillonné  $e(t)$ ,  $t \in \mathbb{Z}$ . Rappelons que  $G_b(z)$  est, par définition, la transformée Z de la réponse  $g(t)$  à une impulsion de Dirac  $\delta(t)$  appliquée à l'instant 0 au système initialement inerte :

$$G_b(z) = \sum_{v=0}^{\infty} g(v).z^{-v} \quad (5-78)$$

Comme  $g(v) = 0 \forall v < 0$ , (5-78) peut aussi s'écrire sous la forme :

$$G_b(z) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} g(v).z^{-v} \quad (5-78)'$$

Le système est stable si  $g(t)$  converge vers 0 quand  $t \rightarrow \infty$  et dans ce cas les modules de tous les pôles de  $G_b(z)$  sont strictement inférieurs à 1. La réponse échantillonnée  $b(t)$  à une entrée  $e(t)$ ,  $t \in \mathbb{Z}$ , appliquée à partir d'un instant  $t_0$  est égale au produit de convolution  $g * e$  :

$$b(t) = (g * e)(t_0, t) = \sum_{v=t_0}^t e(v).g(t-v). \quad (5-79)$$

qui s'écrit en transformée Z sous la forme :  $Zb = G_b(z).Ze$ . À noter que si  $e$  est aléatoire,  $Ze$  ainsi que  $Zb$  sont des fonctions aléatoires en  $z$ . En prenant  $t_0 = -\infty$  (l'entrée  $e$  est appliquée depuis longtemps de sorte que le système à l'instant  $t \geq 0$  est en régime stationnaire) et sachant que  $g(t-v) = 0$  pour  $t-v < 0$ , l'équation (5-79) s'écrit :

$$b(t) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} e(v).g(t-v). \quad (5-80)$$

Stationnarité de  $b(t)$ . Déterminons d'abord la moyenne et l'autocorrélation du processus aléatoire  $b(t)$  quand l'entrée  $e(t)$  est un bruit blanc. Comme  $\mathbb{E}[e(v)] = 0 \forall v$ , de (5-80) on tire :

$$m_b = \mathbb{E}[b(t)] = \sum_{v=-\infty}^{\infty} \mathbb{E}[e(v)]g(t-v) = 0 \forall t. \quad (5-81)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} R_b(t, t+\tau) &= \mathbb{E}[b(t).b(t+\tau)] \\ &= \sum_{v_1=-\infty}^{\infty} g(t-v_1) \sum_{v_2=-\infty}^{\infty} \mathbb{E}[e(v_1).e(v_2)].g(t+\tau-v_2). \end{aligned} \quad (5-82)$$

Or, les  $v$ .a  $e(v)$  d'un bruit blanc étant de moyenne nulle, de variance  $\sigma^2$  et indépendantes,

$$\mathbb{E}[e(v_1)e(v_2)] = \begin{cases} 0 & \forall v_2 \neq v_1, \\ \sigma^2 & \text{si } v_2 = v_1. \end{cases}$$

D'où, en posant  $n = t - v_1$ , (5-82) devient :

$$R_b(t, t+\tau) = R_b(\tau) = \sigma^2 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n).g(n+\tau). \quad (5-83)$$

Les relations (5-81) et (5-83) montrent que  $b(t)$  est un processus aléatoire faiblement stationnaire (la moyenne et la covariance ne dépendent pas de  $t$ ). En fait, en remplaçant dans (5-80)  $t$  par  $t+k$  et en posant  $n = v - k$ , on a :

$$b(t+k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e(n+k).g(t-n).$$

Comme,  $\forall n$  et  $\forall k$ ,  $e(n)$  et  $e(n+k)$  ont la même distribution de probabilité, il en est de même de  $b(t)$  et de  $b(t+k)$ . On en déduit que le processus  $b(t)$  ne dépend pas de l'origine du temps et il est donc stationnaire et non seulement faiblement stationnaire.

Ergodicité de  $b(t)$ . Démontrons que le processus  $b(t)$  est aussi ergodique c'est-à-dire que les moyennes temporelles de  $b(t)$  et de  $b(t).b(t+\tau)$  sont presque sûrement égales aux espérances mathématiques de ces variables aléatoires. Comme le bruit blanc  $e(t)$  est un processus ergodique, on a d'abord

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[b(t)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{E}[e(n)].g(t-n) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=-N}^N e(t) \right] . g(t-n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=-N}^N \sum_{n=-\infty}^{\infty} e(t).g(t-n) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=-N}^N \sum_{n=-\infty}^{\infty} e(n).g(t-n).
\end{aligned}$$

car,  $\forall n$  et  $\forall t$ , les v.a  $e(n)$  et  $e(t)$  sont égales. Donc

$$\mathcal{E}[b(t)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=-N}^N b(t). \quad (5-84)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
&\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=-N}^N b(t).b(t+\tau) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=-N}^N \sum_{v_1=-\infty}^{\infty} \sum_{v_2=-\infty}^{\infty} e(v_1).g(t-v_1).e(v_2).g(t+\tau-v_2), \\
&= \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} g(-n_1).g(-n_2) \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=-N}^N e(t+n_1).e(t+\tau+n_2)
\end{aligned}$$

en posant  $n_1 = v_1 - t$  et  $n_2 = v_2 - t - \tau$ . Mais

$$v = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=-N}^N e(t+n_1).e(t+\tau+n_2) \stackrel{p.s}{=} 0$$

sauf si  $n_1 = \tau + n_2$ , on a :  $v = \sigma^2$ . Donc

$$\begin{aligned}
&\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=-N}^N b(t).b(t+\tau) \stackrel{p.s}{=} \sigma^2 \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} g(-n_2).g(-n_2-\tau) \\
&= \sigma^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n+\tau).g(n) \quad \text{avec} \quad n = -n_2 - \tau.
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après (5-83)

$$R_b(\tau) \stackrel{p.s}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=-N}^N b(t).b(t+\tau). \quad (5-85)$$

Les égalités (5-84) et (5-85) montrent bien que la réponse d'un système linéaire à un bruit blanc est un processus ergodique.

**Spectre de  $b(t)$ .** Déterminons maintenant la densité spectrale  $\Phi_b(\omega)$  du processus aléatoire  $b(t)$ . Par définition, elle est égale à la transformée de Fourier de  $R_b(\tau)$ . D'où, d'après (5-83),

$$\Phi_b(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_b(\tau).e^{-j\omega\tau}$$

$$= \frac{\sigma^2}{2\pi} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} g(n).g(n+\tau).e^{-j\omega\tau}.$$

En posant  $m = n+\tau$ , l'expression précédente s'écrit :

$$\Phi_b(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n).e^{j\omega n} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(m).e^{-j\omega m}$$

et de la définition (5-78) de la transmittance, on a :

$$\begin{aligned}
\Phi_b(\omega) &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \cdot \left[ G_b(z).G_b(z^{-1}) \right]_{z=e^{j\omega}} \\
&= \left\| G_b(e^{j\omega}) \right\|^2 \cdot \Phi_e(\omega).
\end{aligned} \quad (5-86)$$

où  $\Phi_e(\omega) = \sigma^2/2\pi$  est la densité spectrale du bruit blanc (voir (5-60)). Par conséquent, si l'on détermine expérimentalement la densité spectrale  $\Phi_b(\omega)$  d'une perturbation ergodique  $b(t)$ , on peut tirer de (5-86) la transmittance  $G_b(z)$  dont la réponse à un bruit blanc de variance  $\sigma^2$  est cette perturbation  $b(t)$ . Nous précisons cette technique plus loin.

Connaissant  $\Phi_b(\omega)$ , au lieu d'utiliser (5-83), on peut obtenir  $R_b(\tau)$  par la transformée inverse de Fourier :

$$R_b(\tau) = \int_{-\pi}^{+\pi} \Phi_b(\omega).e^{j\omega\tau} d\omega$$

ou, en effectuant le changement de variable  $z = e^{j\omega}$  qui décrit, quand  $\omega$  varie de  $-\pi$  à  $+\pi$ , le cercle unité  $C_1$  (de centre 0 et de rayon 1), on a  $d\omega = (z^{-1}/j)dz$  et de (5-86) on tire :

$$\begin{aligned}
R_b(\tau) &= \frac{\sigma^2}{2\pi j} \oint_{C_1} G_b(z).G_b(z^{-1}).z^{\tau-1} dz \\
&= \sigma^2 \Sigma [\text{résidus aux pôles de } G_b(z).z^{\tau-1}].
\end{aligned} \quad (5-87)$$

Nous rappelons que le résidu en un pôle simple  $p$  d'une fonction  $f(z)$  est égal à  $(z-p)f(z)|_{z=p}$ . À noter que si  $G_b(z)$  est stable, tous ses pôles sont intérieurs au cercle  $C_1$  et tous les pôles de  $G_b(z^{-1})$  sont donc extérieurs à ce cercle.

