# MD1- LOIS PHYSIQUES

<u>EXERCICE 1-1</u>

Un tube circulaire, de diamètre intérieur $d_i$ et extérieur $d_e$, a un facteur de conduction $\lambda_1$. Il est recouvert par une matière isolante d'épaisseur e et de facteur de conduction $\lambda_2$. Le tout est entouré par l'air ambiant et à l'intérieur du tuyau circule de l'eau chaude. En posant $\alpha_i$ et $\alpha_e$ les facteurs de convection entre l'eau chaude et le tuyau et entre l'isolant et l'air ambiant, montrer que la résistance par mètre de longueur à la déperdition de chaleur entre l'eau à l'air ambiant est

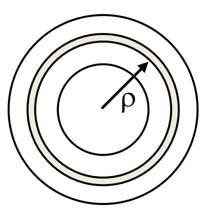
$$R_{th} = \left( \frac{1}{\alpha_i d_i} + \frac{1}{2\lambda_1} \ln\frac{d_e}{d_i} + \frac{1}{2\lambda_2} \ln\frac{D}{d_e} + \frac{1}{\alpha_e D} \right) \frac{1}{\pi}$$

où D = $d_e$ + 2e.

Il suffit d'additionner les résistances en série a) de convection entre l'eau chaude et le tuyau, b) de conduction du tuyau, c) de conduction de l'isolant et d) de convection entre l'isolant et le milieu ambiant.

a) La surface interne du tuyau par mètre de longueur étant $\pi d_i$, la résistance de convection eau chaude/tuyau est $R_{cv1} = 1/(\alpha_i \pi d_i)$

b) De même, la résistance de convection isolant/milieu ambiant est $R_{cv2} = 1/(\alpha_e \pi D)$ où $D = d_e + 2e$ est le diamètre extérieur de l'isolant.




c) Considérons dans le tuyau un cylindre de longueur un mètre, de rayon ρ et d'épaisseur dρ. D'après la loi de Fourrier, le flux de chaleur à travers ce cylindre est $q_c = [\lambda_1(2\pi\rho)/d\rho]dT$ où dT est la variation de température à travers le cylindre. Comme dT est un effort et $q_v$ est une célérité, $d\rho/[\lambda_1(2\pi\rho)]$ est la résistance de conduction $dR_{cd1}$ de ce cylindre élémentaire. La résistance par mètre du tuyau est donc :

$$R_{cd1} = \frac{1}{2\lambda_1\pi}\int_{r_i}^{r_e}\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{2\lambda_1\pi}\mathrm{Ln}\frac{r_e}{r_i} = \frac{1}{2\lambda_1\pi}\mathrm{Ln}\frac{d_e}{d_i}.$$

d) De même, la résistance de conduction de l'isolant est $R_{cd2} = \frac{1}{2\lambda_2\pi}\mathrm{Ln}\frac{D}{d_e}$.

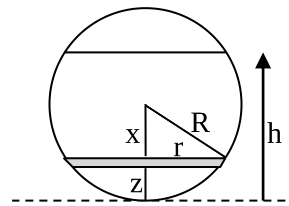
La résistance thermique totale est donc

$$R_{th} = R_{cv1} + R_{cd1} + R_{cd2} + R_{cv2}.$$

<u>EXERCICE 1-2</u>

Calculer l'énergie potentielle d'un liquide de niveau h dans un réservoir sphérique de rayon R.

*Rép : $\pi\rho g h^3(2R/3 - h/4)$*




L'énergie potentielle d'un disque de niveau z = R – x et d'épaisseur dz est

$$dW_p = (dm)gz$$

où dm est la masse du disque et g l'accélération terrestre. Or, si ρ est la masse spécifique,

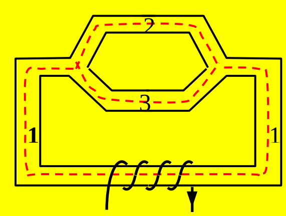
$$dm = \rho\pi r^2 dz = \rho\pi(R^2 - x^2)dz$$
$$= \rho\pi(-z^2 + 2zR)dz.$$

Donc

$$W_p = \rho\pi g\int_0^h(-z^3 + 2z^2R)dz = \rho\pi g\left[2\frac{z^3}{3}R - \frac{z^4}{4}\right]_0^h$$
$$= \rho\pi g h^3\left(\frac{2R}{3} - \frac{h}{4}\right).$$

<u>EXERCICE 1-3</u>

Le circuit magnétique suivant est constitué de 3 parties dont deux sont en parallèles.




En désignant par $C_i$ la capacité de la partie i, montrer que la capacité C de ce circuit magnétique vérifie

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2 + C_3}.$$

La réluctance de ce circuit magnétique est

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_{eq} \qquad (1)$$

où $\mathcal{R}_{eq}$ est la réluctance équivalente des deux branches 2 et 3 c.à.d. $\mathcal{R}_{eq}\varphi_1 = \mathcal{R}_2\varphi_2 = \mathcal{R}_3\varphi_3 = f_m$ où $f_m$ est la force magnétomotrice (la circulation du champ magnétique) entre les bornes communes des branches 2 et 3. Or le flux magnétique $\varphi_1 = \varphi_2 + \varphi_3$ d'où

$$\frac{f_m}{\mathcal{R}_{eq}} = \frac{f_m}{\mathcal{R}_2} + \frac{f_{m\theta}}{\mathcal{R}_3} \text{ ou } \frac{1}{\mathcal{R}_{eq}} = \frac{1}{\mathcal{R}_2} + \frac{1}{\mathcal{R}_3}.$$

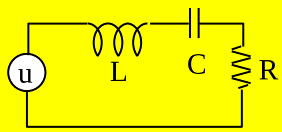
Comme la capacité d'une partie d'un circuit magnétique est l'inverse de sa réluctance, on déduit que $C_{eq} = C_2 + C_3$ donc, d'après (1),

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2 + C_3}.$$

EXERCICE 1-4

En écrivant que l'énergie gagnée (reçue − dissipée) est égale à la variation de l'énergie totale (cinétique + potentielle), montrer que pour le circuit suivant

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = u$$




où Q est la charge de la capacité.

