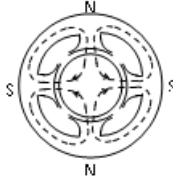


MD-3 MODÉLISATION DES MOTEURS

EXERCICE 4-1

La figure ci-contre représente un moteur cc à 2 paires de pôles.

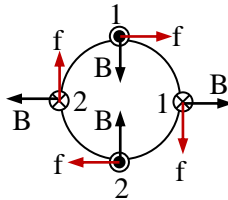
a) Que vaut l'angle sous-jacent à une spire de l'enroulement d'induit ?



b) Montrer que l'expression du couple moteur Γ_m ou de la fcm e_b d'un moteur à une seule paire de pôles doit être multipliée par 2 quand le moteur a 2 paires de pôles. Généraliser à un moteur comportant p paires de pôles.

a)

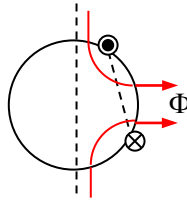
Comme le montre la figure ci-contre, les moments des forces de Laplace s'ajoutent si l'un des conducteurs parallèles à l'axe du rotor d'une spire est sous un pôle nord et l'autre sous un pôle sud. L'angle sous-jacent à une spire est donc $\pi/2$.



b)

La somme des flux à travers les spires situées d'un côté de l'axe des pôles nords est égale au flux Φ de l'un de ces pôles. Par conséquent, le flux traversant toutes les spires du rotor est 2Φ .

On multiplie donc par 2 l'expression $(n_a / \pi)\Phi i_a$ de Γ_m et de e_b d'un moteur à une seule paire de pôles et par p si le moteur comporte p paires de pôles.



EXERCICE 3-2

Montrer que si la tension d'entrée est constante, la vitesse d'un moteur cc au voisinage de l'instant de démarrage suit

a) la droite $(\Omega_L / \tau)t$ s'il est commandé par le courant d'armature,

b) la parabole $(\Omega_L / 2\tau_m \tau_e)t^2$ s'il est commandé par le courant d'excitation.

a) La fonction de transfert entre la vitesse Ω et la tension d'armature u_a d'un moteur cc commandé par son courant d'induit i_a est

$$\frac{\Omega}{u_a} = \frac{\omega_L}{\tau s + 1} \Leftrightarrow \tau \frac{d\Omega}{dt} + \Omega = \Omega_L, \quad \Omega_L = \omega_L u_a$$

$$\Rightarrow \Omega(t) = C e^{-t/\tau} + \Omega_L.$$

Comme au démarrage la vitesse initiale est nulle, on déduit que $C = -\Omega_L$ et

$$\Omega(t) = \Omega_L (1 - e^{-t/\tau}).$$

Quant $t \rightarrow 0$, on a :

$$e^{-t/\tau} \approx 1 - \frac{t}{\tau} \Rightarrow \Omega(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{\Omega_L}{\tau} t.$$

b) La fonction de transfert entre la vitesse Ω et la tension du stator u_f d'un moteur cc commandé par son courant d'excitation i_f est

$$\frac{\Omega}{u_f} = \frac{\omega_L}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

$$\Leftrightarrow \tau_1 \tau_2 \frac{d^2 \Omega}{dt^2} + (\tau_1 + \tau_2) \frac{d\Omega}{dt} + \Omega = \Omega_L, \quad \Omega_L = \omega_L u_f.$$

Le polynôme caractéristique de cette équation différentielle a pour racines $-1/\tau_1$ et $-1/\tau_2$ d'où sa solution générale est

$$\Omega(t) = C_1 e^{-t/\tau_1} + C_2 e^{-t/\tau_2} + \Omega_L.$$

Comme au démarrage la vitesse Ω du moteur et son accélération sont nulles, on déduit que

$$\Omega(t) = \Omega_L \left[1 - \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} (\tau_1 e^{-t/\tau_1} - \tau_2 e^{-t/\tau_2}) \right]$$

Quand $t \rightarrow 0$, on a :

$$e^{-t/\tau} \approx 1 - \frac{t}{\tau} + \frac{t^2}{2\tau^2}$$

$$\Rightarrow \Omega(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \Omega_L \left[1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \left(1 - \frac{t}{\tau_1} + \frac{t^2}{2\tau_1^2} \right) + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \left(1 - \frac{t}{\tau_2} + \frac{t^2}{2\tau_2^2} \right) \right]$$

$$\text{ou } \Omega(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{\Omega_L}{2\tau_1 \tau_2} t^2.$$

EXERCICE 3-3

Un moteur cc de résistance d'induit $R_a = 1\Omega$, entraîne une charge de moment d'inertie $J = 0.2 \text{ kgm}^2$. Quand on le commande par son courant d'armature sous une tension $u_a = 100 \text{ volts}$, il atteint

une vitesse limite de 1200 tr/min et sera traversé par un courant $i_a = 2A$. En négligeant les pertes par courant de Foucault et l'inductance de l'induit,

a) calculer les valeurs du facteur d'amortissement c et de la constante du couple moteur k_a .

b) Écrire la fonction de transfert liant la tension u_a à la vitesse de rotation Ω .

c) On applique sur l'arbre moteur un couple résistant Γ_r . Déterminer en régime stationnaire la relation entre Ω_L , u_a et Γ_r et représenter pour $u_a = 100, 150$ et 200 volts la *caractéristique mécanique* $\Omega_L(\Gamma_r)$.

a) Détermination des paramètres c et k_a

$$\Gamma_m = k_a i_a = J d\Omega / dt + c\Omega.$$

À la limite (en régime stationnaire) $\Omega = \Omega_L = \omega_L u_a$ et $d\Omega/dt = 0$. D'où

$$c = \frac{k_a i_a}{\Omega_L}. \quad (1)$$

D'autre part, $R_a i_a = u_a - e_b$ avec $e_b = k_b \Omega_L = k_a \Omega_L$ ($k_a = k_b$ car le courant de Foucault est négligeable). D'où

$$k_a = \frac{u_a - R_a i_a}{\Omega_L}. \quad (2)$$

Or $\Omega_L = (1200)2\pi/60 = 40\pi$ rad/sec. Donc

$$k_a = \frac{100 - (1)2}{40\pi} = 0.78 \text{ Nm/A}.$$

et $c = \frac{(0.78)2}{40\pi} = 0.0124 \text{ Nm/(rad/sec)}.$

b) Fonction de transfert

Cette fonction a pour expression

$$\frac{\Omega}{u_a} = \frac{\omega_L}{\tau s + 1},$$

$$\omega_L = \frac{\Omega_L}{u_a} = \frac{40\pi}{100} = \frac{2\pi}{5} \text{ rad/sec}$$

$$\tau = \frac{R_a J}{R_a c + k_a k_b} = \frac{1(0.2)}{1(0.0124) + (0.78)^2} = 0.32 \text{ sec}.$$

Donc

$$\frac{\Omega}{u_a} = \frac{2\pi}{5(0.32s + 1)}.$$

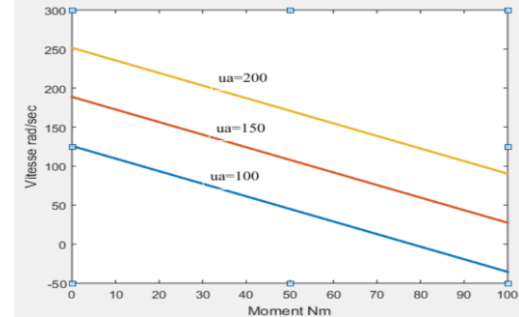
c) Caractéristique mécanique

$$\Gamma_m = c\Omega_L + \Gamma_r.$$

$$\Gamma_m = k_a i_a = k_a \frac{u_a - e_b}{R_a} = k_a \frac{u_a - k_a \Omega_L}{R_a}$$

$$\Rightarrow (R_a c + k_a^2) \Omega_L = k_a u_a - R_a \Gamma_r$$

$$\text{ou } \Omega_L = \frac{0.78 u_a - \Gamma_r}{0.0124 + (0.78)^2} = \frac{0.78 u_a - \Gamma_r}{0.62}.$$



EXERCICE 3-4

a) En représentant les inductions moyennes des bobines du stator d'un moteur à induction par les nombres complexes

$$B_1 = B_m \mathcal{R}_e(e^{j\omega t}),$$

$$B_2 = B_m e^{-j2\pi/3} \mathcal{R}_e(e^{j(\omega t - 2\pi/3)}),$$

$$B_3 = B_m e^{-j4\pi/3} \mathcal{R}_e(e^{j(\omega t - 4\pi/3)}),$$

où B_m est la valeur maximum de B_k , $k = 1, 2, 3$, montrer que la représentation complexe de la résultante B_r de ces inductions est $(3B_m/2)e^{-j\omega t}$ c.à.d. que B_r est un vecteur de module constant tournant à la vitesse ω .

b) En négligeant la réluctance de l'acier devant celle de l'entrefer d'épaisseur e , montrer que $B_m = n I_m \mu_0 / 2e$ où n est le nombre de spire de la bobine, I_m son courant maximum et μ_0 la perméabilité magnétique de l'air.

a)

$$B_r = B_1 + B_2 + B_3$$

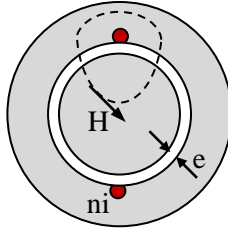
$$= B_m \{ \mathcal{R}_e(e^{j\omega t}) - \frac{1}{2} \mathcal{R}_e[e^{j\omega t}(e^{-2\pi/3} + e^{-4\pi/3})] + j \frac{\sqrt{3}}{2} \mathcal{R}_e[e^{j\omega t}(e^{-2\pi/3} - e^{-4\pi/3})] \}$$

$$= B_m \{ \mathcal{R}_e(e^{j\omega t}) - \frac{1}{2} \mathcal{R}_e[e^{j\omega t}(-1)] + j \frac{\sqrt{3}}{2} \mathcal{R}_e[e^{j\omega t}(j\sqrt{3})] \}$$

$$= B_m [(1 + 1/2) \cos \omega t - j3/2(\sin \omega t)] = \frac{3}{2} B_m e^{-j\omega t}.$$

b)

D'après la loi d'Ampère, la circulation du champ magnétique $H = B/\mu$ le long d'une ligne de champ créé par la bobine est égale au flux ni du courant à travers la surface limitée par cette ligne.