**Le modèle ARMA.** Considérons une perturbation  $b(t)$  modélisée par la réponse d'une transmittance  $G_b(z)$  à un bruit blanc.  $G_b(z)$  est de la forme :

$$G_b(z) = \frac{z^m + c_1 z^{m-1} + \dots + c_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}, \quad m \leq n. \quad (5-88)$$

Les paramètres  $c_1, \dots, c_m$  et  $a_1, \dots, a_n$  étant des constantes dont certaines peuvent être nulles. Remarque qu'on a supposé que  $c_0 = a_0 = 1$  car, s'ils ne l'étaient pas, on peut les mettre en facteur et remplacer dans (5-86)  $\sigma^2/2\pi$  par  $(\sigma^2/2\pi)(c_0/a_0)$  c'est-à-dire considérer un bruit blanc de variance  $\sigma^2(c_0/a_0)$  au lieu de  $\sigma^2$ . D'autre part, les pôles  $\lambda_i$  et les zéros  $\mu_j$  de  $G_b(z)$  doivent satisfaire l'égalité (5-86) :

$$\frac{\prod (z - \mu_j)(z^{-1} - \mu_j)}{\prod (z - \lambda_i)(z^{-1} - \lambda_i)} = \frac{z^{n-m} \cdot \prod \mu_j (z - \mu_j)(\mu_j^{-1} - z)}{\prod \lambda_i (z - \lambda_i)(\lambda_i^{-1} - z)} = \frac{2\pi}{\sigma^2} \Phi_b(\omega), \quad z = e^{j\omega}.$$

Or  $\|\lambda_i\| > 1 \Leftrightarrow \|\lambda_i^{-1}\| < 1$  et l'égalité précédente ne change pas si on choisit  $\lambda_i^{-1}$  comme pôle pour  $G_b(z)$  à la place de  $\lambda_i$  et il en est de même pour les zéros  $\mu_i$ . On en déduit que les pôles et les zéros de  $G_b(z)$  peuvent être toujours choisis à l'intérieur du cercle unité et c'est ce choix qui sera adopté par la suite.

L'ordre de  $G_b(z)$  est le degré  $n$  de son dénominateur. En divisant son numérateur et son dénominateur par  $z^n$  et en posant  $d = n - m$ ,  $n_A = \max\{i \mid a_i \neq 0\}$  et  $n_C = \max\{i \mid c_i \neq 0\}$ , on obtient d'après (5-88) :

$$G_b(z) = \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} C(z^{-1}) = z^{-d} \left(1 + \sum_{i=1}^{n_C} c_i z^{-i}\right), \\ A(z^{-1}) = \left(1 + \sum_{i=1}^{n_A} a_i z^{-i}\right). \end{cases} \quad (5-89)$$

La relation en transformée  $Z$  entre la perturbation  $b$  et le bruit blanc  $e$  est donc :

$$Zb = -\left(\sum_{i=1}^{n_A} a_i \cdot z^{-i}\right) \cdot Zb + z^{-d} \left(1 + \sum_{i=1}^{n_C} c_i \cdot z^{-i}\right) Ze.$$

Sachant que  $z^{-1} \cdot Zy$  est la transformée  $Z$  de la fonction  $y(t-i)$ , la relation temporelle entre  $b$  et  $e$  s'écrit :

$$b(t) = -\left(\sum_{i=1}^{n_A} a_i \cdot b(t-i)\right) + \left(e(t-d) + \sum_{i=1}^{n_C} c_i \cdot e(t-i-d)\right) \quad (5-90)$$

Mais, comme le bruit blanc  $e$  est un processus stationnaire, rien ne change au modèle en posant  $d = 0$ . Par la suite, à la place de (5-89) et (5-90), nous utiliserons les relations équivalentes suivantes :

$$G_b(z) = \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} C(z^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{n_C} c_i z^{-i}, \\ A(z^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{n_A} a_i z^{-i}, \end{cases}$$

$$b(t) = -\sum_{i=1}^{n_A} a_i \cdot b(t-i) + \sum_{i=1}^{n_C} c_i \cdot e(t-i) + e(t). \quad (5-91)$$

Si tous les  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, n_C$ , sont nuls, c'est-à-dire si  $C(z^{-1}) = 1$ , l'équation (5-91) devient :

$$b(t) = -\left(\sum_{i=1}^{n_A} a_i \cdot b(t-i)\right) + e(t) \quad (5-92)$$

d'où la valeur de la perturbation  $b$  en un instant  $t$  est obtenue en ajoutant à la valeur du bruit blanc  $e$  en cet instant une moyenne pondérée des  $n_A$  valeurs précédentes de  $b$ . Dans ce cas on dit que  $b$  est un processus *autorégressif* (AR).

Si tous les  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, n_A$ , sont nuls, c'est-à-dire si  $A(z^{-1}) = 1$ , l'équation (5-91) devient :

$$b(t) = e(t) + \sum_{i=1}^{n_C} c_i \cdot e(t-i) \quad (5-93)$$

d'où la valeur de la perturbation  $b$  en un instant  $t$  est obtenue en ajoutant à la valeur du bruit blanc  $e$  en cet instant une moyenne pondérée des  $n_C$  valeurs précédentes de  $e$ . Dans ce cas on dit que  $b$  est un processus *moyenne mobile* (moving average (MA)).

Enfin, s'il existe un  $c_i \neq 0$  et un  $a_i \neq 0$ , l'expression de  $b(t)$  est de la forme (5-91) et on dit qu'il est un processus *autorégressif, moyenne mobile* (ARMA).

Avant d'étudier l'effet de la perturbation sur un système donné, fixons les idées en donnant des exemples sur ce qui précède.

#### Exemple 4

Considérons une perturbation  $b(t)$  à moyenne mobile d'ordre 1 :

$$b(t) = e(t) + c.e(t-1); \quad Zb = C(Z^{-1})Ze$$

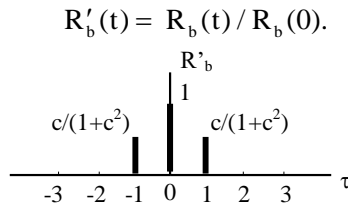
avec  $C(Z^{-1}) = 1 + c.Z^{-1}$ ,  $c > 0$ .

En remplaçant dans (5-83)  $g(0)$  par 1,  $g(1)$  par  $c$  et  $g(n)$  par 0  $\forall n > 1$ , on obtient :

$$R_b(0) = \sigma^2.(1+c^2), \quad R_b(1) = R_b(-1) = \sigma^2.c$$

et  $R_b(\tau) = 0 \quad \forall \tau \neq 0 \text{ et } \tau \neq \pm 1$ .

La figure suivante représente la fonction d'autocorrélation *normalisée* de  $b(t)$  :



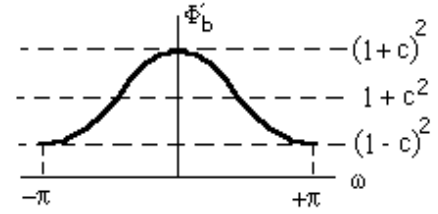
Cette fonction montre qu'une perturbation n'est corrélée qu'avec la perturbation qui la précède.

En remplaçant dans (5-86)  $G(z)$  par  $G_b(z) = C(z^{-1})$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \Phi_b(\omega) &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \cdot (1 + c.e^{-j\omega}) \cdot (1 + c.e^{j\omega}) \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \cdot (1 + c^2 + 2c.\cos \omega). \end{aligned}$$

La figure suivante représente la densité spectrale *réduite* de  $b(t)$  sur une période  $[-\pi, +\pi]$  :

$$\Phi'_b(\omega) = 2\pi \cdot \Phi_b(\omega) / \sigma^2.$$



La puissance (ou l'amplitude) d'une harmonique de  $b(t)$  est d'autant plus faible que sa fréquence est grande.

De  $R_b(\tau)$  ou de  $\Phi_b(\omega)$  on peut tirer le paramètre  $c$  et déduire  $G_b(z)$ .

#### Exemple 5

Considérons une perturbation  $b(t)$  autorégressive d'ordre 1 :

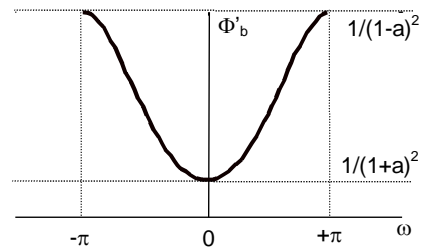
$$b(t) = -a.b(t-1) + e(t), \quad Zb = \frac{1}{A(Z^{-1})}.Ze$$

avec  $A(Z^{-1}) = 1 + a.Z^{-1}$ ,  $0 < a < 1$ .

En remplaçant dans (5-86)  $G(z)$  par  $G_b(z) = 1/A(z^{-1})$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \Phi_b(\omega) &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{(1 + a.e^{-j\omega}) \cdot (1 + a.e^{j\omega})} \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{(1 + a^2 + 2a.\cos \omega)}. \end{aligned}$$

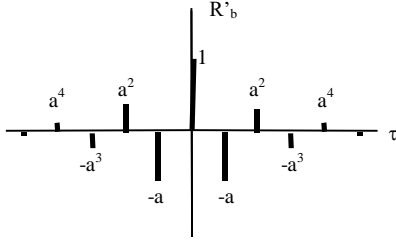
La figure suivante représente la densité spectrale *réduite* de  $b(t)$  sur une période  $[-\pi, +\pi]$ . La puissance (ou l'amplitude) d'une harmonique de  $b(t)$  est d'autant plus grande que sa fréquence est grande.



D'autre part, d'après (5-87), on a pour  $\tau \geq 0$ :

$$R_b(\tau) = \sigma^2 \sum_{p \in C_1} \operatorname{Re} s \frac{z^\tau}{(z+a)(1+az)} = \sigma^2 \cdot \frac{(-a)^\tau}{1-a^2}.$$

et on sait que  $R_b(-\tau) = R_b(\tau)$ . La figure suivante représente la fonction d'autocorrélation normalisée de  $b(t)$ . On en déduit que deux perturbations successives sont, en moyenne, de signes opposés et que la corrélation entre deux perturbations est d'autant plus faible qu'elles sont éloignées l'une de l'autre.