La puissance fournie est $ui = u(dQ/dt)$.
La puissance dissipée est $Ri^2 = R(dQ/dt)^2$.
L'énergie cinétique (magnétique) de l'inductance est $Li^2/2 = (L/2)(dQ/dt)^2$.
L'énergie potentielle (électrostatique) de la capacité est $(1/2C)Q^2$.
L'énergie gagnée est donc

$$W_t = (L/2)(dQ/dt)^2 + (1/2C)Q^2$$

dont la variation par unité de temps est

$$\frac{dW_t}{dt} = L\frac{dQ}{dt}\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt} = u\frac{dQ}{dt} - R\left(\frac{dQ}{dt}\right)^2.$$

En simplifiant le terme dQ/dt, on obtient l'équation demandée. Il est évident que cette équation se déduit plus facilement en égalisant u à la somme des tensions aux bornes de L, C et R

EXERCICE 1-5

a) Soit D un axe passant par le centre d'un disque de masse m et de rayon R. Montrer que le moment d'inertie du disque par rapport à D est $mR^2/2$ si D est perpendiculaire au disque, à $mR^2/4$ si D est un diamètre du disque.

b) Montrer que si $I_{Gx}$ est le moment d'inertie d'un solide S de masse m par rapport à un axe Gx passant par le centre de gravité G de S, son moment d'inertie par rapport à un autre axe Px parallèle à Gx est

$$I_{Px} = I_{Gx} + md^2$$

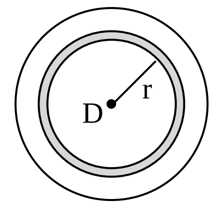
où d est la distance entre les deux axes.

c) Déterminer le tenseur d'inertie d'une sphère de masse m et de rayon R par rapport à un repère orthonormé d'origine le centre de la sphère.

d) Déterminer le tenseur d'inertie d'un cône de révolution, de masse m, de hauteur h et de rayon à la base R, par rapport à un repère orthonormé ayant pour origine le sommet P du cône et dont l'axe Pz est l'axe du cône.

a)

1) Le moment d'inertie d'un anneau élémentaire par rapport à une droite D perpendiculaire au disque en son centre est $dI_D = (\delta m)r^2$ où $\delta m$ est la masse de l'anneau et r son rayon. Or $\delta m = \rho 2\pi r dr$, $\rho$ étant la masse surfacique du disque et dr la largeur de l'anneau. Donc

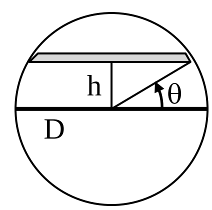



$$I_D = \rho 2\pi \int_0^R r^3 dr = \rho 2\pi \frac{R^4}{4}.$$

Comme la masse du disque est $m = \rho\pi R^2$, on a :

$$I_D = mR^2/2.$$

2) Le moment d'inertie d'un rectangle élémentaire parallèle au diamètre D du disque est $dI_D = (\delta m)h^2$ où $\delta m$ est la masse du rectangle et h sa distance de D. Or $\delta m = \rho(2R\cos\theta)dh$, $\rho$ étant la masse surfacique du disque et dh = $d(R\sin\theta)$ la largeur du rectangle. D'où




$$I_D = \rho 2R^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta \sin^2\theta d\theta = \frac{\rho R^4}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 2\theta d\theta$$

Mais, en intégrant par parties, on a :

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 2\theta d\theta = -\sin 2\theta \frac{\cos 2\theta}{2}\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 2\theta d\theta$$

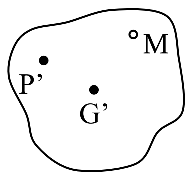
$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2 2\theta) d\theta = \pi - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 2\theta d\theta$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 2\theta d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Donc $I_D = mR^2/4$ car $m = \rho\pi R^2$.

b)

Soient P' et G' les points d'intersection des droites Px et Gx avec un plan perpendiculaire à ces droites et passant par un point matériel M de S de masse δm. Le moment d'inertie de ce point par rapport à Px est

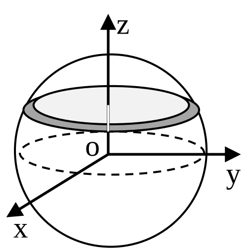



$$\begin{aligned}\delta I_{Px} &= (\delta m)\|\overrightarrow{MP'}\|^2 = (\delta m)\|\overrightarrow{MG'}+\overrightarrow{G'P'}\|^2\\ &= (\delta m)\left(\overrightarrow{MG'}+\overrightarrow{G'P'}\right)^T\left(\overrightarrow{MG'}+\overrightarrow{G'P'}\right)\\ &= (\delta m)\left(\|\overrightarrow{MG'}\|^2+\|\overrightarrow{G'P'}\|^2+2\overrightarrow{MG'}.\overrightarrow{G'P'}\right)\\ &= \delta I_{GX}+(\delta m)d^2+2\overrightarrow{G'P'}(\delta m)\overrightarrow{MG'}\\ &= \delta I_{GX}+(\delta m)d^2+2\overrightarrow{G'P'}(\delta m)(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GG'})\\ &= \delta I_{GX}+(\delta m)d^2+2\overrightarrow{G'P'}(\delta m)\overrightarrow{MG}\end{aligned}$$

car $\overrightarrow{G'P'} \perp \overrightarrow{GG'}$.

En intégrant sur le corps S et sachant que $\int_S (\delta m)\overrightarrow{MG} = 0$, on obtient : $I_{Px} = I_{GX} + md^2$.

c) La sphère étant symétrique par rapport au plan (x, y), les produits d'inertie $I_{zx} = I_{zy} = 0$ et étant symétrique par rapport au plan (y, z), $I_{xy} = 0$. Le tenseur d'inertie J de la sphère est donc diagonal. Ses éléments diagonaux sont les moments d'inertie $I_x$, $I_y$ et $I_z$ qui sont égaux à cause de la symétrie de la sphère par rapport à l'origine. Pour calculer par exemple $I_z$, considérons un disque orthogonal à oz de hauteur z et d'épaisseur dz. D'après a1), son moment d'inertie par rapport à oz est $dI_z = (\delta m)r^2/2$ où r est le rayon du disque et $\delta m = \rho\pi r^2 dz$ est sa masse. Or, $r = R\cos\theta$ et $z = R\sin\theta$, θ étant la latitude de la frontière du disque. D'où




$$dI_z = \frac{\rho\pi}{2} R^5 \cos^5\theta d\theta$$

et

$$I_z = \frac{\rho\pi}{2} R^5 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^5\theta d\theta = \frac{\rho\pi}{2} R^5 A_5.$$