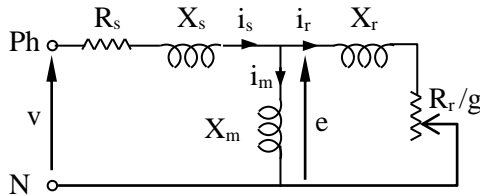


Comme la perméabilité magnétique est beaucoup plus grande dans l'acier que dans l'air, on néglige la circulation du champ dans l'acier et il ne reste que sa circulation dans l'entrefer de longueur $2e$ et de perméabilité magnétique μ_0 . Ainsi, quand le courant i de la bobine atteint sa valeur maximum I_m , l'induction magnétique prend la valeur B_m telle que $(B_m/\mu_0)2e = nI_m$ ou $B_m = nI_m \mu_0/2e$.

EXERCICE 3-5

Un moteur asynchrone à 2 paires de pôles de résistances $R_s = R_r = 1 \Omega$ et de réactances $X_s = X_r = 4 \Omega$ et $X_m = 30 \Omega$, est alimenté par une tension triphasée de valeur efficace $V_a = 220$ volts et de fréquence 50 Hz. Calculer le courant efficace I_s d'une phase et le couple moteur Γ_m quand la vitesse est de 1200 tr/min.

Le circuit équivalent d'une phase d'un moteur à induction est le suivant.



Ce circuit montre que

$$\begin{aligned}
 v &= [R_s + jX_s + Z_e] i_s \\
 Z_e &= R_e + jX_e = \frac{jX_m(jX_r + R_r/g)}{j(X_m + X_r) + R_r/g} \\
 &= \frac{jX_m[(R_r/g)^2 + X_r(X_m + X_r) - j(R_r/g)X_m]}{(X_m + X_r)^2 + (R_r/g)^2}, \\
 R_e &= \frac{(R_r/g)X_m^2}{(X_m + X_r)^2 + (R_r/g)^2}, \\
 X_e &= \frac{X_m[(R_r/g)^2 + X_r(X_m + X_r)]}{(X_m + X_r)^2 + (R_r/g)^2} \\
 \Rightarrow v &= [(R_s + R_e) + j(X_s + X_e)] i_s
 \end{aligned}$$

Courant I_s du stator

$$\Rightarrow I_s = \frac{V}{\sqrt{(R_s + R_e)^2 + (X_s + X_e)^2}}$$

Or

$$g = \frac{(50/2) - (1200/60)}{50/2} = 0.2$$

$$R_e = \frac{(1/0.2)30^2}{(34)^2 + (1/0.2)^2} = 3.81 \Omega,$$

$$X_e = \frac{30[(5)^2 + 4(34)]}{(34)^2 + (5)^2} = 4.09 \Omega$$

Donc

$$I_s = \frac{220}{\sqrt{(1+3.81)^2 + (4+4.09)^2}} = 23.37 \text{ A}$$

Couple moteur

Le circuit ci-dessus montre que la puissance active fournie à l'extérieur par une phase est $(R_r/g)i_r^2$ mais la partie $R_r i_r^2$ de cette puissance se dissipe sous forme de chaleur. D'où la puissance mécanique utile fournie par les 3 phases est

$$P = \Gamma_m \Omega = 3(R_r/g - R_r)i_r^2 = 3 \frac{1-g}{g} R_r i_r^2$$

$$\Rightarrow \Gamma_m = \frac{3R_r}{g\Omega_s} I_r^2 \quad \text{car } \Omega = (1-g)\Omega_s.$$

Or, d'après le circuit,

$$jX_m(i_s - i_r) = (R_r/g + jX_r)i_r$$

$$\text{ou } jX_m i_s = [R_r/g + j(X_r + X_m)]i_r$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow I_r &= \frac{X_m I_s}{\sqrt{(R_r/g)^2 + (X_r + X_m)^2}} \\
 &= \frac{30(23.37)}{\sqrt{(5)^2 + (34)^2}} = 20.4 \text{ A}
 \end{aligned}$$

Donc

$$\Gamma_m = \frac{3}{0.2(2\pi 50/2)} (20.4)^2 = 39.7 \text{ Nm}$$

EXERCICE 3-6

Étudier graphiquement la variation de l'intensité I_a du courant d'une phase d'un moteur synchrone en fonction du courant du rotor I_r sachant que ce moteur est alimenté par une tension triphasée de

valeur efficace V_a et de fréquence ω constantes et qu'il est soumis à un couple résistant Γ_r constant.

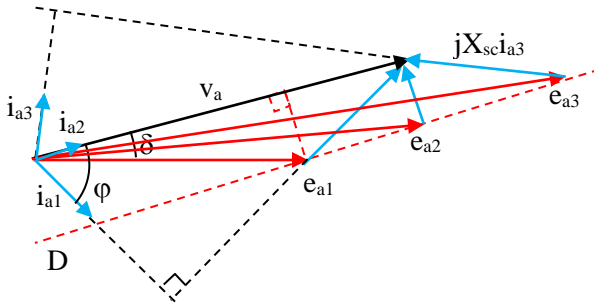
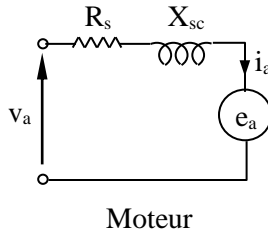
La valeur efficace E_a de la force contre électromotrice (fcem) e_a est liée au courant du rotor I_r par la relation

$$E_a = \frac{M_{ar} I_r \omega}{\sqrt{2}}$$

et le couple résistant Γ_r est lié à E_a par la relation

$$\Gamma_r = 3(V_a E_a / \Omega X_{sc}) \sin \delta$$

δ étant le déphasage de la fcem e_a par rapport à la tension d'alimentation v_a . Si la valeur efficace V_a de v_a , sa fréquence ω et Γ_r sont constants, on déduit que $E_a \sin \delta$ est constant et que E_a est proportionnel à I_r . Du circuit équivalent ci-contre d'un moteur synchrone et en négligeant la résistance R_s du stator, on a le diagramme de Fresnel suivant où la droite D (// v_a) est le lieu de l'extrémité du vecteur e_a puisque $E_a \sin \delta$ est constant. Le vecteur représentant le courant i_a d'une phase est orthogonal au vecteur $jX_{sc}i_a$ et sa valeur efficace I_a est proportionnel à la longueur de ce vecteur.



Pour le courant rotorique I_{r2} relatif à la fcem e_{a2} , le courant efficace I_a d'une phase est minimum et i_a est en phase avec v_a .

Pour le courant I_{r1} relatif à la fcem e_{a1} , i_a est en retard de phase par rapport v_a .

Pour le courant I_{r3} relatif à la fcem e_{a3} , i_a est en avance de phase par rapport v_a .

EXERCICE 3-7

Un moteur synchrone à une seule paire de pôles de réactance synchrone $X_{sc} = 15 \Omega$ et de résistance R_s

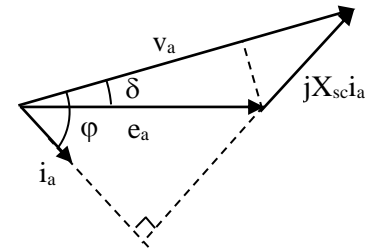
négligeable est alimenté par une tension triphasée de valeur efficace $V_a = 400$ volts et de fréquence $\omega = 50$ Hz. Si le courant du rotor $I_r = 15$ A, la valeur efficace du courant d'une phase est $I_a = 20$ A et le facteur de puissance est $\cos \varphi = 1$.

1) Calculer l'inductance mutuelle maximum M_{ar} entre la phase aa' et le bobinage du rotor. Que vaut le couple résistant Γ_r ?

2) Calculer le courant I_a et le facteur de puissance $\cos \varphi$ quand le couple résistant devient $2\Gamma_r$.