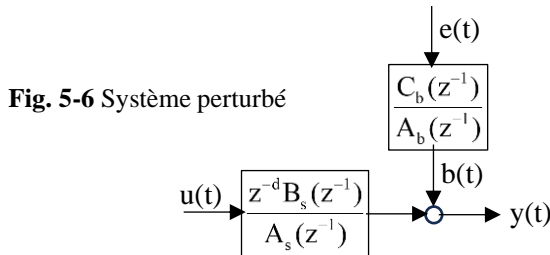
Pour compléter cet exemple, signalons que l'expression de  $R_b(\tau)$  peut être obtenue en appliquant (5-83) au lieu de (5-87). En effet

$$\begin{aligned} \Rightarrow g(n) &= (-a)^n \Rightarrow R_b(\tau) = \sigma^2 \cdot (-a)^\tau \sum a^{2n} \\ &= \sigma^2 \cdot (-a)^\tau / (1 - a^2). \end{aligned}$$

**Modèles des systèmes perturbés.** Considérons maintenant un système de transmittance

$$z^{-d} \cdot B_s(z^{-1}) / A_s(z^{-1})$$

commandé par un signal d'action  $u(t)$  et sa sortie est perturbée par un signal ARMA  $b(t)$  comme le montre la figure 5-6. C'est le modèle Box Jenkins.



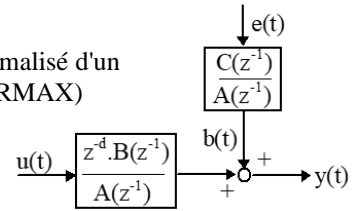
**Fig. 5-6** Système perturbé

Nous pouvons modifier ce modèle de sorte que les dénominateurs des deux blocs soient égaux. En effet (l'argument  $z^{-1}$  sera omis si cela ne crée pas d'ambiguïtés),

$$\begin{aligned} Zy &= \frac{z^{-d} \cdot B_s}{A_s} \cdot Zu + \frac{C_b}{A_b} \cdot Ze \\ &= \frac{z^{-d} \cdot B_s \cdot A_b}{A_s \cdot A_b} \cdot Zu + \frac{C_b \cdot A_s}{A_b \cdot A_s} \cdot Ze \end{aligned} \quad (5-94)$$

La sortie  $y$  est donc la somme d'un processus de perturbation ARMA et d'un signal dû à une action *exogène* (= externe)  $u(t)$ . On dit que  $y$  est un processus ARMAX. En posant  $A = A_b \cdot A_s$ ,  $B = B_s \cdot A_b$  et  $C = C_b \cdot A_s$ , la schéma précédent se ramène à celui représenté par la figure 5-7 où les modèles du système commandé et de la perturbation ont le même dénominateur  $A$ .

**Fig. 5-7** Modèle normalisé d'un système perturbé (ARMAX)



De cette figure on déduit que

$$A \cdot Zy = z^{-d} \cdot B \cdot Zu + C \cdot Ze. \quad (5-95)$$

Les polynômes  $C$  et  $A$  sont de la forme (5-91) tandis que le premier terme  $b_0$  de  $B$  n'a pas nécessairement la valeur 1. On en déduit que la relation temporelle entre  $y$ ,  $e$  et  $u$  d'un processus ARMAX est de la forme :

$$\begin{aligned} y(t) &= - \sum_{i=1}^{n_A} a_i \cdot y(t-i) \\ &+ \sum_{i=0}^{n_B} b_i \cdot u(t-d-i) + \sum_{i=1}^{n_C} c_i \cdot e(t-i) + e(t). \end{aligned} \quad (5-96)$$

**Remarque :** Si, à la figure 5-6, la perturbation  $b(t)$  s'ajoute à  $u(t)$  au lieu de  $y(t)$ , on obtient aussi un modèle ARMAX. En effet, dans ce cas,

$$\begin{aligned} Zy &= \frac{z^{-d} \cdot B_s}{A_s} \cdot Zu + \frac{z^{-d} \cdot B_s}{A_s} \cdot \frac{C_b}{A_b} \cdot Ze \\ &= \frac{z^{-d} \cdot B_s \cdot A_b}{A_s \cdot A_b} \cdot Zu + \frac{z^{-d} \cdot C_b \cdot B_s}{A_b \cdot A_s} \cdot Ze \end{aligned}$$



$$= \frac{z^{-d} \cdot B}{A} \cdot Zu + \frac{C}{A} \cdot [z^{-d} \cdot Z(b_0 e)],$$

avec  $C = \frac{C_b \cdot B_s}{b_0}$  au lieu de  $C = C_b \cdot A_s$ .

Les polynômes  $C$  et  $A$  commencent par 1 (comme dans l'équation (5-95)) et  $z^{-d} \cdot Z(b_0 e)$  est la transformée- $Z$  de la v.a  $b_0 \cdot e(t-d)$  qui est égale, par stationnarité, au bruit blanc  $e_1(t) = b_0 \cdot e(t)$ . On en déduit que le modèle d'un système perturbé peut se ramener toujours à la forme (5-95) que la perturbation soit à l'entrée de ce système ou à sa sortie.

**Identification non paramétrique.** Nous savons que la connaissance de l'échantillonnage  $\{g_n\}$  de la réponse impulsionnelle  $g(t)$  d'un système linéaire permet de déduire sa transmittance

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^{-n}.$$

L'identification non paramétrique d'un système perturbé consiste à déduire le modèle  $G(z)$  en déterminant expérimentalement la suite  $\{g_n\}$  à partir de la mesure de son entrée et de sa sortie. Soit

$$y_t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n g_{t-n} + b_t, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

l'équation d'un système linéaire d'entrée stationnaire  $u$  de moyenne nulle et de sortie  $y$  perturbée par un signal stationnaire  $b$ . (fig. ci-contre). Tenant compte de cette équation, la fonction de corrélation entre l'entrée  $u$  et la sortie  $y$  est

$$R_{uy}(\tau) = \mathcal{E}(y_t u_{t-\tau}) = \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{t-n} \mathcal{E}u_n u_{t-\tau} \right) + \mathcal{E}b_t u_{t-\tau}.$$

Or, l'entrée  $u$ , de moyenne nulle, étant indépendante de la perturbation  $b$ , on a :  $\mathcal{E}(b_t u_{t-\tau}) = 0$ . D'autre part, si  $u$  est un bruit blanc, par exemple si  $u$  est l'entrée d'un bloc modélisant une perturbation,

$$\mathcal{E}u_n u_{t-\tau} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq t - \tau, \\ V(u) = \sigma_u^2 & \text{si } n = t - \tau. \end{cases}$$

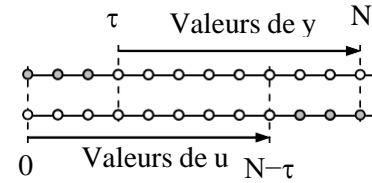
On déduit que  $R_{yu}(\tau) = \sigma_u^2 g(\tau)$  ou

$$g(\tau) = \frac{R_{yu}(\tau)}{\sigma_u^2} \quad (5-96)$$

Ainsi, on obtient  $g(\tau)$  pour  $\tau = 0, 1, \dots, N$ ,  $N$  étant un entier suffisamment grand, en estimant  $R_{yu}(\tau)$  par la formule numérique

$$R_{yu}(\tau) = \frac{1}{N-\tau} \sum_{t=\tau}^N y_t u_{t-\tau}$$

qui nécessite la mesure de  $y$  aux instants  $\tau, \tau+1, \dots, N$  et la mesure de  $u$  aux instants  $0, 1, \dots, N-\tau$  (voir figure suivante). Cette estimation est d'autant moins précise que  $\tau$  est voisin de  $N$ .



Si l'entrée  $u$  n'est pas un bruit blanc (colorée), par exemple si  $u$  est l'entrée d'un système à commander, on détermine un filtre, dit de blanchiment, de transmittance

$$F(z^{-1}) = \sum_{k=0}^r f_k z^{-k}$$

telle que  $F(z^{-1})Zu = Zu_f$  où  $u_f$  est un bruit blanc. Les paramètres  $f_k$  et  $r$  de ce filtre s'obtiennent en appliquant la méthode de moindres carrés qui sera donnée au chapitre 6 suivant. En multipliant l'équation du système,  $Zy = G(z)Zu + Zb$ , par  $F(z^{-1})$  elle devient :

$$Zy_f = G(z)Zu_f + b_f$$

avec

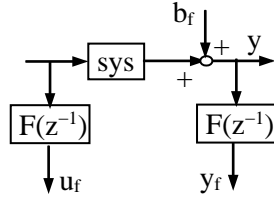
$$Zy_f = F(z^{-1})Zy,$$

$$Zu_f = F(z^{-1})Zu,$$

$$\text{et } Zb_f = F(z^{-1})Zb.$$

Par conséquent,  $u_f$  étant un bruit blanc, au lieu de mesurer  $u$  et  $y$ , on retrouve la relation (5-96) en

mesurant leurs filtrages  $u_f$  et  $y_f$  par  $F(z^{-1})$ .