En intégrant par parties

$$A_5 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^5\theta d\theta$$

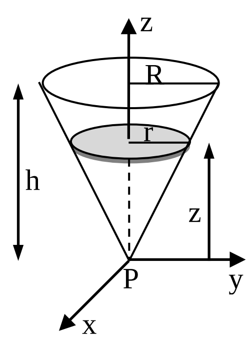
on trouve

$$A_5 = 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\theta d\theta - 4A_5 = 4A_3 - 4A_5$$

$$\Rightarrow A_5 = \frac{4}{5}A_3 = \frac{4}{5}\frac{2}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta d\theta = \frac{16}{15}.$$

Donc $I_z = I_x = I_y = \frac{2}{5}mR^2$ où $m = \rho\frac{4\pi}{3}R^3$ est la masse de la sphère.

d) Le cône étant symétrique par rapport aux deux plans (x, z) et (y, z), les produits d'inertie sont nuls et le tenseur d'inertie est diagonale. D'autre part, comme il est de révolution autour de l'axe Pz, on a : $I_x = I_y$.




Le moment d'inertie par rapport à un diamètre d'un disque du cône d'altitude z et d'épaisseur dz est, d'après b1), $dI_{Gx} = (\delta m)r^2/4$ où $r = Rz/h$ est le rayon du disque et $\delta m = \rho\pi r^2 dz$ sa masse. D'où, d'après b),

$$dI_x = dI_{Gx} + \delta m z^2 = \rho\pi\frac{R^2}{h^2}\left(\frac{R^2}{4h^2}+1\right)z^4 dz$$

$$\Rightarrow I_x = I_y = \rho\pi\frac{R^2}{h^2}\left(\frac{R^2}{4h^2}+1\right)\frac{h^5}{5} = \frac{3}{5}m\left(\frac{R^2}{4}+h^2\right)$$

car $m = \frac{\rho\pi R^2 h}{3}$.

Le moment d'inertie du disque par rapport à Pz est, d'après a1),

$$dI_z = (\delta m)r^2/2 = \frac{\rho\pi R^4}{2h^4}z^4dz = \frac{3}{2}\frac{mR^2}{h^5}z^4dz$$

$$\Rightarrow I_z = \frac{3}{10}mR^2.$$

**EXERCICE 1-6**

Un disque de masse m et de rayon r roule sans glisser sur une pente. Montrer que si sa vitesse initiale est nulle et que son altitude diminue de h, la vitesse de son centre de gravité devient $v = 2\sqrt{gh/3}$

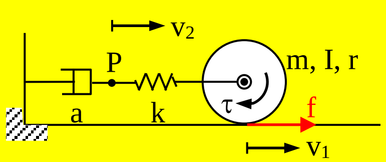
Quand l'altitude du disque diminue de h, la diminution mgh de son énergie potentielle se transforme en énergie cinétique de rotation et de translation. D'où

$$mgh = \frac{1}{2}I_G\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

où $I_G = mr^2/2$ est le moment d'inertie du disque par rapport à son centre de gravité et $\omega = v/r$ est sa vitesse de rotation. Donc

$$gh = \frac{1}{4}v^2 + \frac{1}{2}v^2 \Rightarrow v = 2\sqrt{\frac{gh}{3}}.$$

**EXERCICE 1-7**




Un rouleau de masse m, de moment d'inertie I et de rayon r tourne sans glisser sous l'action d'un moment $\tau$ et de la force de rappel d'un ressort de raideur k en série avec un amortisseur de facteur a. Construire le circuit analogue à ce système simulant les vitesses $v_1$ du rouleau et $v_2$ du point P.

Soit f la force de contact exercée par le sol sur le rouleau.

Rotation du rouleau.

$$\tau - fr = I\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \frac{\tau}{r} - f = \frac{I}{r}\frac{d(v_1/r)}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{\tau}{r} - f = M_{eq}\frac{d(v_1)}{dt}, \quad M_{eq} = \frac{I}{r^2}. \quad (1)$$

Translation du rouleau

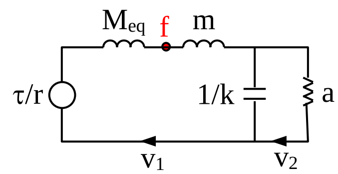
$$f - k(x_1 - x_2) = m\frac{dv_1}{dt}, \quad (2)$$

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt}, v_2 = \frac{dx_2}{dt}.$$

Mouvement de P

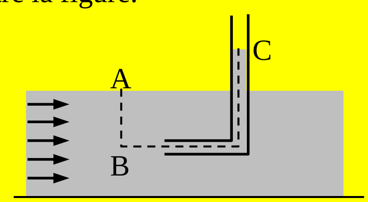
$$k(x_1 - x_2) = av_2. \quad (3)$$

Ces trois équations conduisent au circuit suivant.




**EXERCICE 1-8**

Un tube coudé de 90°, dit *tube de Pitot*, est plongé dans un courant d'eau de vitesse horizontale v comme le montre la figure.




En admettant que l'eau est un liquide parfait et en appliquant l'équation de Bernoulli sur le chemin ABC, montrer qu'au repos le niveau d'eau dans le tube au-dessus de la surface libre de l'écoulement est égal à $v^2/2g$. À quoi peut servir ce tube ?

Prenons comme niveau de référence la surface libre de l'écoulement ($z_A = 0$). Comme la vitesse dans le sens AB est nulle, l'équation de Bernoulli entre A et B se réduit à

$$P_A = P_B + \rho g z_B, \quad (z_B < 0). \quad (1)$$

D'autre part, la vitesse au repos en C étant nulle, l'équation de Bernoulli entre B et C s'écrit

$$P_B + \rho g z_B + \rho v^2/2 = P_C + \rho g z_C. \quad (2)$$

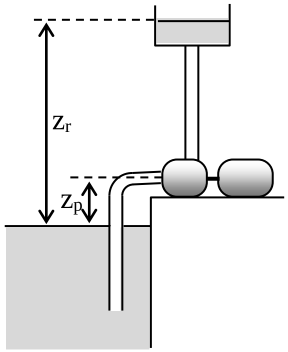
Tenant compte de (1) et sachant que $P_C = P_A$ = pression atmosphérique, on déduit de (2) que

$$\rho g z_C = \rho v^2/2 \text{ ou } z_C = v^2/2g.$$

Le niveau du liquide dans le tube par rapport à la surface libre du liquide dans le canal est donc une mesure de la vitesse de l'écoulement de ce liquide indépendamment de sa nature.