1) Inductance mutuelle M_{ar} et couple résistant Γ_r

$$E_a = \frac{M_{ar} I_r \omega}{\sqrt{2}} \Rightarrow M_{ar} = \frac{\sqrt{2}}{15(100\pi)} E_a$$



Or le diagramme ci-dessus montre que

$$V_a \cos \varphi = E_a \cos \gamma, \quad \gamma = \varphi - \delta$$

$$\text{et } X_s I_a \cos \varphi = E_a \sin \delta.$$

Mais

$$\cos \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0 \text{ et } \gamma = -\delta$$

$$\Rightarrow \tan \delta = \frac{X_s I_a}{V_a} = \frac{15(20)}{400}$$

$$\Rightarrow \delta = 36.87^\circ \text{ et } \cos \delta = \cos \gamma = 0.8$$

Donc

$$E_a = \frac{V_a}{\cos \gamma} = \frac{400}{0.8} = 500 \text{ volts}$$

$$\text{et } M_{ar} \frac{500\sqrt{2}}{15(100\pi)} = \frac{\sqrt{2}}{3\pi} = 0.15 \frac{V.s}{A}$$

D'autre part,

$$P = \Gamma_r \Omega = 3V_a I_a \cos \varphi \Rightarrow \Gamma_r = 3 \frac{400(20)}{100\pi} = 76.4 \text{ Nm.}$$

2)

Calcul du courant I_a

Le courant du rotor I_r étant toujours le même, on a $E_a = 500$ volts et du diagramme ci-dessus on déduit que

$$(X_{sc} I_a)^2 = V_a^2 + E_a^2 - 2V_a E_a \cos \delta$$

$$\Rightarrow I_a = \sqrt{\frac{400^2 + 500^2 - 2(400)(500)\cos \delta}{15^2}}$$

$$\Rightarrow I_a = \frac{100}{15} \sqrt{41 - 40\cos \delta}.$$

Or

$$2\Gamma_r = 3(V_a E_a / \Omega X_{sc}) \sin \delta$$

$$\Rightarrow \sin \delta = \frac{2\Gamma_r \omega X_{sc}}{3V_a E_a} = \frac{2(25.46)(100\pi)(15)}{3(400)(500)}$$

$$\Rightarrow \sin \delta = 0.4 \Rightarrow \delta = 23.57^\circ \Rightarrow \cos \delta = 0.92$$

Donc

$$I_a = \frac{100}{15} \sqrt{41 - 40(0.92)} = 13.66A.$$

Facteur de puissance $\cos \varphi$

Le diagramme montre que

$$V_a \cos \varphi = E_a \cos \gamma = E_a \cos(\varphi - \delta)$$

$$= E_a (\cos \varphi \cos \delta + \sin \varphi \sin \delta)$$

$$(V_a - E_a \cos \delta)^2 \cos^2 \varphi = E_a^2 \sin^2 \delta (1 - \cos^2 \varphi)$$

$$\Rightarrow \cos^2 \varphi = \frac{E_a^2 \sin^2 \delta}{(V_a - E_a \cos \delta)^2 + E_a^2 \sin^2 \delta}$$

$$\cos^2 \varphi = \frac{500^2 (0.4^2)}{(400 - 500(0.92))^2 + 500^2 (0.4^2)} = 0.917.$$

Donc $\cos \varphi = 0.96$.

Solution plus simple.

$$3V_a I_a \cos \varphi = 2\Gamma_r \omega$$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \frac{2(25.46)(100\pi)}{3(400)(13.66)} = 0.97.$$

EXERCICE 3-8

À partir des équations de Park d'un moteur à induction

$$\begin{cases} v_{qs} = R_s i_{qs} + \dot{\varphi}_{qs} & (1) & 0 = R_r i_{qr} - p\Omega \varphi_{dr} + \dot{\varphi}_{qr} & (3) \\ v_{ps} = R_s i_{ds} + \dot{\varphi}_{ds} & (2) & 0 = R_r i_{dr} - p\Omega \varphi_{qr} + \dot{\varphi}_{dr} & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_{qs} = A_s i_{qs} + B i_{qr} & (5) & \varphi_{qr} = B i_{qs} + A_r i_{qr} & (7) \\ \varphi_{ds} = A_s i_{ds} + B i_{dr} & (6) & \varphi_{dr} = B i_{ds} + A_r i_{dr} & (8) \end{cases}$$

où $A_s = L_s - M_s$, $A_r = L_r - M_r$, $B = 3M / 2$.
écrire les équations d'état du moteur, les variables d'état étant

$$x_1 = \theta, x_2 = \Omega, x_3 = \varphi_{qr}, x_4 = \varphi_{dr}, x_5 = i_{qs}, x_6 = i_{ds},$$

Les équations relatives à la partie mécanique du moteur sont

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -(c/J)x_2 + (1/J)u, \quad u_1 = \Gamma_m - \Gamma_r. \quad (9)$$

D'après (3) et (4), on a :

$$\dot{x}_3 = p x_2 x_4 - R_r i_{qr} \quad \text{et} \quad \dot{x}_4 = p x_2 x_5 - R_r i_{dr}.$$

Or, de (7) et (8), on tire :

$$\begin{aligned} i_{qr} &= (1/A_r)x_3 - (B/A_r)x_5, \\ i_{dr} &= (1/A_r)x_4 - (B/A_r)x_6. \end{aligned} \quad (10)$$

D'où

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= p x_2 x_4 - (R_r/A_r)x_3 + (B R_r/A_r)x_5, \\ \dot{x}_4 &= p x_2 x_5 - (R_r/A_r)x_4 + (R_r B/A_r)x_6. \end{aligned} \quad (11)$$

Maintenant, en dérivant (5) et (6), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{x}_5 &= (1/A_s)\dot{\varphi}_{qs} - (B/A_s)\dot{i}_{qr}, \\ \dot{x}_6 &= (1/A_s)\dot{\varphi}_{ds} - (B/A_s)\dot{i}_{dr}. \end{aligned} \quad (12)$$

Or, de (1) et (2) on tire :

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_{qr} &= -R_s x_5 + u_2, \quad u_2 = v_{qs}, \\ \dot{\varphi}_{dr} &= -R_s x_6 + u_3, \quad u_3 = v_{ds} \end{aligned}$$

et en dérivant (10) on trouve tenant compte de (11) :

$$\begin{aligned} \dot{i}_{qr} &= (1/A_r)\dot{x}_3 - (B/A_r)\dot{x}_5, \\ &= (p/A_r)x_2 x_4 - (R_r/A_r^2)x_3 + (B R_r/A_r^2)x_5 - (B/A_r)\dot{x}_5, \\ \dot{i}_{dr} &= (1/A_r)\dot{x}_4 - (B/A_r)\dot{x}_6, \\ &= (p/A_r)x_2 x_5 - (R_r/A_r^2)x_4 + (B R_r/A_r^2)x_6 - (B/A_r)\dot{x}_6. \end{aligned}$$

Enfin, en remplaçant les expressions précédentes dans (12), on obtient :

$$\begin{aligned} (1 + B^2/A_s A_r)\dot{x}_5 &= -(pB/A_s A_r)x_2 x_4 + (R_r B/A_s A_r^2)x_3 \\ &\quad - (B^2 R_r/A_s A_r^2 - R_s/A_r)x_5 + (1/A_s)u_2, \\ (1 + B^2/A_s A_r)\dot{x}_6 &= -(pB/A_s A_r)x_2 x_5 + (R_r B/A_s A_r^2)x_4 \\ &\quad - (B^2 R_r/A_s A_r^2 - R_s/A_r)x_6 + (1/A_s)u_3. \end{aligned}$$

EXERCICE 3-9

Simuler sur Matlab l'état $x(t)$ d'un vérin pneumatique si le déplacement du tiroir du distributeur est $u = 5 \sin(0.1\pi t)$ mm.

Paramètres : la demi longueur du vérin est $L = 0.5m$, sa section est $S = 50 \text{ cm}^2$, la masse de la charge est $m = 5 \text{ kg}$, $T = 300 \text{ }^\circ K$, $\mathcal{R} = 8.3 \text{ J/(moles.}^\circ K)$ et $g(u, \Delta P) = 10^{-2} u \sqrt{\Delta P} \text{ moles/sec}$. $P = 5 \text{ bars}$ et $P_a = 1 \text{ bar}$.

Les pressions dans les compartiments du vérin dépendent des nombres de moles n_1 et n_2 et du déplacement y du piston de la manière suivante :

$$P_1 = \frac{n_1 \mathcal{R} T}{S(L+y)}, \quad P_2 = \frac{n_2 \mathcal{R} T}{S(L-y)}$$

L étant la demi longueur du vérin, \mathcal{R} la constante des gaz et T la température absolue.