Voyons maintenant comment déduire la réponse fréquentielle à partir des mesures de  $u$  et  $y$ . Soit

$$\Phi_{uy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{uy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

le spectre du couplage entre  $u$  et  $y$ . Comme la perturbation  $b$  est indépendante de l'entrée  $u$ , on a :

$$\begin{aligned} R_{uy}(\tau) &= \mathcal{E}(y_t u_{t-\tau}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{t-n} \mathcal{E}(u_n u_{t-\tau}) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{t-n} R_u(t-n-\tau) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} g_v R_u(v-\tau). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \Phi_{uy}(\omega) &= \left( \sum_{v=-\infty}^{\infty} g_v e^{-j\omega v} \right) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_u(v-\tau) e^{j\omega(v-\tau)} d\tau \right) \\ &= G(e^{j\omega}) \Phi_u(\omega) \end{aligned}$$

d'où l'on tire

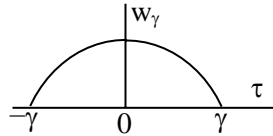
$$G(e^{j\omega}) = \frac{\Phi_{uy}(\omega)}{\Phi_u(\omega)}. \quad (5-97)$$

Numériquement, le spectre  $\Phi_{uy}(\omega)$  peut être estimé par

$$\Phi_{uy}(\omega) \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\gamma}^{\gamma} R_{uy}(\tau) e^{j\omega\tau}, \quad \gamma \approx N.$$

Mais, comme le calcul de  $R_{uy}(\tau)$  est d'autant moins précis que  $\tau$  est grand, on donne à ses valeurs moins de poids quand  $\tau$  est grand que quand  $\tau$  est petit par l'introduction de la fonction de pondération

$$w_{\gamma}(\tau) = \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \frac{\pi\tau}{\gamma} \right).$$



appelée fenêtre de Hamming.

Avec cette pondération, la relation ci-dessus se remplace par la suivante :

$$\Phi_{uy}(\omega) \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\gamma}^{\gamma} R_{uy}(\tau) w_{\gamma}(\tau) e^{j\omega\tau}.$$

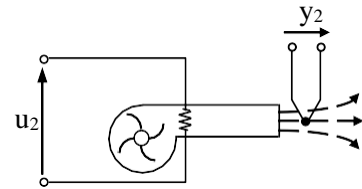
Cette même formule est aussi valable pour estimer  $\Phi_u(\omega)$  à condition de remplacer  $y_t$  par  $u_t$  dans l'expression de  $R_{uy}(\tau)$ .

Généralement à hautes fréquences, la puissance de la perturbation  $b$  est significative tandis que celle de l'entrée  $u$  est faible. À ces fréquences, l'effet de  $b$  sur la sortie  $y$  domine celui de  $u$  ce qui rend erroné le calcul de  $\Phi_{uy}(\omega)$  et celui de la réponse fréquentielle  $G(e^{j\omega})$ .

L'exemple suivant montre comment effectuer par Matlab une identification non paramétrique et l'analyser.

### Exemple 6

Matlab possède, sous forme d'un tableau de 2 colonnes et 1000 lignes, appelé «dryer2», les données expérimentales d'un sécheur dont l'entrée  $u_2$  est la tension appliquée à une résistance qui chauffe l'air soufflé par un ventilateur et dont la sortie  $y_2$  est la tension d'un thermocouple qui mesure la température de l'air sortant du sécheur (figure suivante).  $u_2$  et  $y_2$  sont mesurées chaque 0.08 secondes



1) L'instruction «load» place le tableau dryer2 = [u2 y2] sur la fenêtre de commande de Matlab :

```
>> load dryer2;
```

2) L'instruction «iddata» transforme les 2 colonnes de ce tableau et la période d'échantillonnage 0.08 en un objet d'identification qu'on nomme dry :

```
>> dry = iddata(y2, u2, 0.08);
```

3) 200 données de dry sont choisies pour servir à identifier le système :

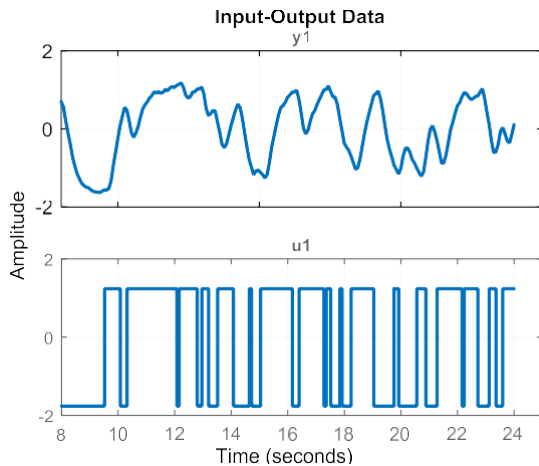
```
>> ze = dry(100:300); % entre 8 et 24 sec.
```

4) L'instruction «dtrend» retranche des données la moyenne de leurs valeurs pour ne conserver que des signaux de moyenne nulle.

```
>> ze = dtrend(ze);
```

5) L'instruction «plot» représente les deux signaux de ze que nous nommons  $y_1$  et  $u_1$  :

```
>> plot(ze)
```



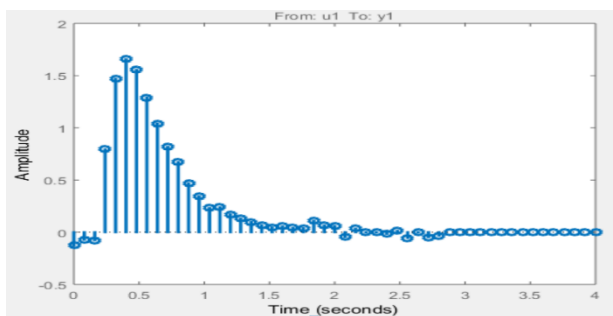
6) Pour estimer la transmittance  $G(z^{-1})$  du système à partir des données ze, on écrit :

```
>> G = impulseest(ze);
```

Matlab fournit G sous la forme  $\sum g_n z^{-n}$  où  $g_n$  est le  $n^{\text{ème}}$  échantillon de la réponse à une impulsion de Dirac obtenu par la formule (5-96).

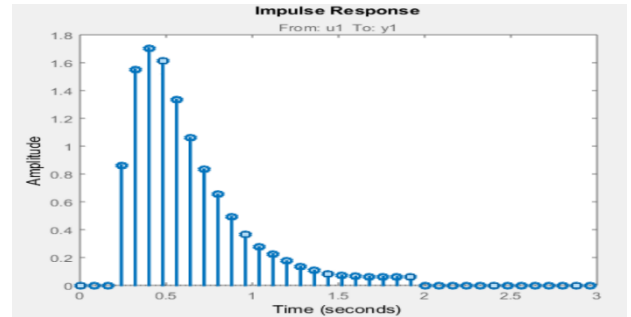
7) Pour représenter la réponse impulsionnelle  $\{g_n\}$ , on écrit :

```
>> impulse(G)
```



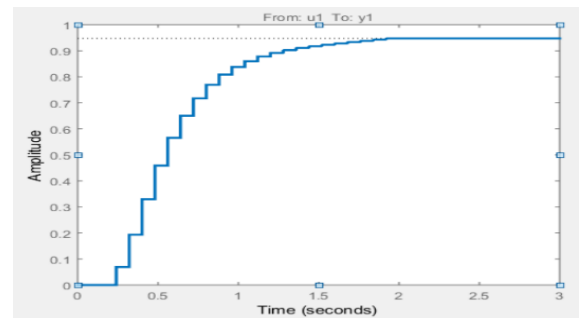
8) On constate sur la figure précédente que les 3 premières impulsions sont nulles, c.à.d. le retard est  $d = 3$  périodes, et qu'à partir de 2 secondes c.à.d. de l'impulsion  $2/0.08 = 25$ , les valeurs des  $g_n$  deviennent négligeables. Il ne reste donc que  $25 - 3 = 22$  impulsions non nulles à partir du retard 3. Pour simplifier la fonction de transfert, on écrit :

```
>> G = impulseest(ze,22,3);  
>> impulse(G)
```



9) D'après (5-76), la réponse  $\{y_n\}$  à un échelon unité (réponse temporelle) est liée à  $\{g_n\}$  par la relation  $y_n = y_{n-1} + g_n$ . Pour la représenter, on écrit :

```
>> step(G)
```

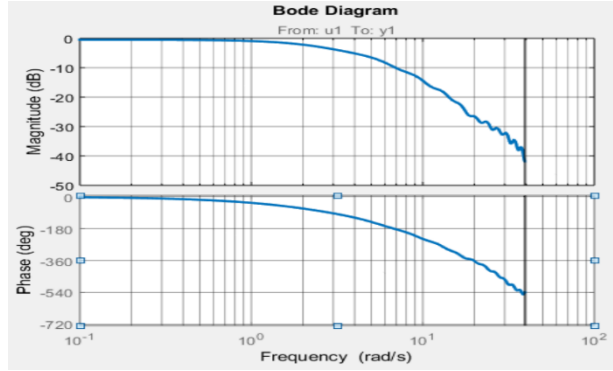


10) La réponse fréquentielle  $G(e^{j\omega T})$  qui se déduit de la formule (5-97) s'obtient en effectuant sur les données ze une analyse spectrale par l'instruction «spa» (calcul de  $\Phi_{yy}$  et  $\Phi_{uu}$ ).

```
>> Gw = spa(ze);
```

Le diagramme de Bode représente le gain et la phase de  $G(e^{j\omega T})$  :

```
>> bode(Gw)
```



Comme nous l'avons signalé ci-dessus, le calcul des spectres  $\Phi_{uy}(\omega)$  et  $\Phi_u(\omega)$  ainsi que de la réponse fréquentielle est peu précis à hautes fréquences.