EXERCICE 1-9

La longueur du tuyau d'aspiration d'une pompe entrainée par un moteur électrique est $L_1$ et celle du tuyau de refoulement est $L_2$. Les deux tuyaux ont la même section S et dissipent par mètre une puissance $\lambda\dot{m}^2$ pour un débit massique $\dot{m}$. Par rapport à un niveau donné de l'eau dans le bassin, on désigne par $z_p$ et $z_r$ les altitudes de l'entrée de la pompe et de la surface libre de l'eau dans le réservoir.




a) Si $\eta$ est le rendement du groupe moteur-pompe, que doit être la puissance électrique du moteur pour que le débit soit $\dot{m}$.

b) Déterminer la valeur maximum de $z_p$ si la pression à l'entrée de la pompe doit être supérieure à $P_{min}$ (pour éviter la cavitation causée par l'évaporation de l'eau).

a) En admettant que la vitesse aux surfaces libres du bassin et du réservoir est nulle (énergie cinétique nulle), que la température et le volume spécifique de l'eau sont constants (énergie interne constante) et sachant que la pression sur ces deux surfaces est égale à la pression atmosphérique (même enthalpie), l'énergie nécessaire pour soulever jusqu'à $z_r$ une masse $\dot{m}$ par seconde est seulement égale à la variation $\dot{m}gz_r$ de l'énergie potentielle. À cette énergie, il faut ajouter les pertes $\lambda(L_1+L_2)\dot{m}^2$ par frottement durant l'écoulement dans les canalisations.

Si $P_e$ est la puissance électrique consommée par le moteur et $\eta$ est le rendement du groupe moteur-pompe, on a :

$$\eta P_e = \dot{m}gz_r + \lambda(L_1+L_2)\dot{m}^2.$$

b)Comme l'énergie interne est constante et que la vitesse à la surface libre du bassin est nulle, on a :

$$P_{atm} = P + \rho g z_p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \lambda L_1 m^2$$

où P et v sont la pression et la vitesse à l'entrée de la pompe et $\rho$ est la masse spécifique du liquide. Le débit volumique étant $q_v = Sv = \dot{m}/\rho$, on déduit de l'équation précédente que

$$P = P_{atm} - \rho g z_p - \frac{1}{2S^2}\rho q_v^2 - \lambda L_1\rho^2 q_v^2 > P_{min}$$

$$\Rightarrow z_p < \frac{P_{atm}-P_{min}}{\rho g} - \frac{q_v^2}{g}\left(\frac{1}{2S^2}+\lambda L_1\rho\right).$$

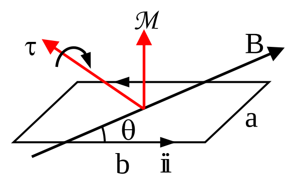
EXERCICE 1-10

Un circuit rectangulaire parcouru par un courant i est placé dans un champ d'induction B uniforme parallèle au plan du circuit et faisant avec l'un des côtés un angle $\theta$. Déterminer de deux manières le vecteur $\tau$ du moment mécanique qui le met en rotation :

a) en appliquant la relation $\tau = \mathcal{M}\wedge B$ du moment magnétique,

b) en appliquant sur les côtés du circuit la loi de Laplace $f = i.d\wedge B$.

a) Par définition, le moment magnétique du circuit est $\mathcal{M} = abi.\vec{n}$ où $\vec{n}$ est un vecteur unitaire normal au plan du circuit et dirigé vers l'avancement d'un tire-bouchon qui tourne dans le même sens que le courant. En présence de l'induction B, $\mathcal{M}$ crée un moment mécanique

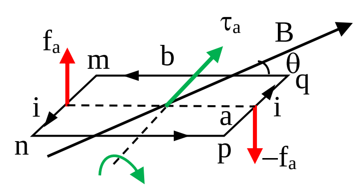



$$\tau = \mathcal{M}\wedge B = abi\vec{n}\wedge B$$

qui est dans le plan du circuit, orthogonal à B et de module abiB. Il tend à tourner le circuit pour le rendre normal à B afin de maximiser le flux.

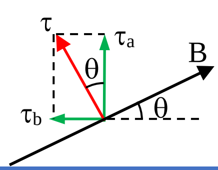
b) La force de Laplace agissant sur le côté mn du circuit est

$$f_a = i\overrightarrow{mn}\wedge B.$$




Ce vecteur, normal au plan du circuit et dirigé vers le haut, a pour module iaB.cos$\theta$. La force agissant sur le côté pq est $-f_a$ car le sens du courant i est opposé à celui de mn. Les deux forces $f_a$ et $-f_a$ développent un couple $\tau_a = f_a \wedge \overrightarrow{np}$ qui est dans le plan du circuit, orthogonal à np et de module iabB.cos$\theta$.

D'une manière similaire, les forces de Laplace $f_b$ et $-f_b$ qui agissent sur les côtés np et qm développent un couple



$\tau_b = f_b \wedge \overrightarrow{pq}$ qui est dans le plan du circuit, orthogonal à pq et de module iabB.sinθ.
La figure ci-dessus montre que la résultante de $\tau_a$ et $\tau_b$ est égale au moment τ obtenu en a).

EXERCICE 1-11
Retrouver par la méthode de Lagrange les équations du système de la figure 1-12 en choisissant pour coordonnées généralisées la rotation θ du cylindre et le déplacement x de la masse m.