Les équations d'état de ce système sont

$$\frac{dy}{dt} = v$$

$$m \frac{dv}{dt} = (P_1 - P_2)S$$

$$\frac{dn_1}{dt} = 10^{-2} \cdot u \sqrt{\Delta_1 P}$$

$$\frac{dn_2}{dt} = -10^{-2} \cdot u \sqrt{\Delta_2 P}$$

$$\text{où } \Delta_1 P = \begin{cases} P - P_1 & \text{si } u \geq 0 \\ P_1 - P_a & \text{si } u < 0 \end{cases}, \quad \Delta_2 P = \begin{cases} P - P_2 & \text{si } u < 0 \\ P_2 - P_a & \text{si } u \geq 0 \end{cases}$$

Pour simuler le mouvement y de la charge, sa vitesse v et les nombres des moles n_1 et n_2 , nous introduisons les équations précédentes dans le programme suivant en admettant qu'initialement le piston est au repos au milieu du vérin ($dy/dt = y = 0$) et que la pression dans les compartiments est $P_a = P_{atm} = 1\text{bar}$. D'où

$$n_1(0) = n_2(0) = \frac{P_a S L}{\mathcal{R} T} = \frac{10^5 (50) (10^{-4}) (0.5)}{8.3 (300)} = 0.1 \text{ mole.}$$

et on effectue la simulation sur 5 périodes (100 sec).

```
function Verinpneum
% Résolutom des équations d'état d'un vérin pneumatique
% et la représentation graphiue du movemnt de la charge.

% État initial et instant final
x0 = input('état initial x0 :');
tf = input('instant final tf :');

% Résolution (la fonction 'f' est définie plus bas)
opt = odeset('RelTol', 1e-5);
[t, x] = ode45(@f, [0 tf], x0, opt);

% Représentation graphique
plot(t,x)

% Définition de la fonction f des équations d'état
function xp = f(t,x)
```

% Paramètres de commande PD

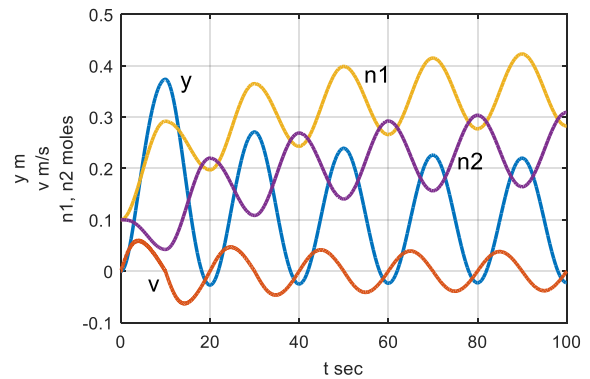
$L = 0.5$; $S = 5 \cdot (10^{-3})$; $m = 5$; $T = 300$; $R = 8.3$;
 $P_a = 10^5$; $P = 5 \cdot 10^5$;

% On pose

$x1 = x(1)$; $x2 = x(2)$; $x3 = x(3)$; $x4 = x(4)$;
 $P1 = x3 \cdot R \cdot T / (S \cdot L + S \cdot x1)$; $P2 = x4 \cdot R \cdot T / (S \cdot L - S \cdot x1)$;
 $u = 5 \cdot \sin((\pi/10) \cdot t) \cdot 10^{-3}$;
 $D1 = ((P - P1) \cdot (u >= 0)) + ((P1 - P_a) \cdot (u < 0))$;
 $D2 = ((P - P2) \cdot (u < 0)) + ((P2 - P_a) \cdot (u >= 0))$;

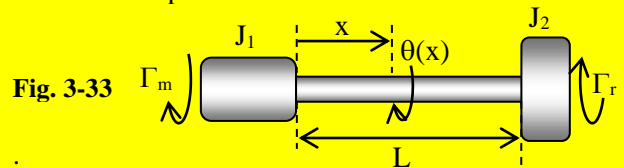
% Équations

$xp = [x2$;
 $(P1 - P2) \cdot S / m$
 $(10^{-2}) \cdot u \cdot (D1^{0.5})$
 $-(10^{-2}) \cdot u \cdot (D2^{0.5})]$;



EXERCICE 3-10

Montrer à partir de (3-77) que si $k \rightarrow \infty$, le système de la figure 3-33 se comporte comme une seule inertie et si, pour $k < \infty$, on néglige le moment d'inertie de l'axe, il se comporte comme deux inerties liées par un ressort rotatif



La figure représente deux cylindres d'inerties J_1 et J_2 fixés aux extrémités d'un axe de longueur L , de moment d'inertie μ par unité de longueur et de module de rigidité G .

Soient θ_1 et θ_2 les rotations des inerties. Le vecteur d'entrée $u = [\Gamma_m ; -\Gamma_r]$ est lié au vecteur de sortie $y = [\theta_1 ; \theta_2]$, par

$$y = G(s)u,$$

où

$$G(s) = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \left(J_2 + \frac{J}{3} \right) s^2 + k & -\left(\frac{J}{6} s^2 - k \right) \\ -\left(\frac{J}{6} s^2 - k \right) & \left(J_1 + \frac{J}{3} \right) s^2 + k \end{pmatrix} \quad (3-77)$$

avec

$$\Delta = \left[\left(J_1 + \frac{J}{3} \right) s^2 + k \right] \left[\left(J_2 + \frac{J}{3} \right) s^2 + k \right] - \left(\frac{J}{6} s^2 - k \right)^2$$

a) Quand $k \rightarrow \infty$, on peut négliger les termes qui ne dépendent pas de k ce qui donne

$$G(s) = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} k & k \\ k & k \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } \Delta = \left(J_1 + J_2 + \frac{2J}{3} \right) ks^2 + \frac{2J}{6} ks^2 = (J_1 + J_2 + J) ks^2.$$

D'où

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta = \frac{\Gamma_m - \Gamma_r}{J_{eq} s^2}, \quad J_{eq} = J_1 + J_2 + J$$

$$\text{ou } J_{eq} \frac{d^2\theta}{dt^2} = \Gamma_m - \Gamma_r.$$

Il s'agit donc d'une seule inertie J_{eq} soumise au moment $\Gamma_m - \Gamma_r$.

b) Supposons que les inerties J_1 et J_2 sont reliées par un ressort rotatif de raideur k et d'inertie négligeable. Les équations de leurs rotations sont

$$\Gamma_m = J_1 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + k(\theta_1 - \theta_2),$$

$$-\Gamma_r = J_2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} - k(\theta_1 - \theta_2).$$

En employant l'opérateur « s » de dérivation, ces équations se mettent sous la forme

$$u = \begin{pmatrix} J_1 s^2 + k & -k \\ -k & J_2 s^2 + k \end{pmatrix} y.$$

D'un autre côté, en négligeant l'inertie de la tige, la matrice $G(s)$ se réduit à

$$G(s) = \frac{y}{u} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} J_2 s^2 + k & k \\ k & J_1 s^2 + k \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } \Delta = (J_1 s^2 + k)(J_2 s^2 + k) - k^2.$$

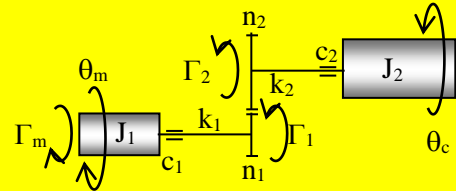
$$\Rightarrow \Delta y = \begin{pmatrix} J_2 s^2 + k & k \\ k & J_1 s^2 + k \end{pmatrix} u$$

$$\Rightarrow u = \begin{pmatrix} J_2 s^2 + k & k \\ k & J_1 s^2 + k \end{pmatrix}^{-1} \Delta y$$

$$\text{ou } u = \begin{pmatrix} J_1 s^2 + k & -k \\ -k & J_2 s^2 + k \end{pmatrix} y.$$

Ainsi, si l'inertie de l'axe est négligeable, il se réduit à un ressort rotatif.

EXERCICE 3-11



Écrire la fonction de transfert entre Γ_m et θ_c du système ci-dessus où les axes connectant les inerties J_1 et J_2 à l'engrenage sont d'inertie négligeable mais de raideurs k_1 et k_2 . Les inerties des pignons sont aussi négligeables.

Désignons par Γ_1 le couple qui résiste à la rotation du moteur et par Γ_2 le couple qui entraîne la charge et soient θ_1 la rotation du pignon moteur et θ_2 la rotation du pignon de la charge. Comme les inerties des pignons sont négligeables, on a $\Gamma_1 = k_1(\theta_1 - \theta_m)$ et $\Gamma_2 = k_2(\theta_2 - \theta_c)$ et comme $n_2/n_1 = n = \Gamma_2/\Gamma_1 = \theta_1/\theta_2$, on déduit que

$$nk_1(n\theta_2 - \theta_m) = k_2(\theta_2 - \theta_c). \quad (1)$$

D'autre part, comme les inerties des axes sont aussi négligeables, les couples Γ_1 et Γ_2 se transmettent à l'autre extrémité de ces axes d'où

$$k_2(\theta_2 - \theta_c) = J_2 \ddot{\theta}_c + c_2 \dot{\theta}_c, \quad (2)$$

$$\Gamma_m = J_1 \ddot{\theta}_m + c_1 \dot{\theta}_m + k_1(\theta_m - n\theta_2). \quad (3)$$

En employant l'opérateur de dérivation « s », les 3 équations (1), (2) et (3) peuvent s'écrire sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} -k_2 & k_2 - n^2 k_1 & n k_1 \\ J_2 s^2 + c_2 s + k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -n k_1 & J_1 s^2 + c_1 s + k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_c \\ \theta_2 \\ \theta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Gamma_m \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice est

$$\Delta = k_2^2 (J_1 s^2 + c_1 s + k_1) - n^2 k_1^2 (J_2 s^2 + c_2 s + k_2) + (n^2 k_1 - k_2) (J_1 s^2 + c_1 s + k_1) (J_2 s^2 + c_2 s + k_2)$$

D'où, en remplaçant la première colonne par le second membre et en calculant le déterminant, on obtient $\theta_c = (n k_1 k_2 / \Delta) \Gamma_m$.