Dans les paragraphes suivants nous allons montrer l'avantage de modéliser la perturbation dans un système de commande automatique. Nous commençons par établir une politique de commande où la perturbation n'est pas modélisée pour la comparer par la suite avec une politique qui tient compte de cette modélisation.

## 5-5 COMMANDE SANS MODÉLISER LA PERTURBATION

Le signal d'action (ou de commande)  $u(t)$  qui agit sur l'objet commandé doit obliger la réponse effective  $y(t)$  à suivre, "le mieux possible", la réponse désirée (la consigne)  $r(t)$  et dépend donc de ces deux signaux. En adoptant entre  $u$ ,  $y$  et  $r$  une dépendance linéaire on peut écrire :

$$E(z^{-1}).Zu = D(z^{-1}).Zr - F(z^{-1}).Zy \quad (5-98)$$

avec  $E(z^{-1}) = \sum_{i=0}^{n_E} e_i.z^{-i},$

$$\text{et } D(z^{-1}) = \sum_{i=0}^{n_D} d_i.z^{-i}, \quad F(z^{-1}) = \sum_{i=0}^{n_F} f_i.z^{-i}.$$

Les polynômes  $E$ ,  $D$  et  $F$  seront déterminés de sorte à satisfaire les exigences sur la performance du système. La structure de ce système est représentée sur la figure 5-8 où

$$G(z^{-1}) = \frac{z^{-d}.B(z^{-1})}{A(z^{-1})}, \quad \text{avec} \quad (5-99)$$

$$A = 1 + \sum_{i=1}^{n_A} a_i.z^{-i}, \quad B = \sum_{i=0}^{n_B} b_i.z^{-i},$$

est la transmittance de l'objet commandé et  $b(t)$  est une perturbation (non-modélisée) qui s'ajoute à la sortie.

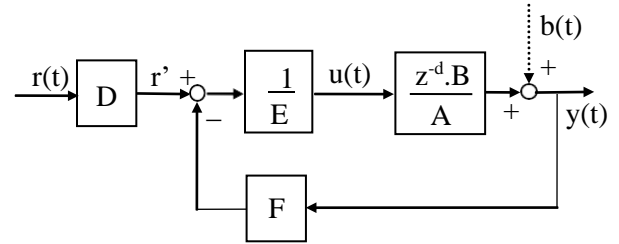


Fig. 5-8 Structure d'un système de commande

La fonction de transfert entre  $r$  et  $y$  est donnée par :

$$\frac{Zy}{Zr} = \frac{z^{-d}.(D.B)/(A.E)}{1 + z^{-d}.(F.B)/(A.E)} = \frac{z^{-d}.D.B}{A.E + z^{-d}.F.B} \quad (5-100)$$

où  $z^{-d}$  représente un retard pur qu'on ne peut pas éliminer car, quel que soit le signal  $u(t)$  appliqué à l'objet commandé à partir d'un instant  $t_0$ , sa réponse  $y$  ne peut commencer à apparaître que  $d$  périodes plus tard. Le mieux qu'on peut espérer consiste à déterminer les polynômes  $E$ ,  $D$  et  $F$  de sorte que  $y$  soit égal à  $r$  retardé de  $d$  périodes, c'est-à-dire  $Zy/Zr = z^{-d}$ . Cette relation sera satisfaite si, d'après (5-100),  $D.B = A.E + z^{-d}.F.B$  ou si

$$E = E'.B. \quad \text{et} \quad D = A.E' + z^{-d}.F \quad (5-101)$$

$$\text{où} \quad E'(z^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{n'_E} e'_i.z^{-i} \quad (5-102)$$

est un polynôme de degré  $n'_E = n_E - n_B$ .

D'un autre côté, on cherche à minimiser l'effet d'une perturbation  $b$  constante (statique) sur la sortie  $y$ . Or, tenant compte de l'égalité (5-101), la fonction de transfert entre  $b$  et  $y$  s'écrit :

$$\frac{Zy}{Zb} = \frac{1}{1 + z^{-d}.(F.B)/(A.E)} = \frac{A.E'}{A.E' + z^{-d}.F}. \quad (5-103)$$

L'effet statique de  $b$  sur  $y$  (c.à.d. la valeur de  $y(\infty)$  quand  $b = 1$  et  $u = 0$ ) est, d'après 5-72,

$$y_{\infty} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) Z y = \lim_{z \rightarrow 1} Z y / Z b \text{ car } Z b = z / (z - 1).$$

L'équation (5-103) montre que cet effet s'annule si l'on choisit  $E'$  de la forme :

$$E' = (1 - z^{-1}).E'' \quad (5-104)$$

où  $E'' = 1 + \sum_{i=1}^{n_E''} e_i'' . z^{-i}$ ,  $n_E'' = n_E' - 1$ .

D'autre part, le régime transitoire de cet effet se caractérise surtout par les pôles de  $Zy/Zb$ , c'est-à-dire par les racines,  $\rho_i$ , du polynôme caractéristique (le dénominateur de  $Zy/Zb$ ).

$$P(z^{-1}) = A.E' + z^{-d}.F = D(z^{-1}) \quad (5-105)$$

$$= A.(1 - z^{-1}).E'' + z^{-d}.F.$$

En choisissant convenablement les  $\rho_i$  de sorte que l'effet transitoire de la perturbation soit de courte durée sans trop d'oscillations (des pôles  $\rho_i$  voisins de l'origine et de l'axe des réels positifs), le problème revient à déterminer pour les polynômes  $E''$  et  $F$  des coefficients  $e_i''$  et  $f_i$  qui vérifient l'égalité :

$$\prod_{i=1}^{n_p} (1 - \rho_i . z^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{n_p} p_i . z^{-i} \quad (5-106)$$

$$= (1 - z^{-1}). \left( 1 + \sum_{i=1}^{n_A} a_i . z^{-i} \right) . \left( 1 + \sum_{i=1}^{n_E''} e_i'' . z^{-i} \right) + z^{-d} . \sum_{i=0}^{n_F} f_i . z^{-i}$$

où les  $p_i$  sont connus et le nombre des paramètres inconnus est  $n_E'' + n_F + 1$ . Ce nombre doit être égal au degré  $n = n_p$  du premier membre de (5-106) pour obtenir, par identification, autant d'équations que d'inconnus. Mais comme

$$n = \max \{ n_A + n_E'' + 1, d + n_F \},$$

on a les deux possibilités :

$$n_E'' + n_F + 1 = \begin{cases} \alpha = n_A + n_E'' + 1 & \text{si } \alpha \geq \beta \\ \Rightarrow n_F = n_A \text{ et } n_E'' \geq d - 1, \\ \beta = d + n_F & \text{si } \alpha \leq \beta \\ \Rightarrow n_E'' = d - 1 \text{ et } n_F \geq n_A. \end{cases}$$

En choisissant  $n_E'' = d - 1$  et  $n_F = n_A$ , ces deux possibilités se fusionnent en une seule et le nombre des paramètres  $e_i''$ ,  $i = 1, \dots, d-1$ , et  $f_j$ ,  $j = 0, \dots, n_A$ , à déterminer sera minimum. D'après (5-106), on obtient ces paramètres en résolvant les équations suivantes :

$$p_1 = a_1' + e_1'',$$

Pour  $2 \leq i \leq d-1$ ,

$$p_i = a_i' + \sum_{k=1}^{i-1} a_{i-k}' . e_k'' + e_i'',$$

Pour  $d \leq i \leq n_A + d$  (5-107)

$$p_i = a_i' + \sum_{k=1}^{i-1} a_{i-k}' . e_k'' + f_{i-d}$$

où  $a_0 = 1$ ,  $a_{n_A+1} = 0$ ,

$$a_i' = \begin{cases} a_i - a_{i-1}, & \text{pour } i = 1, \dots, n_A + 1, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

En posant

$$x = [e_1'' \dots e_{d-1}'' \ f_0 \dots f_{n_A}]^T$$

$$\text{et } h = [p_1 - a_1' \dots p_{n_A+1} - a_{n_A+1}' \ p_{n_A+2} \dots p_{n_A+d}]^T$$

les équations précédentes s'écrivent sous la forme matricielle  $Mx = h$  où  $M$  est une matrice triangulaire. Le système d'équations (5-107) a donc toujours une solution unique déterminant  $E''$  et  $F$ . Ayant ces polynômes l'algorithme de commande se déduit de la figure 5-8, en remplaçant  $D(z^{-1})$  par  $P(z^{-1})$  et  $E(z^{-1})$  par  $B(z^{-1}).(1 - z^{-1}).E''(z^{-1})$ .

**Remarque:** Tenant compte de (5-101), la fonction de transfert entre la consigne  $r$  et le signal de commande  $u$  est :

$$\frac{Zu}{Zr} = \frac{D/E}{1 + z^{-d}.(B.F)/(A.E)} = \frac{A}{B}.$$

On en déduit que l'algorithme précédent n'est pas valable si  $B(z^{-1})$  a une racine extérieure au cercle

unité car, dans ce cas, la commande  $u$  diverge vers l'infini. D'autre part,  $n_E'' = d - 1 \Rightarrow d \geq 1$ , c'est-à-dire le degré du numérateur  $b_0 z^m + \dots + b_m$  de l'objet commandé  $G(z)$  doit être strictement inférieur au degré du dénominateur  $z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ .