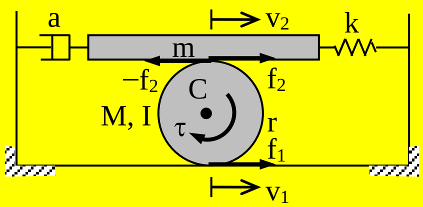



**fig. 1-12** Cylindre entrainant une masse

Rappelons que les équations de Lagrange sont données par

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta W_c}{\delta c_i}\right) - \frac{\delta W_c}{\delta q_i} + \frac{\delta W_p}{\delta q_i} = e_{edi} \quad i = 1, 2, ... \qquad (1)$$

où $W_c$ est l'énergie cinétique du système, $W_p$ est son énergie potentielle, $q_i$, $c_i$ et $e_{edi}$ sont les composantes de la position q, de la célérité c = dq/dt et de l'effort extérieur et dissipatif (non conservatif) $e_{ed}$.
Le second membre $e_{edi}$ de (1) est la somme des efforts qui échangent de l'énergie avec l'extérieur quand seule la coordonnée $q_i$ varie.

La seule énergie potentielle est celle du ressort :

$$W_p = \frac{1}{2}kx^2.$$

L'énergie cinétique du système est la somme de l'énergie cinétique de m, de celle de la translation du rouleau et celle de sa rotation :

$$W_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M(r\dot{\theta})^2.$$

Équation selon x

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta W_c}{\delta \dot{x}}\right) = m\ddot{x}, \quad \frac{\delta W_c}{\delta x} = 0, \quad \frac{\delta W_p}{\delta x} = kx.$$

L'effort dissipatif $e_{dx}$ est la somme de la force de l'amortisseur, $-a\dot{x}$, et de la force de frottement $-f_2$ de m sur le rouleau.
En remplaçant $\dot{x}$ par $v_2$, l'équation de Lagrange relative à la coordonnée x est

$$m\frac{dv_2}{dt} + av_2 + kx = -f_2.$$

En admettant que le frottement entre m et C est visqueux de facteur b, on a $f_2 = b(v_{P2} - v_2)$, $v_{P2}$ étant la vitesse du point de contact $P_2$ entre C et m. Elle est égale à la vitesse $v_1$ de A plus la vitesse relative $r\dot{\theta} = v_1$ de $P_3$ par rapport à A, d'où $f_2 = b(2v_1 - v_2)$.

Équation selon θ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta W_c}{\delta \dot{\theta}}\right) = (I + Mr^2)\ddot{\theta}, \quad \frac{\delta W_c}{\delta \theta} = 0, \quad \frac{\delta W_p}{\delta \theta} = 0.$$

L'effort extérieur $e_e$ est le moment τ appliqué sur l'axe A du rouleau C et l'effort dissipatif $e_d$ est le moment $\tau_f = -f_2.(2r)$ de la force de frottement $f_2$ au point de contact $P_1$ entre C et le sol. À noter que la vitesse instantanée de $P_1$ étant nulle (pas de glissement) la force $f_1$ n'échange pas de l'énergie avec l'extérieur et ne fait pas partie de l'effort dissipatif $e_d$.
En remplaçant $r\dot{\theta}$ par $v_1$, l'équation de Lagrange relative à θ est

$$(I + Mr^2)\frac{dv_1}{rdt} = \tau - f_2(2r).$$

## AUTRES EXERCICES ET COMPLÉMENTS

**1-12** Pour que le produit de l'effort e par la célérité c soit une vraie puissance, on choisit pour les systèmes thermiques e = T (température absolue) et c = dS/dt (taux de variation de l'*entropie* qui se définit par dS = $dQ_c/T$). Avec cette convention, montrer
a) que la résistance à la conduction d'une lame de facteur de conduction λ, de surface A et d'épaisseur a est (a/λA)[T/(1 – ΔT/T)] où ΔT est la différence entre les températures des deux côtés de la lame.
b) Que la capacité d'un milieu de masse spécifique M est M/T et que son énergie potentielle est la quantité de chaleur $Q_c$ emmagasinée dans ce milieu.

a) Par définition de la résistance et tenant compte de la loi de conduction de Fourrier, on a :

$$R = \frac{de}{dc}, \quad e = T, \quad c = \frac{dS}{dt}.$$

$$cdt = dS = \frac{dQ_c}{T} = \frac{\lambda A}{a}\left(\frac{T - T_e}{T}\right)dt$$

$$\frac{1}{R} = \frac{dc}{dT} = \frac{\lambda A}{a}\left(\frac{T - \Delta T}{T^2}\right) \Rightarrow R = \frac{a}{\lambda A}.\frac{T}{1 - \Delta T / T}.$$

b) Par définition de la capacité et de l'énergie potentielle, on a :

$$C = \frac{dq}{de}, \quad dq = cdt = dS.$$

$$\Rightarrow C = \frac{dS}{dT} = \frac{dQ_c}{TdT} = \frac{MdT}{TdT} = \frac{M}{T}.$$

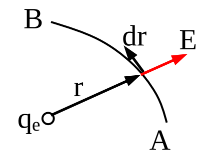
$$dW_p = edq = TdS = dQ_c \Rightarrow W_p = Q_c.$$

**1-13** Le flux d'un champ électrique à travers une surface fermée S quelconque est égal à $Q_e/\varepsilon_0$ où $Q_e$ est la somme des charges électriques intérieures à S et $\varepsilon_0$ est la permittivité électrique dans le vide (Gauss).
a) Montrer que le champ électrique créé par une charge ponctuelle $q_e$ en un point P est $E = q_e r/4\pi\varepsilon_0|r|^3$ où r est le vecteur de $q_e$ à P.
b) Sachant que $r^T dr = d(r^T r)/2 = |r|d|r|$ montrer que la circulation de E d'un point A à un point B ne dépend pas du chemin suivi et vaut $u_{AB} = V(r_A) - V(r_B)$ où la fonction $V(r) = q_e/4\pi\varepsilon_0|r|$ est appelé potentiel en r dû à $q_e$.
c) On admet que le champ électrique créé par un condensateur plan est perpendiculaire aux deux plaques de ce condensateur. Sachant que la capacité est définie par $C = Q_e/u$, $Q_e$ et $-Q_e$ étant les charges des plaques et u est la différence de potentiel entre elles, montrer que $C = \varepsilon_0 S/d$ où S est la surface de chaque plaque et d la distance qui les sépare.
d) On admet que le champ électrique d'un condensateur cylindrique constitué de deux cylindres de même axe est perpendiculaire à cet axe. En désignant par L, $r_1$ et $r_2$ la longueur et les rayons des cylindres, montrer que la capacité de ce condensateur est $C = 2\pi\varepsilon_0 L/Ln(r_2/r_1)$.