EXERCICE 3-12

Les systèmes des figures 3-34 et 3-39 ont les mêmes moments d'inertie $J_1 = J_2 = 2(10^{-2}) \text{ kgm}^2$, les mêmes facteurs de frottement $c_1 = c_2 = 4(10^{-2}) \text{ Nm/(rd/s)}$ et le même facteur de réduction $n = n_2/n_1 = r_2/r_1$ avec $r_1 = 4 \text{ cm}$ et $r_2 = 20 \text{ cm}$. Le module d'élasticité de la courroie est $\lambda = 80 \text{ N/cm}$. Pour un couple résistant nul ($\Gamma_c = 0$), représenter dans le même plan la vitesse ω_c de la charge de chacun de ces systèmes quand le couple moteur est le créneau $\Gamma_m(t) = 1(t) - 1(t-1) \text{ Nm}$ et les conditions initiales sont nulles.

Fig. 3-34

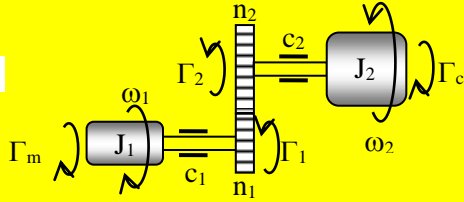
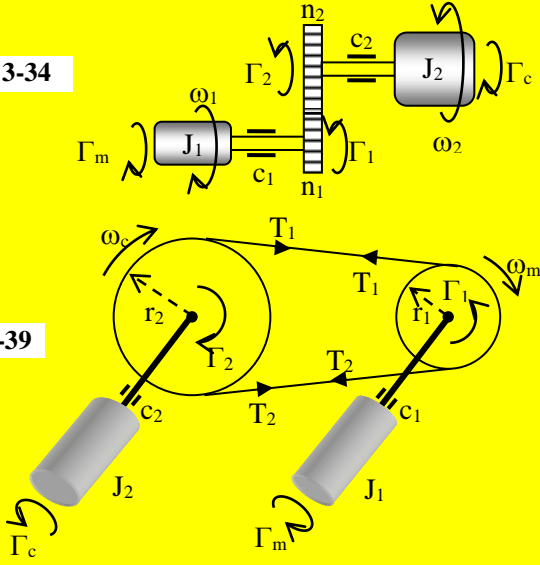


Fig. 3-39



a)

La fonction de transfert entre le couple Γ_m appliqué à J_1 et la vitesse de rotation ω_c de J_2 à travers l'engrenage de rapport de réduction $n = 20/4 = 5$ est

$$\omega_c = \frac{n \Gamma_m}{(n^2 J_1 + J_2)s + (n^2 c_1 + c_2)}, \quad n = n_2 / n_1.$$

$$= \frac{500}{52s + 104} \Gamma_m.$$

$$\text{D'où} \quad \frac{d\omega_c}{dt} + 20\omega_c = \frac{5000}{52} \Gamma_m. \quad (1)$$

Dans l'intervalle $[0 \ 1]$ où $\Gamma_m = 1$, la vitesse initiale étant nulle, la solution de l'équation (1) est

$$\omega_c(t) = 9.61(1 - e^{-2t}).$$

À l'instant $t = 1$ cette vitesse devient $\omega_c = 8.31 \text{ rd/s}$. À partir de cet instant, $\Gamma_m = 0$ et la solution de (1) devient

$$\omega_c(t) = 8.31e^{-2(t-1)}.$$

Pour représenter cette réponse par Matlab, on écrit

```
>> t = 0:0.1:20;
>> w = 9.61*(1-exp(-2*t)).*(t<=1) ...
+8.31*exp(-2*(t-1)).*(t>1);
>> plot(t,w)
>> hold
```

b)

Pour la transmission par courroie, la fonction de transfert entre le couple moteur Γ_m et la vitesse ω_c de la charge est

$$\omega_c = \frac{2\lambda r_1 r_2}{\Delta} \Gamma_m$$

$$\Delta = s(J_1 s + c_1)(J_2 s + c_2) + 2\lambda[r_1^2(J_2 s + c_2) + r_2^2(J_1 s + c_1)]$$

$$\Rightarrow \omega_c = \frac{128\Gamma_m}{4s^3 + 16s^2 + 13.312s + 26.624}$$

$$\Leftrightarrow 4 \frac{d^3 \omega_c}{dt^3} + 16 \frac{d^2 \omega_c}{dt^2} + 13.312 \frac{d\omega_c}{dt} + 26.624 \omega_c = 128\Gamma_m.$$

Cette équation peut être résolue par Matlab en le transformant en équations d'état. En posant $x_1 = \omega_c$, $x_2 = d\omega_c/dt$, $x_3 = d^2\omega_c/dt^2$ et $u = \Gamma_m$, on a :

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = -4x_3 - 3.328x_2 - 6.656x_1 + 32u.$$

Introduisons ces équations dans Matlab sous le nom courroie.

```
function xp = courroie(t, x)
% Équations d'état d'une transmission par courroie.

% Paramètres
a3 = 4; a2 = 3.328; a1 = 6.656; b = 32;
```

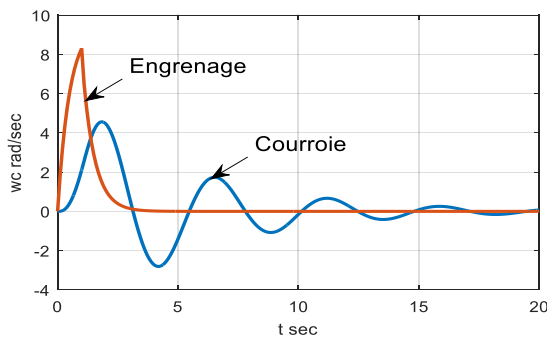


```
% Entrée
u = (t <= 1);

%Équations
xp = [x(2)
      x(3)
      -a3*x(3)-a2*x(2)-a1*x(1)+ b*u];
end
```

La fonction ode45 résout ces équations en admettant que la vitesse ω_c et ses dérivées d'ordre 1 et 2 sont nulles.

```
>> tf = 20;
>> x0 =[0 0 0];
>> opt = odeset('RelTol', 1e-5);
>> [t, x] = ode45(@courroie, [0 tf], x0, opt);
>> plot(t,x(:,1))
```



L'engrenage démarre et s'arrête rapidement mais son accélération est discontinue (choc). La courroie est plus lente au démarrage et oscille avant l'arrêt mais son accélération est continue (absorption des chocs).

AUTRES EXERCICES ET COMPLÉMENTS

3-13 La fonction de transfert d'un moteur à courant continu commandé par son courant d'armature avec un courant d'excitation $i_f = 2$ A, est

$$\frac{\Omega}{u_a} = \frac{3}{s+1}$$

où u_a est la tension appliquée à l'armature et Ω sa vitesse de rotation. La résistance de l'induit est $R_a = 2 \Omega$ et pour $u_a = 100$ V, le courant limite de l'induit est 2 A. En négligeant l'inductance de l'induit et les pertes dans l'acier,

a) déterminer le moment d'inertie J de l'arbre moteur, sa constante de frottement c et le facteur k du couple moteur ($\Gamma_m = k i_a i_f$).

b) La résistance et l'inductance de l'inducteur étant $R_f = 1.5 \Omega$ et $L_f = 0.3$ H, déterminer la fonction de transfert du moteur quand il est commandé par la tension u_f appliquée à l'inducteur avec un courant d'induit $i_a = 1$ A.