### Exemple 7

Considérons un objet à commander de transmittance

$$G(z) = \frac{z^{-3}(0.4 - 0.24z^{-1})}{1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}} = z^{-d} \frac{B}{A}.$$

$$n_A = 2, \quad n_B = 1, \quad d = 3.$$

L'algorithme ci-dessus est applicable car la racine de  $B$  est  $0.24/0.4 = 0.6 < 1$  et  $d > 1$ . Supposons que la réponse désirée est  $r(t)$  dont l'échantillonnage est

$$r_0 = 0, \quad r_1 = 0.4, \quad r_2 = 0.8 \text{ et } r_n = 1 \quad \forall n \geq 3.$$

Sa transformée  $Z$  s'obtient en écrivant

$$\begin{aligned} Zr &= 0.4z^{-1} + 0.8z^{-2} + \sum_{n=3}^{\infty} z^{-n} \\ &= 0.4z^{-1} + 0.8z^{-2} + z^{-3} \frac{1}{1 - z^{-1}} \\ &= \frac{0.4z^2 + 0.4z + 0.2}{z^2(z - 1)}. \end{aligned}$$

La commande est  $u = (Dr - Fy) / E$  où

$$D = P, \quad E = B(1 - z^{-1})E'' \text{ avec}$$

$$n_F = n_A = 2, \quad n_E'' = d - 1 = 2, \quad n_P = n_A + d = 5.$$

Le polynôme caractéristique  $P$  se définit par ses racines  $\rho_i$ . Pour obtenir une réponse rapide sans trop d'oscillations, on choisit ces racines (pôles) voisines de l'origine et de l'axe des réels positifs. En prenant

$$\rho_1 = 0.2, \quad \rho_2 = \rho_3 = 0.2e^{j\pi/3} \text{ et } \rho_4 = \rho_5 = 0.2e^{-j\pi/3},$$

on obtient :

$$P(z^{-1}) = \prod_{i=1}^5 (1 - \rho_i z^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^5 p_i z^{-i}$$

avec

$$p_1 = \sum \rho_i = -0.8928$$

$$p_2 = \sum \rho_i \rho_j = 0.3386$$

$$p_3 = \sum \rho_i \rho_j \rho_k = -0.0677$$

$$p_4 = \sum \rho_i \rho_j \rho_k \rho_s = 0.0071$$

$$p_5 = \rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4 \rho_5 = -0.0003.$$

Pour déterminer les polynômes  $F$  et  $E''$ , on écrit les équations (5-107) sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1' & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2' & a_1' & 1 & 0 & 0 \\ a_3' & a_2' & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_3' & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1'' \\ e_2'' \\ f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 - a_1' \\ p_2 - a_2' \\ p_3 - a_3' \\ p_4 \\ p_5 \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{aligned} [a_1' \ a_2' \ a_3'] &= [a_1 - 1 \ a_2 - a_1 - a_2] \\ &= [-2.5 \ 2 \ -0.5]. \end{aligned}$$

$$h^T = [1.6072 \ -1.6614 \ 0.4323 \ 0.0071 \ -0.0003].$$

Par l'instruction  $x = \text{inv}(M) * h$ , on obtient :

$$\begin{aligned} [e_1'' \ e_2'' \ f_0 \ f_1 \ f_2] \\ = [1.6072 \ 2.3566 \ 3.1094 \ -3.9025 \ 1.1780]. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} E(z^{-1}) &= (1 - z^{-1})B(z^{-1})E''(z^{-1}) \\ &= (1 - z^{-1})(0.4 - 0.24z^{-1})(1 + 1.6072z^{-1} + 2.3566z^{-2}) \\ &= 0.4 + 0.0029z^{-1} + 0.1540z^{-2} \\ &\quad - 1.1225z^{-3} + 0.5656z^{-4}. \end{aligned}$$

$$F(z^{-1}) = 3.1094 - 3.9025z^{-1} + 1.1780z^{-2}.$$

$$\text{et} \quad D(z^{-1}) = P(z^{-1}).$$

À l'aide de SIMULINK de MATLAB, nous avons simulé la politique de commande définie ci-dessus. La figure 5-9 représente le schéma bloc du simulateur. La référence  $\{r_n\}$  est construite par un constructeur de signaux « signal builder » et la perturbation  $b(t)$  est produite par une source « step » si elle est constante ou à l'aide d'une source « white-noise » suivie d'une fonction de transfert si elle est aléatoire (voir figure 5-6). En connectant  $r(t)$ ,  $b(t)$  et  $y(t)$  à un multiplexeur «MUX» suivi d'un bloc de visualisation graphique « scope » ou d'un bloc



« to workspace », on obtient dans un même plan les graphiques de ces 3 signaux.

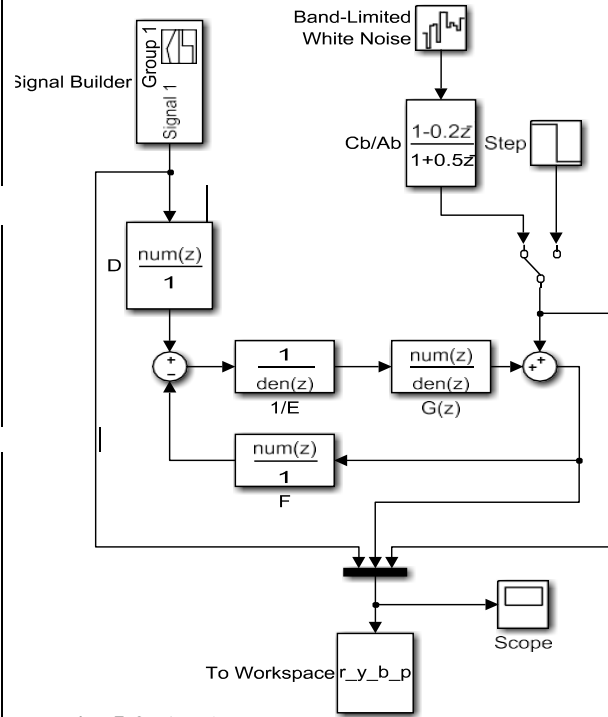


Fig. 5-9 Simulateur

La figure 5-10 montre le résultat obtenu quand une perturbation constante  $b(t) = -0.1$  est appliquée à partir de l'instant 10 T.

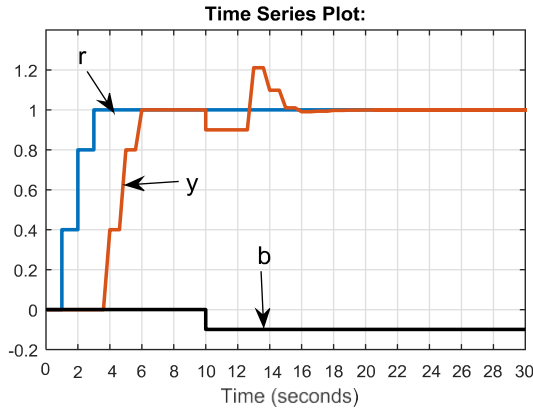


Fig. 5-10 Réponse quand la perturbation est constante

On remarque que la réponse  $y(t)$  est égale à la réponse désirée  $r(t)$  avec un retard de  $d = 3T$  et que l'effet de la perturbation est complètement éliminé après 5 ou 6T de son apparition. La figure 5-11 montre l'effet d'une perturbation  $b(t)$  aléatoire modélisé par la réponse de

$$G_b(z^{-1}) = (1 - 0.2z^{-1}) / (1 + 0.5z^{-1})$$

à un bruit blanc de variance 0.05. Comme nous n'avons pas tenu compte de ce modèle lors de la conception de l'algorithme de commande, l'effet de cette perturbation est assez important. Au paragraphe suivant, nous allons minimiser cet effet en tenant compte du modèle de la perturbation.