a) Soit une sphère S de centre $q_e$ et passant par P. Le rayon de cette sphère est |r| et sa surface est $4\pi|r|^2$. Par symétrie, le champ électrique E créé par $q_e$ est radial et son module est le même en tout point de la surface de S. Le flux de E à travers cette surface est donc $4\pi|r|^2|E| = q_e/\varepsilon_0$ et comme le vecteur E est de même sens que r, on écrit

$$E = \frac{q_e}{4\pi\varepsilon_0 |r|^2}\frac{r}{|r|}.$$

b) Pour tout chemin joignant deux points A et B,



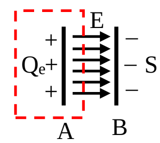

$$\int_{r_A}^{r_B} E^T dr = \frac{q_e}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_A}^{r_B}\frac{r^T}{|r|^3}dr$$

$$= \frac{q_e}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_A}^{r_B}\frac{1}{|r|^2}\,d|r|$$

$$= \frac{q_e}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{|r|}\right]_{r_A}^{r_b}$$

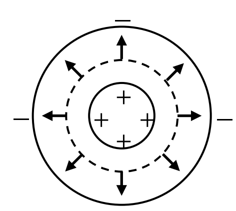
$$= \frac{q_e}{4\pi\varepsilon_0 |r_A|} - \frac{q_e}{4\pi\varepsilon_0 |r_B|} = V(r_A) - V(r_B).$$

c) On admet que le champ électrique E est nul à l'extérieur de la région entre les deux plaques et il est uniforme et perpendiculaire aux plaques à l'intérieur de cette région.




Le flux à travers une surface cubique fictive contenant seulement la plaque A de charge $Q_e > 0$ et ayant une face parallèle aux plaques est $E.S = Q_e/\varepsilon_0 \Rightarrow E = Q_e/(\varepsilon_0 S)$. La circulation de E d'un point de la plaque A à un point de la plaque B est égale à E.d, $\forall$A et B. Cette circulation est, par définition, la différence de potentiel u du condensateur c.à.d. u = E.d. La capacité est donc $C = Q_e/u = \varepsilon_0 S/d$.

d) Par symétrie, le champ électrique est radial ayant le même module E(r) sur un cylindre fictif de rayon r, $r_1 < r < r_2$. Le flux à travers ce cylindre est $2\pi rL.E(r) = Q_e/\varepsilon_0$ d'où $E(r) = [Q_e/2\pi\ \varepsilon_0 L](1/r)$.



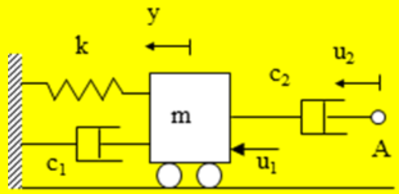
D'où la différence de potentiel entre les deux cylindres du condensateur est

$$u = \frac{Q_e}{2\pi\varepsilon_0 L}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{Q_e}{2\pi\varepsilon_0 L}Ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right).$$

La capacité est donc

$$C=\frac{Q_e}{u}=\frac{2\pi\varepsilon_0 L}{Ln(r_2/r_1)}.$$

**1-14**




Construire le circuit électrique analogue au système mécanique ci-dessus où les entrées sont la force $u_1$ appliquée au chariot et la vitesse $u_2$ du point A. La sortie est le déplacement y du chariot (on néglige les masses du ressort et des amortisseurs ainsi que la perte d'énergie par échauffement du ressort).

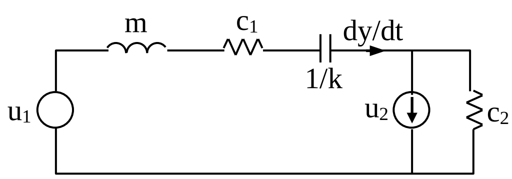
L'équation du mouvement du chariot s'obtient directement en appliquant la loi de Newton :

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=u_1-c_1\frac{dy}{dt}-ky-c_2\left(\frac{dy}{dt}-u_2\right)$$

ou

$$u_1=m\frac{d^2y}{dt^2}+c_1\frac{dy}{dt}+ky+c_2\left(\frac{dy}{dt}-u_2\right).$$

Sachant que la masse m, le facteur d'amortissement $c_i$ et l'inverse de la raideur 1/k sont respectivement analogues à une inductance, une résistance et l'inverse d'une capacité et en remplaçant la force $u_1$ par une source de tension (effort) et la vitesse par une source de courant (célérité), l'analogue du système mécanique ci-dessus est le circuit électrique suivant.




**1-15** Un réservoir de hauteur H et de grande section S, fermé du côté supérieur et sa base comporte un orifice de section s, contient un liquide de masse spécifique ρ et de l'air sous pression. Initialement, le niveau du liquide au-dessus de l'orifice est $h_0$ et la pression absolue de l'air au-dessus du liquide est $P_0$. En admettant que la température de l'air à l'intérieur du réservoir reste égale à celle de la température ambiante supposée constante et en désignant la pression atmosphérique par $P_a$ (< $P_0$), écrire l'équation différentielle décrivant la variation du niveau h du liquide en fonction du temps.

Le niveau h est lié au volume du liquide $V_L$ = Sh, au volume d'air $V_A$ = S(H – h), au débit $q_v$ à travers l'orifice et à la vitesse v du liquide à la sortie par les égalités suivantes.

$$Sdh=dV_L=-dV_A=-q_v dt=-svdt. \qquad (1)$$

La vitesse v est liée au niveau h et à la pression P de l'air à l'intérieur du réservoir par l'équation de Bernoulli. Le débit sv à travers l'orifice est égale au débit $Sv_0$ à la surface S d'oû $v_0$ = (s/S)v. La surface S étant grande par rapport à la section s de l'orifice, on peut négliger la vitesse $v_0$ du liquide sur S et écrire :

$$P+\rho gh=P_a+\frac{1}{2}\rho v^2\Rightarrow dP+\rho gdh=\rho vdv. \qquad (2)$$

Exprimons vdv et dP en fonction de h. D'abord, de (1) on tire

$$v=-\frac{S}{s}\frac{dh}{dt}\Rightarrow vdv=\left(\frac{S}{s}\right)^2\frac{dh}{dt}.d\left(\frac{dh}{dt}\right).$$