a) Calcul de J , c et k

La fonction de transfert d'un moteur cc commandé par son courant d'induit est de la forme :

$$\frac{\Omega}{u_a} = \frac{\omega_L}{\tau s + 1} \quad (1)$$

où ω_L est la vitesse limite par volt de u_a et τ est sa constante de temps. En fonction des paramètres du moteur,

$$\tau = \frac{R_a J}{R_a c + k_a k_b} = 1 \quad \text{et} \quad \omega_L = \frac{k_a}{R_a c + k_a k_b} = 3.$$

$$\Rightarrow J = k_a / 3(2) = k_a / 6.$$

Or, en régime stationnaire (quand $d\Omega/dt = 0$), on a :

$$u_a - R_a i_{aL} = k_b \Omega_L = k_b u_a \omega_L$$

$$\Rightarrow k_b = [100 - 2(2)] / 300 = 0.32 \text{ V.sec/rad.}$$

Mais la perte dans l'acier étant négligeable, $k_a = k_b$

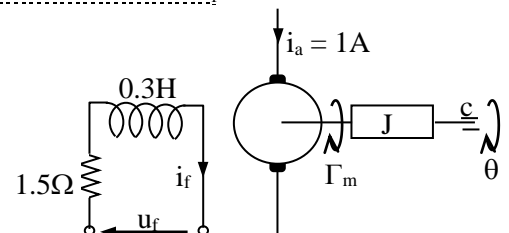
$$\Rightarrow J = 0.32 / 6 = 0.053 \text{ kgm}^2$$

$$\text{et } k_a = k_i f \Rightarrow k = k_a / 2 = 0.16 \text{ Nm / A}^2.$$

$$\text{Enfin, } \Gamma_m = k_a i_{aL} = c u_a \omega_L$$

$$\Rightarrow c = 0.64 / 300 = 21(10^{-4}) \text{ Nm.sec/rad}$$

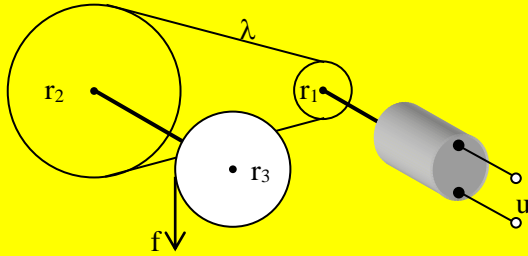
b) Fonction de transfert θ/u_f



$$\theta = \frac{k_f u_f}{s(L_f s + R_f)(J s + c)}, \quad k_f = k i_a,$$

$$\Rightarrow \frac{\theta}{u_f} = \frac{0.16}{s(0.3s + 1.5)(0.053s + 21(10^{-4}))}$$

$$= \frac{10.06}{s(s + 5)(s + 0.039)}.$$

3-14

Un moteur cc commandé par son induit, d'inductance négligeable et de résistance $R_a = 5 \Omega$, a un facteur de couple k_a égal à 0.4 Nm/A et un facteur de contre réaction de la vitesse $k_b = k_a$. Ce moteur entraîne 2 arbres par l'intermédiaire de 2 poulies de rayons $r_1 = 5 \text{ cm}$ et $r_2 = 15 \text{ cm}$ et d'une courroie d'élasticité $\lambda = 10^4 \text{ N/m}$.

Une troisième poulie de rayon $r_3 = 10 \text{ cm}$ à l'extrémité du deuxième arbre entraîne une charge qui exerce une force f . Les moments d'inertie des deux arbres sont $J_1 = 10^{-3}$ et $J_2 = 2(10^{-2}) \text{ kgm}^2$ leurs facteurs de frottement sont $c_1 = c_2 = 5(10^{-3}) \text{ N/(rd/s)}$. Écrire les équations de ce système et déduire, en fonction de f , la relation entre v , u et f où v est la vitesse de la charge et u est la tension appliquée à l'induit du moteur.

Équation de l'arbre de charge.

$$(T_1 - T_2)r_2 = J_2 \frac{d\omega_2}{dt} + c_2\omega_2 + f.r_3. \quad (1)$$

avec $dT_1 = \lambda(\omega_1 r_1 - \omega_2 r_2)dt = -dT_2$.

En dérivant la première équation et en remplaçant dT_1/dt et dT_2/dt par leurs expressions, on obtient

$$J_2 \frac{d^2\omega_2}{dt^2} + c_2 \frac{d\omega_2}{dt} + 2\lambda r_2^2 \omega_2 = 2\lambda r_1 r_2 \omega_1. \quad (2)$$

Équation de l'arbre moteur

Tenant compte de (1),

$$\begin{aligned} \Gamma_m &= J_1 \frac{d\omega_1}{dt} + c_1\omega_1 + (T_1 - T_2)r_1 \\ &= J_1 \frac{d\omega_1}{dt} + c_1\omega_1 + \frac{r_1}{r_2} \left(J_2 \frac{d\omega_2}{dt} + c_2\omega_2 + f.r_3 \right) \end{aligned}$$

Or

$$\Gamma_m = k_a i_a = k_a \frac{u - k_b \omega_1}{R_a}$$

donc

$$u = \frac{R_a}{k_a} \left[J_1 \frac{d\omega_1}{dt} + c_1\omega_1 + \frac{r_1}{r_2} \left(J_2 \frac{d\omega_2}{dt} + c_2\omega_2 + f.r_3 \right) \right] + k_b \omega_1.$$

(3)

Relation entre u et v en fonction de f

$v = r_3\omega_2 \text{ m/s}$ et, en employant l'opérateur de dérivation « s » l'équation (2) s'écrit

$$\omega_1 = \frac{1}{2\lambda r_1 r_2} (J_2 s^2 + c_2 s + 2\lambda r_2^2) \omega_2.$$

En remplaçant dans (3), on obtient :

$$\begin{aligned} u &= \frac{R_a}{2\lambda r_1 r_2 k_a} (J_1 s + c_1) (J_2 s^2 + c_2 s + 2\lambda r_2^2) \omega_2 \\ &+ \frac{R_a r_1}{k_a r_2} (J_2 s + c_2) \omega_2 + \frac{k_b}{2\lambda r_1 r_2} (J_2 s^2 + c_2 s + 2\lambda r_2^2) \omega_2 \\ &+ f \cdot \frac{R_a r_1 r_3}{k_a r_2} \end{aligned}$$

En posant

$$a_3 = \frac{R_a}{2\lambda r_1 r_2 k_a} J_1 J_2 = \frac{10^{-5}}{6}$$

$$a_2 = \frac{R_a}{2\lambda r_1 r_2 k_a} \left[J_1 c_2 + \left(c_1 + \frac{k_a k_b}{R_a} \right) J_2 \right] = 8.8(10^{-3})$$

$$a_1 = \frac{R_a r_2}{k_a r_1} J_1 + \left(\frac{R_a c_1}{k_a} + k_b \right) \frac{c_2}{2\lambda r_1 r_2} = 375(10^{-3})$$

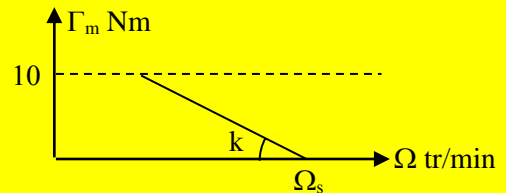
$$a_0 = \frac{R_a}{k_a} \left(\frac{r_2}{r_1} c_1 + \frac{r_1}{r_2} c_2 \right) + \frac{k_b r_2}{r_1} = 1.2$$

$$b = \frac{R_a r_1 r_3}{k_a r_2} = 41.67(10^{-2}),$$

la fonction de transfert entre u et v en fonction de f est

$$\frac{v}{u} = \frac{r_3 \omega_2}{u} = \frac{r_3 b f}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}.$$

3-15 La partie stable de la caractéristique mécanique d'un moteur à induction triphasé, alimenté par une tension efficace V volts et une fréquence f Hz telles que $V/f = 6 \text{ volts/Hz}$, peut être approximée par le segment suivant dont la pente est $k = -0.01 \text{ Nm/(tours/min)}$ et la vitesse de synchronisme est $\Omega_s = 60f \text{ tours/min}$.



Déterminer en fonction du couple résistant Γ_r , compris entre 0 et 10 Nm, la tension V qu'il faut appliquer à ce moteur pour que la vitesse en régime permanent soit égale à 1500 tr/min.

L'équation de la droite est

$$\Gamma_m = -k(\Omega_s - \Omega).$$

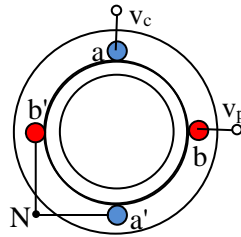
À l'équilibre, $\Gamma_m = \Gamma_r$ et $\Omega = 1500$ tr/m. D'où

$$\Gamma_r = 0.01(60f - 1500) = 0.01(60(V/6) - 1500)$$

$$\Rightarrow 10V = 100\Gamma_r + 1500 \quad \text{ou} \quad V = 10\Gamma_r + 150 \text{ volts.}$$

Selon la charge Γ_r , la tension sera comprise entre 150 et 250 volts et la fréquence entre $150/6 = 25$ Hz et $250/6 = 41.67$ Hz.