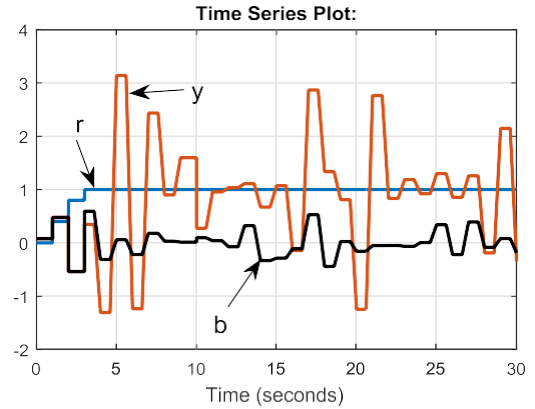


Fig. 5-11 Réponse quand la perturbation aléatoire est non modélisée

## 5-6 PRISE EN COMPTE DE LA PERTURBATION MODÉLISÉE

Soit  $G(z) = z^{-d}B(z^{-1})/A(z^{-1})$  la transmittance de l'objet commandé défini par (5-99) et soit  $b$  une perturbation modélisée par la réponse de  $G_b(z^{-1}) = C(z^{-1})/A(z^{-1})$  à un bruit blanc  $e(t)$ . La sortie  $y$  du système est un processus ARMAX lié au signal de commande  $u$  et au bruit blanc  $e$  par la relation :

$$A(z^{-1})Zy = z^{-d}B(z^{-1})Zu + C(z^{-1})Ze. \quad (5-108)$$

Comme au paragraphe 5-5 précédent, la commande  $u$  est liée à la réponse effective  $y(t)$  et la réponse désirée  $r(t)$  par une relation linéaire de la forme :

$$E(z^{-1})Zu = D(z^{-1}).Zr - F(z^{-1}).Zy. \quad (5-109)$$

Posons  $q^{-i}$  l'opérateur qui retarde une fonction  $f$  de  $i$  périodes, c'est-à-dire  $q^{-i}f(t) = f(t - iT)$  dont la transformée  $Z$  est  $z^{-i}Zf$ . Si l'unité du temps est prise égale à la période  $T$ , l'expression temporelle de la

relation (5-108) est

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B(q^{-1})u(t) + C(q^{-1})e(t) \quad (5-110)$$

avec

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 + \sum_{i=1}^{n_A} a_i q^{-i}, \\ B(q^{-1}) &= \sum_{i=0}^{n_B} b_i q^{-i}, \quad C(q^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{n_C} c_i q^{-i}. \end{aligned} \quad (5-111)$$

De même l'expression temporelle de (5-109) s'écrit :

$$E(q^{-1})u(t) = D(q^{-1})r(t) - F(q^{-1})y(t) \quad (5-112)$$

avec

$$\begin{aligned} E(q^{-1}) &= \sum_{i=0}^{n_E} e_i q^{-i}, \\ D(q^{-1}) &= \sum_{i=0}^{n_D} d_i q^{-i}, \quad F(q^{-1}) = \sum_{i=0}^{n_F} f_i q^{-i}. \end{aligned} \quad (5-113)$$

En multipliant (5-110) par  $E(q^{-1})$  puis en remplaçant  $E(q^{-1})u(t)$  par son expression (5-112), on obtient l'équation de la boucle fermée liant la sortie  $y$  aux entrées  $r$  et  $e$  :

$$\begin{aligned} [A(q^{-1})E(q^{-1}) + q^{-d}B(q^{-1})F(q^{-1})] y(t) \\ = q^{-d}B(q^{-1})D(q^{-1})r(t) + C(q^{-1})E(q^{-1})e(t). \end{aligned} \quad (5-114)$$

Pour déterminer les polynômes  $D, E, F$  qui définissent la politique de commande, imposons d'abord que la moyenne de  $y(t)$  doit être égale à  $q^{-d}.r(t)$  en tout instant  $t$  (le retard de  $d$  périodes de  $y$  par rapport à  $r$  est inévitable) :

$$\mathcal{E}[y(t)] = q^{-d}.r(t), \quad \forall t. \quad (5-115)$$

Sachant que  $\mathcal{E}[e(t)] = 0$  et  $r(t)$  est non aléatoire ( $\mathcal{E}[r(t)] = r(t) \forall t$ ), l'espérance mathématique des deux membres de (5-114), montre que l'objectif (5-115) sera atteint si

$$A(q^{-1})E(q^{-1}) + q^{-d}B(q^{-1})F(q^{-1}) = B(q^{-1})D(q^{-1})$$

ou si

$$E(q^{-1}) = B(q^{-1})E'(q^{-1}) \quad \text{et} \quad (5-116)$$

$$D(q^{-1}) = A(q^{-1})E'(q^{-1}) + q^{-d}F(q^{-1}). \quad (5-117)$$

$$\text{avec } E'(q^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{n'_E} e'_i q^{-i} \quad \text{et} \quad n'_E = n_E - n_B.$$

Tenant compte de ces relations, l'équation (5-114) de la boucle fermée montre que le polynôme caractéristique  $P(q^{-1})$  (le dénominateur de  $\mathcal{E}(y)/r$ ) est égal à  $D(q^{-1})$ .

Pour  $D(q^{-1})$  donné, on détermine les paramètres des polynômes  $E'$  et  $F$  en identifiant les deux membres de (5-117). Par un raisonnement analogue à celui du paragraphe précédent, on peut démontrer qu'en choisissant  $n'_E = d - 1$  et  $n_F = n_A - 1$ , le nombre des paramètres de  $E'$  et  $F$  à déterminer sera minimum. D'autre part, le polynôme  $D(q^{-1})$  sera choisi de sorte à minimiser l'effet  $v(t)$  de la perturbation aléatoire  $b(t)$ . Or  $v(t)$  se définit par l'écart entre la réponse effective  $y(t)$  et la réponse désirée  $q^{-d}.r(t)$ . Tenant compte de (5-116) et (5-117), cet écart se déduit de l'équation (5-114) :

$$\begin{aligned} v(t) &= y(t) - q^{-d}.r(t) \\ &= \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})} E'(q^{-1}).e(t). \end{aligned} \quad (5-118)$$

L'effet  $v(t)$  de la perturbation est donc la réponse de la fonction de transfert  $C/D$  au signal aléatoire

$$\begin{aligned} x_t &= E'(q^{-1})e(t) \\ &= e(t) + e'_1.e(t-1) + \dots + e'_{d-1}.e(t-d+1). \end{aligned} \quad (5-119)$$

$x_t$  est un processus moyenne mobile d'ordre  $d - 1$ , stationnaire et ergodique, tel que, pour tout  $t$ ,

$$\mathcal{E}(x_t) = 0, \quad \sigma_x^2 = \mathcal{E}(x_t^2) = \sigma^2 \left( 1 + \sum_{i=1}^{d-1} e_i'^2 \right)$$

$$\text{et } R_x(k) = \mathcal{E}(x_t, x_{t-k}) \quad (5-120)$$

$$= \begin{cases} \sigma^2 \sum_{i=k}^{d-1} e'_i e'_{i-k} & \text{si } 1 \leq k \leq d-1, \\ 0 & \text{si } k > d-1, \end{cases}$$

où  $\sigma^2$  est la variance du bruit blanc  $e(t)$ . Comme les polynômes  $C$  et  $D$  commencent par 1, le développement en série de  $C/D$  commence aussi par 1 et l'équation (5-118) s'écrit :

$$\begin{aligned} v(t) &= (1 + h_1 q^{-1} + h_2 q^{-2} + \dots) x_t \\ &= x_t + h_1 x_{t-1} + h_2 x_{t-2} + \dots \end{aligned} \quad (5-121)$$

L'effet de la perturbation est donc une somme pondérée des signaux  $x_t, x_{t-1}, \dots$ . Mais, en annulant tous les  $h_i, i = 1, 2, 3, \dots$ , c.à.d. en prenant  $D(q^{-1}) = C(q^{-1})$ ,  $v(t)$  sera égal à  $x_t$  qui ne dépend que des  $d$  dernières valeurs du bruit blanc  $e$ .

Par ce choix de  $D(q^{-1})$ , la variance de l'effet de la perturbation  $v(t)$  sera minimum et on dit que ce choix est optimal. En effet de l'égalité  $D(q^{-1}) = C(q^{-1})$  et de la relation (5-117) on tire

$$A(q^{-1})E'(q^{-1}) = C(q^{-1}) - q^{-d}F(q^{-1}).$$

D'autre part, la relation (5-110) est vraie, non seulement pour la commande  $u$  en boucle fermée définie ci-dessus, mais aussi pour toute commande  $u'$  appliquée au système commandé. En multipliant les deux membres (5-110) par  $E'$  et tenant compte de l'équation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} [C(q^{-1}) - q^{-d}F(q^{-1})]y(t) \\ = q^{-d}B(q^{-1})E'(q^{-1})u'(t) + C(q^{-1})E'(q^{-1})e(t). \end{aligned}$$

Sachant que  $BE' = E$ , la réponse  $y$  à toute commande  $u'$  appliquée au système commandé peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{F(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(t-d) + \frac{E(q^{-1})}{C(q^{-1})} u'(t-d) \\ &\quad + E'(q^{-1})e(t). \end{aligned}$$

D'où, sous toute commande  $u'$ , la variance de  $v(t)$  est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{[v(t)]^2\} &= \mathcal{E}\{[y(t) - q^{-d}.r(t)]^2\} \\ &= \mathcal{E}\left\{\left[\begin{aligned} &\frac{F(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(t-d) \\ &+ \frac{E(q^{-1})}{C(q^{-1})} u'(t-d) - r(t-d) \end{aligned}\right]^2\right\} \quad (i) \\ &+ \mathcal{E}\{[E'(q^{-1}).e(t)]^2\} \quad (ii) \end{aligned}$$

$$+ 2\mathcal{E}\left\{\left[\begin{aligned} &\frac{F(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(t-d) \\ &+ \frac{E(q^{-1})}{C(q^{-1})} u'(t-d) \\ &- r(t-d) \end{aligned}\right] \cdot [E'(q^{-1})e(t)]\right\}. \quad (iii)$$

Le troisième terme (iii) est nul puisque les v.a  $e(t), e(t-1), \dots, e(t-d+1)$  qui ont une moyenne nulle sont indépendantes de  $y(t-d), y(t-d-1), y(t-d-2), \dots, u'(t-d), u'(t-d-1), \dots$  et de  $r(t-d)$  et comme le premier terme (i) est positif et le second (ii) est indépendant de la commande  $u'$ , ce terme (ii) est inférieur ou égal à la variance de  $v(t)$ . Or, pour la commande  $u$  définie par (5-109) et  $D = C$ , le premier terme (i) est nul d'où la variance de  $v(t)$  est minimum puisqu'elle devient égale au second terme (ii).