D'autre part, en admettant que l'air dans le réservoir est gaz parfait et sachant que sa transformation est isotherme et que $dV_A$ = –Sdh, on a :

$$PV_A=c=c^{te}\Rightarrow V_A dP+PdV_A=0$$

$$\Rightarrow dP=-\frac{cdV_A}{V_A^2}=\frac{cdh}{S(H-h)^2}.$$

En remplaçant vdv et dP par leurs expressions dans (2), en divisant ensuite par dt et en simplifiant dh/dt, on obtient le modèle suivant.

$$\left[\frac{c}{S(H-h)^2}+\rho g\right]=\rho\left(\frac{S}{s}\right)^2\frac{d^2h}{dt^2}.$$

**1-16** On chauffe par une source de chaleur de $P_{ch}$ 620 watts 1 kg d'eau contenu dans un cylindre muni d'un piston exerçant une pression constante de 10 bars (1 bar = $10^5$ N/m²). La température initiale de l'eau est de 20ºC et sa température d'ébullition à 10 bars est 180ºC. On suppose que la chaleur et le volume spécifiques de l'eau avant l'ébullition sont constants valant $c_e$ = 1860 J/kg.ºC et $v_e$ = 0.001 m³/kg. D'autre part, pour la pression 10 bars, on tire des tableaux thermodynamiques les données suivantes :

- l'enthalpie de l'eau au début de l'évaporation est $h_e$ = 762 kJ/kg
- l'enthalpie de la vapeur saturée (à la fin de l'évaporation) est $h_v$ = 2778 kJ/kg
- le volume spécifique de la vapeur saturée est $v_v$ = 0.19 $m^3$/kg.

En admettant que la vapeur sèche (après l'évaporation complète de l'eau) est un gaz parfait de chaleur spécifique à pression constante $c_p$ = 34 J/mole.ºC et de masse molaire $m_v$ = 20 g/mole, représenter en fonction du temps la variation du volume dans le cylindre.

L'eau dans le cylindre passe par 3 phases : 1) échauffement de l'eau jusqu'à l'ébullition, 2) évaporation de l'eau et 3) surchauffe de la vapeur.

a) Échauffement de l'eau de 20º à 180º

Avant son ébullition, le volume de l'eau reste égal à (1kg).$v_e$ = 0.001 $m^3$ soit 1 litre.
La quantité de chaleur nécessaire pour augmenter la température de l'eau de $\Delta T$ = 180 – 20 = 160º est W = (1kg)$c_e\Delta T$ = 1860(160) = 297600 J. Avec une puissance d'échauffement $P_{ch}$ = 620 watts la durée de l'échauffement est $t_e = W/P_u$ = 480 sec soit 8 minutes.

b) En négligeant le déplacement et la vitesse du centre de gravité du fluide à l'intérieur du cylindre, l'équation généralisée de Bernoulli devient $M(h_v - h_e) = Q_{ev}$ où M est la masse du fluide et $Q_{ev}$ est la chaleur reçue durant l'évaporation. D'où $Q_{ev}$ = 2778 – 762 = 2016 kJ et la durée de l'évaporation est $t_{ev}$ = 2016($10^3$)/620 = 3252 sec soit 54 minutes. Le volume augmente linéairement de $mv_e$ à $mv_v$ c.à.d. de 1 litre à 190 litres.

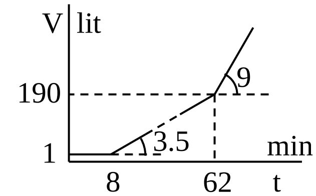
c) En admettant que la vapeur sèche est un gaz parfait, son volume croit de $\Delta V = (n\mathcal{R}/P)\Delta T$ quand sa température croit de $\Delta T = P_{ch}t/nc_p$ où n = M/$m_v$ = 50 est le nombre des moles, $\mathcal{R}$ = 8.31 J/mole.ºC est la constante des gaz , P = $10^6$ N/$m^2$ est la pression dans le cylindre et t est la durée du surchauffe. D'où

$$\Delta V = \frac{n\mathcal{R}}{P}\left(\frac{P_{ch}t}{nc_p}\right) = 0.00015t\ m^3$$

ou $\Delta V = 0.15t$ litres.

Le volume de la vapeur sèche augmente de 9 litres par minute.

L'allure de la variation de V est représentée par la figure suivante.

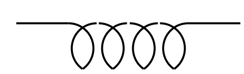



**1-17** a) En négligeant le champ magnétique à l'extérieur d'un solénoïde de longueur x et en supposant qu'à son intérieur le champ est uniforme, montrer, en appliquant la loi d'Ampère, que l'inductance L d'un solénoïde de ν spires par unité de longueur et de volume V est approximativement égale à $\mu_0\nu^2V$.
b) Les spires du solénoïde étant régulièrement espacées, montrer que, quand il est parcouru par un courant i, il sera soumis à une force électromagnétique de contraction f = $Li^2/2x$.

a) En négligeant le champ magnétique H à l'extérieur du solénoïde et en admettant qu'à son intérieur H est uniforme, on a, d'après la loi d'Ampère, ni = Hx = $(B/\mu_0)x \Rightarrow \varphi_t = nBS = n^2i\,\mu_0S/x$ . Or, en électricité, $\varphi_t$ est une quantité d'effort, i est une célérité et L une inertie c.à.d. $\varphi_t = Li$

$$\Rightarrow L = \mu_0n^2S/x = \mu_0(n/x)^2Sx = \mu_0\nu^2V.$$

b) Ce qui précède montre que le flux $\varphi_t$ augmente avec ν c.à.d. quand les spires se rapprochent les unes des autres sous l'effet d'une force électromagnétique f. Le travail f.dx de cette force quand x diminue de dx est égal à la variation de l'énergie magnétique $Li^2/2$ emmagasinée dans le solénoïde. D'où

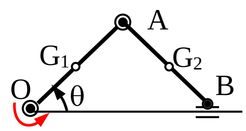


$$f dx = \frac{dL}{2dx}i^2 dx$$

$$\Rightarrow f = -\frac{\mu_0 n^2 S}{2x^2}i^2 = -\frac{\mu_0\nu^2}{2}\frac{V}{x}i^2 = -\frac{Li^2}{2x}$$

Le signe « – » signifie que f agit dans le sens qui diminue x.