3-16 On considère un moteur dont le bobinage du rotor est le même qu'un moteur à induction mais que son stator ne comporte que deux bobines aa' et bb' décalées dans l'espace de 90° et alimentées par deux



tensions $v_p = V_p \cos \omega t$ et $v_c = V_c \sin \omega t$ appelées respectivement principale et de commande.

a) En écrivant les inductions moyennes des deux bobines aa' et bb' sous la forme complexe

$$B_p = B_{pm} \mathcal{R}_e(e^{j\omega t}), \quad B_c = B_{cm} e^{-j\pi/2} \mathcal{R}_e(e^{j(\omega t - \pi/2)}),$$

$B_{pm} \geq B_{cm} > 0$, montrer que leur résultante B_r est la somme de deux inductions B_1 et B_2 tournant en sens opposés avec la même vitesse ω .

b) Montrer que l'extrémité du vecteur B_r décrit une ellipse et que son argument α varie en fonction du temps selon la relation $\tan \alpha = -(B_{cm}/B_{pm}) \tan \omega t$. Est-ce que le flux résultant sera tournant si B_{pm} ou B_{cm} s'annule ?

c) Par analogie avec la formule (3-26), écrire l'expression du couple Γ_1 créé par B_1 et celle du couple Γ_2 créé par B_2 . Représenter dans le même plan en fonction de la vitesse Ω du rotor l'allure du couple Γ_1 et celle du couple Γ_2 ainsi que la caractéristique mécanique Γ_m de ce moteur. On suppose que la résistance du rotor est $R_r > L\omega$.

a) Résultante de B_p et B_c

$$\begin{aligned} B_r &= B_p + B_c \\ &= B_{pm} \cos \omega t + B_{cm} (-j) \sin \omega t. \end{aligned} \quad (1)$$

En posant $A = B_{pm} + B_{cm}$ et $B = B_{pm} - B_{cm}$, l'égalité précédente s'écrit

$$\begin{aligned} B_r &= \frac{A+B}{2} \cos \omega t - \frac{A-B}{2} j \sin \omega t \\ &= \frac{A}{2} (\cos \omega t - j \sin \omega t) + \frac{B}{2} (\cos \omega t + j \sin \omega t) \\ &= B_1 + B_2 \end{aligned}$$

avec

$$B_1 = \frac{A}{2} e^{-j\omega t} \quad \text{et} \quad B_2 = \frac{B}{2} e^{j\omega t}.$$

B_1 est un champ d'amplitude $A/2$ tournant à la vitesse ω dans le sens horaire,

B_2 est un champ d'amplitude $|B|/2$ tournant à la vitesse ω dans le sens trigonométrique.

b) Trajectoire de B_r

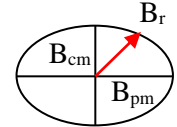
D'après (1), l'abscisse de

l'extrémité de B_r est $x = B_{pm} \cos \omega t$

et son ordonnée est $y = -B_{cm} \sin \omega t$.

D'où

$$\frac{x^2}{B_{pm}^2} + \frac{y^2}{B_{cm}^2} = 1.$$



L'argument α de B_r vérifie

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} = -\frac{B_{cm}}{B_{pm}} \tan \omega t. \quad (2)$$

L'angle α ayant le signe de $-\omega t$, la résultante B_r et le rotor tournent comme B_1 dans le sens horaire. Si $B_{cm} = 0$, on a $\alpha = 0$ et B_r reste sur l'axe de la bobine aa' et si $B_{pm} = 0$, on a $\alpha = \pm 90^\circ$ et B_r reste sur l'axe de la bobine bb' . Dans les 2 cas B_r n'est pas tournant et ne développe pas un couple sur le rotor.

c) Caractéristique mécanique

Le couple moteur est la somme des couples Γ_1 et Γ_2 développés par les inductions B_1 et B_2 . Nous savons (3-24, 3-25, 3-26) que B_1 développe dans le sens horaire un couple Γ_1 lié au glissement,

$$g_1 = \frac{\Omega_s - \Omega}{\Omega_s}, \quad \Omega_s = \omega,$$

$$\text{est} \quad \frac{\Gamma_1}{\Gamma_{1\max}} = \frac{2}{g_{1\max}/g_1 + g_1/g_{1\max}}$$

$$\text{avec} \quad \Gamma_{1\max} = \frac{1}{2L} \left(\frac{V_p}{\Omega_s} \right)^2 \quad \text{et} \quad g_{1\max} = \frac{R_r}{L\Omega_s}.$$

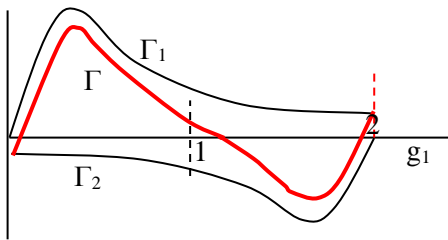
La rotation de B_2 étant opposée à celle du rotor, le couple Γ_2 et la vitesse de synchronisation Ω_s sont négatifs. D'où

$$g_2 = \frac{\Omega_s + \Omega}{\Omega_s} = \frac{2\Omega_s - \Omega_s + \Omega}{\Omega_s} = 2 - g_1$$

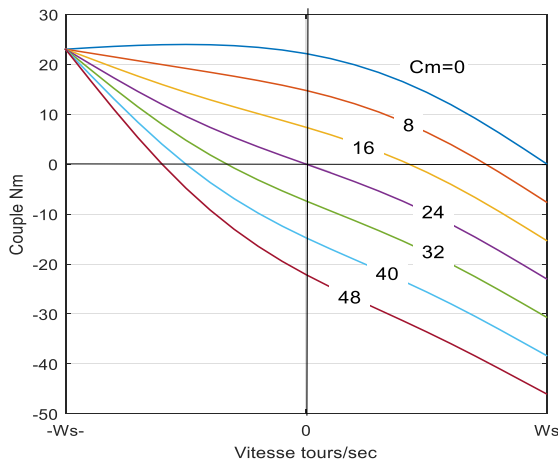
et
$$\frac{\Gamma_2}{\Gamma_{2min}} = \frac{2}{g_{2min}/g_2 + g_2/g_{2min}}$$

avec
$$\Gamma_{2min} = -\frac{1}{2L} \left(\frac{V_c}{\Omega_s} \right)^2 \quad \text{et} \quad g_{2min} = 2 - g_{1max}.$$

La figure suivante représente les variations de Γ_1 , Γ_2 et de leur résultante Γ en fonction de g_1 (≥ 0).

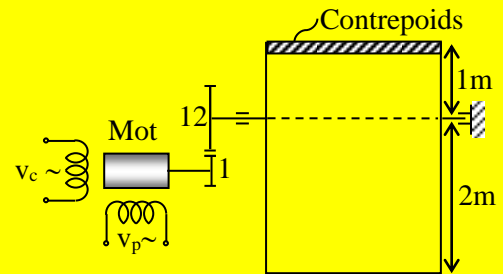


La figure suivante montre la variation de la résultante $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ en fonction de la vitesse $\Omega = (1 - g_1)\Omega_s$ pour différentes valeurs du couple maximum $C_m = |\Gamma_{2min}|$ du bobinage de commande.

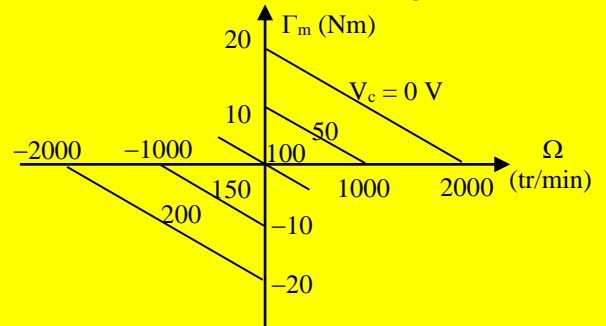


Pour un couple résistant donné, la vitesse diminue quand C_m (ou V_c) augmente. Remarquer aussi que dans la région où Γ et Ω sont de même signe (puissance positive c.à.d. régime moteur), les caractéristiques sont presque parallèles et peuvent être approximées par des droites d'équations $\Gamma = -k\Omega + (a - V_c)$ où k et a sont des constantes.

3-17 À l'aide d'un moteur à deux phases (voir exercice 3-16) et d'un engrenage de rapport de réduction $n = 12$, une porte de garage dont la longueur est 3 m tourne autour d'un axe horizontal situé à 2 m de l'extrémité inférieure de la porte. Sans le contrepoids fixé à son extrémité supérieure, la masse de la porte est $m = 120$ Kg.



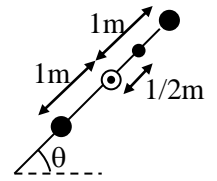
Pour une tension principale efficace V_p constante et pour chaque tension efficace de commande V_c , la caractéristique mécanique du moteur est presque linéaire, de pente indépendante de V_c valant 0.01 Nm/(tr/min) comme le montre la figure suivante.



- Déterminer la masse du contrepoids pour que le couple résistant soit nul et calculer le moment d'inertie J_2 de la porte munie de son contrepoids.
- Le moment d'inertie de l'arbre moteur est $J_1 = 0.025$ kgm² et le facteur de frottement global ramené à l'arbre moteur est $c = 0.5$ Nm/(rd/s). Déterminer la fonction de transfert Ω/V_c , θ étant l'angle que fait la porte avec la verticale.

a) Contrepoids et moment d'inertie

En prenant $g = 10$ m/s², le moment à l'articulation de la partie inférieure de la porte est $-80(10)(1)\cos\theta = -800\cos\theta$ Nm est celui de sa partie supérieure est $200\cos\theta$ Nm. En désignant par m_c la masse du contrepoids, son moment est $10m_c\cos\theta$ Nm. Le moment résistant sera nul si



$$10m_c + 200 - 800 = 0 \Rightarrow m_c = 60 \text{ kg}.$$

Le moment d'inertie du contrepoids par rapport à l'articulation est $60(1^2) = 60 \text{ kgm}^2$. en posant m la masse par unité de longueur de la porte, le moment d'inertie de sa partie inférieure est

$$\int_0^{L=2} x^2 \mu dx = \mu \frac{2^3}{3} = 3\mu \frac{2^3}{9} = \frac{8}{9} m = \frac{320}{3} \text{ kgm}^2.$$

Le moment d'inertie de la partie supérieure est

$$\mu \frac{1^3}{3} = \frac{1}{9} m = \frac{40}{3} \text{ kgm}^2.$$

$$\text{Donc } J_2 = 60 + \frac{320}{3} + \frac{40}{3} = 180 \text{ kgm}^2.$$

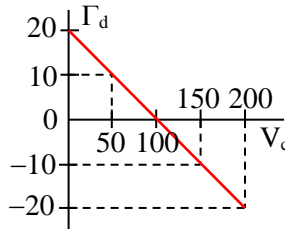
b) Fonction de transfert

Les caractéristiques étant linéaires, elles vérifient des équations de la forme

$$\Gamma_m = -\frac{\Omega}{100} + \Gamma_d$$

où Γ_d est le couple de démarrage.