En choisissant convenablement les racines du polynôme caractéristique  $P(q^{-1}) = D(q^{-1}) = C(q^{-1})$ , on détermine les coefficients  $c_i$  du polynôme  $C(q^{-1})$  et par identification des deux membres de (5-117), on détermine les coefficients de  $E'(q^{-1})$  et  $F(q^{-1})$  en résolvant les équations suivantes :

$$\begin{aligned} c_i &= a_i + \sum_{k=1}^i a_{i-k} e'_k, \quad \text{pour } i < d, \\ c_i &= a_i + \sum_{k=1}^i a_{i-k} e'_k + f_{i-d}, \quad \text{pour } d \leq i \leq n_A + d - 1, \end{aligned} \quad (5-122)$$

$$\begin{aligned} \text{où} \quad a_0 &= e'_0 = 1 \\ a_j &= e'_j = 0, \forall j > n_A \text{ et } \forall k > d - 1. \end{aligned}$$

Ces équations sont semblables aux équations (5-107) où les  $p_i$  et les  $a'_i$  sont maintenant remplacés par les  $c_i$  et les  $a_i$ .

**Remarque 1.** Comme dans le cas déterministe,  $d$  doit être supérieur ou égale à 1 car  $n'_E = d - 1$ .

**Remarque 2.** Suivant le raisonnement du paragraphe 5-5, on peut penser éliminer l'effet stationnaire d'une perturbation constante en posant  $E'(q^{-1}) = (1 - q^{-1})E''(q^{-1})$ . Ceci revient à remplacer dans (5-117)  $E'(q^{-1})$  par  $E''(q^{-1})$  et  $A(q^{-1})$  par  $(1 - q^{-1}).A(q^{-1})$ . Mais pour que la perturbation aléatoire  $b(t)$  ne se modifie

pas, il devient nécessaire de remplacer  $C(q^{-1})$  par  $(1-q^{-1}).C(q^{-1})$  d'où, selon la politique optimale, le polynôme caractéristique devient  $P(q^{-1}) = D(q^{-1}) = (1-q^{-1}).C(q^{-1})$ . Comme ce polynôme comporte une racine sur le cercle unité, le système serait instable. On ne peut donc pas minimiser la variance de l'effet d'une perturbation aléatoire et éliminer en même temps l'effet stationnaire d'une perturbation constante.

**Remarque 3.** Sous la politique optimale, l'effet de la perturbation sur le signal de commande  $u(t)$  est :

$$u(t) = \frac{FC / AE}{1 + q^{-d}FB / AE} e(t) = \frac{F(q^{-1})}{B(q^{-1})} e(t). \quad (5-123)$$

Comme dans le cas déterministe, les racines de  $B(q^{-1})$  doivent être à l'intérieur du cercle unité pour que  $u(t)$  reste fini.

**Remarque 4.** Parfois, pour éliminer les hautes fréquences de la perturbation  $b(t)$ , on filtre ce signal par  $1/P_f(q^{-1})$  ce qui revient à remplacer  $C(q^{-1})$  par  $C'(q^{-1}) = C(q^{-1})P_f(q^{-1})$ . Le polynôme caractéristique devient  $P(q^{-1}) = D(q^{-1}) = C'(q^{-1})$  de degré  $n_p = n_A + d - 1$  d'où il est nécessaire que  $n_{pf} < n_A + d - n_C$ .

### Exemple 8

Considérons le même système que dans l'exemple 7 de fonction de transfert

$$G(q^{-1}) = \frac{q^{-3}(0.4 - 0.24q^{-1})}{1 - 1.5q^{-1} + 0.5q^{-2}} = q^{-d} \frac{B_s}{A_s}$$

avec la même période d'échantillonnage ( $T = 1$ ) et la même consigne  $r(t)$  :

$$r_0 = 0, \quad r_1 = 0.4, \quad r_2 = 0.8 \quad \text{et} \quad r_n = 1 \quad \forall n \geq 3.$$

Supposons en plus que la perturbation aléatoire qui s'ajoute à la sortie est la même que dans l'exemple 7 c.à.d. modélisée par

$$\begin{aligned} b(t) &= G_b(q^{-1})e(t) \\ &= \frac{C_b(q^{-1})}{A_b(q^{-1})} e(t) = \frac{(1 - 0.2q^{-1})}{(1 + 0.5q^{-1})} e(t). \end{aligned}$$

Pour que la sortie  $y(t)$  soit un processus ARMAX,

on écrit :

$$\begin{aligned} G(q^{-1}) &= q^{-d} \frac{B_s A_b}{A_s A_b} = q^{-d} \frac{B}{A} \\ &= q^{-3} \frac{0.4 - 0.04q^{-1} - 0.12q^{-2}}{1 - q^{-1} - 0.25q^{-2} + 0.25q^{-3}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} G_b(q^{-1}) &= \frac{C_b A_s}{A_b A_s} = \frac{C}{A} \\ &= \frac{1 - 1.7q^{-1} - 0.8q^{-2} + 0.1q^{-3}}{1 - q^{-1} - 0.25q^{-2} + 0.25q^{-3}}. \end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique  $P(q^{-1})$  qui minimise la variance de l'effet  $v(t)$  de la perturbation est

$$P(q^{-1}) = C(q^{-1}) = 1 - 1.7q^{-1} - 0.8q^{-2} + 0.1q^{-3}.$$

Les  $n_A + d - 1 = 5$  équations aux 5 inconnus  $e'_1, e'_2, f_0, f_1, f_2$  définies dans (5-122) s'écrivent sous la forme matricielle  $Mx = h$  avec

$$\begin{aligned} h^T &= [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad 0 \quad 0] - [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad 0 \quad 0] \\ &= [-0.7 \quad 1.05 \quad -0.35 \quad 0 \quad 0] \end{aligned}$$

et

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A l'aide de l'instruction  $x = \text{inv}(M)*h$ , on obtient :

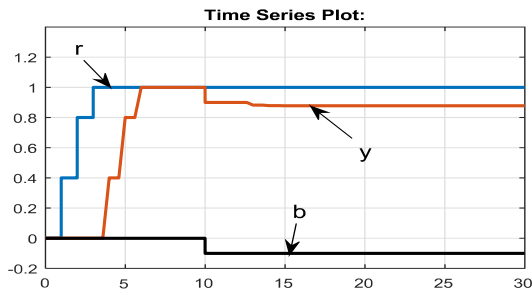
$$\begin{aligned} x^T &= [e'_1 \quad e'_2 \quad f_0 \quad f_1 \quad f_2] \\ &= [-0.7 \quad 0.35 \quad -0.175 \quad 0.2625 \quad -0.0875] \end{aligned}$$

d'où

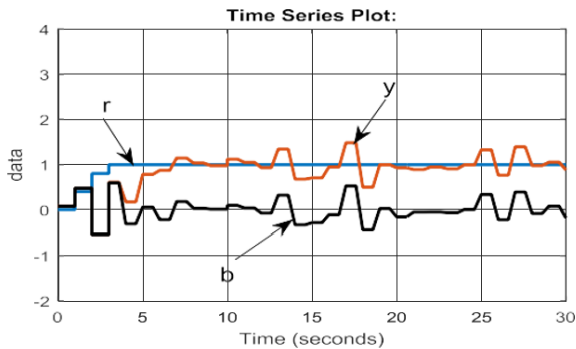
$$\begin{aligned} E(q^{-1}) &= B(q^{-1})E'(q^{-1}) \\ &= 0.4 - 0.32q^{-1} + 0.048q^{-2} + 0.07q^{-3} - 0.042q^{-4}, \\ F(q^{-1}) &= -0.175 + 0.2625q^{-1} - 0.0875q^{-2}, \\ D(q^{-1}) &= C(q^{-1}) = 1 - 1.7q^{-1} + 0.8q^{-2} - 0.1q^{-3}. \end{aligned}$$

Les figures 5-12 et 5-13 représentent les résultats de la simulation pour les mêmes perturbations constante et aléatoire que dans l'exemple 7. Comme

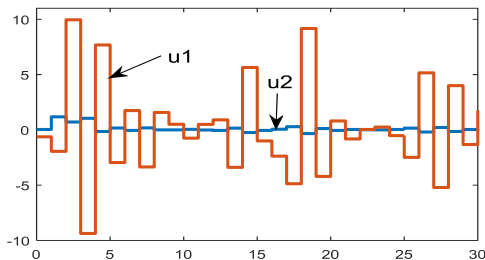
nous l'avons signalé ci-dessus (remarque 2), l'effet de la perturbation constante n'est pas éliminé. Par contre, la comparaison des figures 5-11 et 5-13 montre l'amélioration de la performance quand la perturbation est aléatoire. La figure 5-14 montre la variation de la commande pour chacune des deux politiques. On remarque que les fluctuations de la commande  $u_2$  qui tient compte du modèle de la perturbation sont beaucoup plus petites que celles de la commande  $u_1$  qui ne tient pas compte de ce modèle. Avec la politique  $u_2$  le risque de saturation de l'actionneur ou de la fatigue du système commandé est donc faible.



**Fig. 5-12** Réponse quand la perturbation est constante



**Fig. 5-13** Réponse quand la perturbation est aléatoire modélisée.



**Fig.5-14** Signaux de commande des deux politiques pour la même perturbation aléatoire.