**1-18** Dans un plan vertical xOy, deux tiges OA et AB de même masse m et de même longueur d. O est une articulation rotative fixe, OA et AB sont connectées par une articulation rotative mobile A et B est une articulation rotative assujettie à glisser sur l'axe Ox. En négligeant les frottements, appliquer la méthode de Lagrange pour écrire l'équation de mouvement de ce système sous l'action d'un moment τ appliqué en O.




Énergie cinétique

Le triangle OAB étant isocèle, les rotations des deux tiges sont égales et opposées. La position de ces tiges se détermine par une seule coordonnée généralisée θ.

a) Rotation de OA autour de O

$$W_{c1}=\frac{1}{2}I_O\dot{\theta}^2,\quad I_O=\int_0^d x^2\mu dx=\frac{md^2}{3}$$

$\mu=$ masse par unité de longueur.

$$\Rightarrow W_{c1}=\frac{md^2}{6}\dot{\theta}^2.$$

b) Rotation de AB autour de $G_2$

$$W_{c2}=\frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2,\quad I_G=2\int_0^{d/2} x^2\mu dx=\frac{md^2}{12}$$

$$\Rightarrow\quad W_{c2}=\frac{md^2}{24}\dot{\theta}^2.$$

c) Translation horizontale de $G_2$

$$W_{c3}=\frac{1}{2}m\dot{x}^2,\quad x=d\cos\theta+\frac{d}{2}\cos\theta=\frac{3d}{2}\cos\theta$$

$$\Rightarrow\quad W_{c3}=\frac{9d^2}{8}m(-\dot{\theta}\sin\theta)^2.$$

d) Translation verticale de $G_2$

$$W_{c4}=\frac{1}{2}m\dot{y}^2,\quad y=\frac{d}{2}\sin\theta$$

$$\Rightarrow\quad W_{c4}=\frac{d^2}{8}m(\dot{\theta}\cos\theta)^2.$$

Donc

$$W_c=\left(\frac{md^2}{6}+\frac{md^2}{24}+\frac{9md^2}{8}\sin^2\theta+\frac{md^2}{8}\cos^2\theta\right)\dot{\theta}^2$$

$$=md^2\left(\frac{5}{24}+\sin^2\theta+\frac{1}{8}\right)\dot{\theta}^2=\frac{md^2}{3}(3\sin^2\theta+1)\dot{\theta}^2.$$

Énergie potentielle

$$W_p=2mgy=mgd\sin\theta.$$

Calcul des termes de l'équation de Lagrange

$$\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\delta W_c}{\delta\dot{\theta}}\right)=\frac{2md^2}{3}\frac{\delta}{\delta t}[(3\sin^2\theta+1)\dot{\theta}]$$

$$=\frac{2md^2}{3}[6\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta+(3\sin^2\theta+1)\ddot{\theta}].$$

$$\frac{\delta W_c}{\delta\theta}=2md^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta.$$

$$\frac{\delta W_p}{\delta\theta}=mgd\cos\theta.$$

Équation

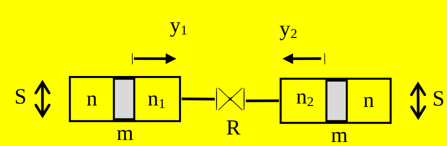
En remplaçant les expressions précédentes dans l'équation de Lagrange

$$\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\delta W_c}{\delta\dot{\theta}}\right)-\frac{\delta W_c}{\delta\theta}+\frac{\delta W_p}{\delta\theta}=\tau$$

et en effectuant quelques manipulations algébriques simples, on obtient :

$$md^2\left[\left(\frac{5}{3}-\cos 2\theta\right)\ddot{\theta}+\dot{\theta}^2\sin 2\theta\right]+mgd\cos\theta=\tau.$$

**1-19** Deux cylindres identiques de section S sont connectés à travers un orifice de résistance R = ΔP/q où q est le débit en môles/sec et ΔP est la différence de pression aux bornes de l'orifice. Chaque cylindre contient un volume total d'air 2.V et comporte un piston de masse m qui le subdivise en deux compartiments dont l'un contient n môles d'air et l'autre $n_i$ môles, i = 1,2, avec $n_1 + n_2 = 2.n$.



En néglige le frottement entre les pistons et les cylindres et en supposant que l'air est un gaz parfait et que la température est partout constante et égale à la température du milieu ambiant, écrire les équations liant $y_1$, $y_2$ et $\nu = n - n_1$ à leurs dérivées.

On désigne par 1 et 2 les compartiments liés entre eux à travers l'orifice R et par 3 et 4 les deux autres compartiments. D'autre part, on pose $V_0 = SL$ le volume d'un compartiment quand les pistons sont au milieu des cylindres et on prend cette position des pistons comme origine des déplacements $y_1$ et $y_2$.

Équation de $y_1$

$$m\frac{d^2y_1}{dt^2} = (P_3 - P_1)S = \mathcal{R}T\left[\frac{n}{(L+y_1)} - \frac{(n-\nu)}{(L-y_1)}\right]$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{d^2y_1}{dt^2} = \frac{\mathcal{R}T}{m}\frac{\nu L - (2n-\nu)y_1}{L^2 - y_1^2}$$

Équation de $y_2$

À cause de la symétrie, il suffit de remplacer dans l'équation précédente $y_1$ par $y_2$ et $\nu$ par $-\nu$ :

$$\frac{d^2y_2}{dt^2} = \frac{\mathcal{R}T}{m}\frac{-\nu L - (2n+\nu)y_2}{L^2 - y_2^2}$$

Équation de $\nu$

Le débit à travers l'orifice R est $q = d\nu/dt$. D'où $\frac{\delta\nu}{\delta t} = \frac{P_1 - P_2}{R}$

$$= \frac{\mathcal{R}T}{RS}\left[\frac{(n-\nu)}{(L-y_1)} - \frac{(n+\nu)}{(L-y_2)}\right] \overset{N}{=} \frac{\mathcal{R}T}{RS}\left[\frac{(n-\nu)}{z_1} - \frac{(n+\nu)}{z_2}\right]$$

$$\Rightarrow RSz_1z_2\frac{\delta\nu}{\delta t} + (z_1 + z_2)\nu = n\mathcal{R}T(z_2 - z_1)$$