Ces caractéristiques montrent d'autre part que Γ_d dépend linéairement de V_c comme le montre le graphique ci-contre. On a donc



$$\Gamma_d = -\frac{20}{100} V_c + 20 \Rightarrow \Gamma_m = -\frac{\Omega}{100} - \frac{20}{100} V_c + 20.$$

Le couple Γ_m entraîne l'inertie équivalente J_{eq} du rotor et de sa charge ramenée au moteur et compense le frottement. Or

$$J_{eq} = J_1 + \frac{1}{n^2} J_2 = 0.025 + \frac{1}{12^2} 180 = 1.275 \text{ kgm}^2.$$

D'où

$$-\frac{\Omega}{100} - \frac{20}{100} V_c + 20 = 1.275 \frac{d\Omega}{dt} + 0.5\Omega$$

$$\Omega = \frac{20 - 0.2V_c}{1.275s + 0.51} = 39.2 \frac{100 - V_c}{2.5s + 1}.$$

3-18 La réactance synchrone d'une phase d'un générateur triphasé synchrone à 3 paires de pôles est $X_{sc} = 1 \Omega$ et sa résistance R_s est négligeable. La vitesse Ω du rotor et son courant I_r sont ajustés de sorte que la fréquence soit $f = 50 \text{ Hz}$ et que la tension efficace à vide (courant nul) de chaque phase soit de $V_s = 280 \text{ V}$.

a) Que vaut la vitesse du rotor ?

b) La charge branchée au générateur absorbe un courant efficace $I_s = 60 \text{ A}$ par phase. Que vaut V_a si le facteur de puissance $\cos\varphi = 0.8$ avec $\varphi > 0$?

a) Vitesse du moteur

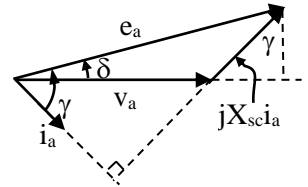
$$\Omega = \frac{f}{p} \text{ tr/sec} \quad \text{ou} \quad \Omega = \frac{50(60)}{3} = 1000 \text{ tr/min}.$$

b) Tension

Le diagramme ci-contre d'un générateur montre que

$$X_{sc}^2 I_a^2 = V_a^2 + E_a^2 - 2V_a E_a \cos\delta$$

et $E_a \sin\delta = X_{sc} I_a \cos\gamma$.



La deuxième équation s'écrit

$$E_a \sin\delta = X_{sc} I_a \cos((\delta + \varphi))$$

$$= X_{sc} I_a (\cos\varphi \cos\delta - \sin\varphi \sin\delta)$$

$$\Rightarrow \tan\delta = \frac{X_{sc} I_a \cos\varphi}{E_a + X_{sc} I_a \sin\varphi}$$

$$\text{Si } \varphi > 0, \sin\varphi = \sqrt{1 - 0.8^2} = 0.6.$$

$$\Rightarrow \tan\delta = \frac{1(60)(0.8)}{280 + 1(60)(0.6)} = 0.15 \Rightarrow \delta = 8.6^\circ$$

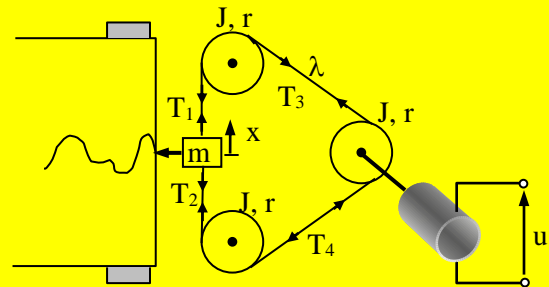
De la première équation on déduit que V_a vérifie

$$V_a^2 - 2(280)\cos(8.6)V_a + 280^2 - 60^2 = 0$$

dont la solution est

$$V_a = 280(0.99) \pm \sqrt{280^2(0.99^2 - 1) + 60^2} = \begin{cases} 232 \text{ V} \\ 322.36 \text{ V} \end{cases} \text{ ou}$$

3-19 Le stylet d'un enregistreur est entraîné par une courroie entourant 3 poulies identiques chacune de moment d'inertie J et de rayon r . La rotation des poulies est effectuée par un moteur à courant continu commandé par son courant d'induit comme le montre la figure.



La masse du stylet est m , le module d'élasticité de la courroie est λ , l'inertie du rotor est J_m , la résistance de l'induit est R et la constante du couple moteur est k_a . En négligeant les frottements, l'inductance de l'induit et les pertes par courant de Foucault, écrire les équations d'état de ce système d'entrée la tension u appliquée à l'induit du moteur et de sortie le déplacement x du stylet.

Mouvement du stylet.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = T_1 - T_2. \quad (1)$$

Équations des tensions de la courroie

$$dT_1 = \lambda(r\omega_1 - \dot{x})dt, \quad (2)$$

$$dT_2 = \lambda(\dot{x} - r\omega_2)dt, \quad (3)$$

$$dT_3 = \lambda(r\omega_m - r\omega_1)dt, \quad (4)$$

$$dT_4 = \lambda(r\omega_2 - r\omega_m)dt. \quad (5)$$

Équations des vitesses.

$$J \frac{d\omega_1}{dt} = (T_3 - T_1)r, \quad (6)$$

$$J \frac{d\omega_2}{dt} = (T_2 - T_4)r, \quad (7)$$

$$J_e \frac{d\omega_m}{dt} = \Gamma_m - (T_3 - T_4)r, \quad J_e = J + J_m \quad (8)$$

Couple moteur

$$\begin{aligned} \Gamma_m &= k_a i_a = k_a \frac{u - e_b}{R} \\ &= k_a \frac{u - k_b \omega_m}{R}, \quad k_b = k_a. \end{aligned} \quad (9)$$

En posant

$$\begin{aligned} x_1 &= x, & x_2 &= \dot{x}, \\ x_3 &= T_1, & x_4 &= T_2, & x_5 &= T_3, & x_6 &= T_4, \\ x_7 &= \omega_1, & x_8 &= \omega_2, & x_9 &= \omega_m, \end{aligned}$$

les équations d'état du système se déduisent directement des équations (1) à (9).

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

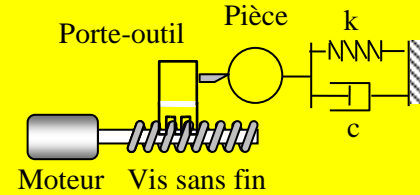
avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m^{-1} & -m^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda r & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda r & 0 & \lambda r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda r & -\lambda r \\ 0 & 0 & -rJ^{-1} & 0 & rJ^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & rJ^{-1} & 0 & -rJ^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -rJ_e^{-1} & rJ_e^{-1} & 0 & 0 & -k_a^2 R^{-1} \end{pmatrix}$$

$$x = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8 \ x_9)^T,$$

$$B = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ k_a R^{-1})^T$$

3-20 Un porte-outil est entraîné par un moteur à courant continu qui tourne (dans un sens ou dans l'autre) une vis sans fin de pas p (distance entre 2 spires). Sous l'action de l'outil et de sa propre élasticité, la pièce en usinage fléchit légèrement et se comporte comme une masse retenue par un ressort de raideur k et un amortisseur de facteur c .



Le moteur commandé par son courant d'induit i_a a un facteur de couple k_a , une résistance d'induit R et le moment d'inertie de son rotor avec la vis est J ; le porte-outil et la masse entraînée ont ensemble une masse m . En négligeant les frottements, l'inductance de l'induit et les pertes par courant de Foucault, déterminer la fonction de transfert x/u où x est la flexion de la pièce et u est la tension appliquée à l'induit du moteur.

Mouvement du porte-outil et de la pièce.

En désignant par f la force exercée par la vis sur le porte-outil, on a :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = f - kx - c\dot{x}. \quad (1)$$

Effet de la rotation de la vis

Par réaction, la force f applique sur la vis un couple résistant Γ_r . Si l'on néglige les frottements, le travail de Γ_r par tour de la vis sera égal au travail de f par pas, c.à.d. $2\pi\Gamma_r = fp$, d'où

$$f = \frac{2\pi}{p} \Gamma_r$$

$$\text{et } f dx = \Gamma_r d\theta \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{p}{2\pi} \Omega. \quad (2)$$

Rotation du moteur

En désignant par $\Gamma_m = k_a i_a$, on a :

$$\Gamma_m = k_a i_a = k_a \frac{u - e_b}{R}$$

$$\Rightarrow k_a \frac{u - k_a \Omega}{R} = J \frac{d\Omega}{dt} + \Gamma_r$$

$$\Rightarrow \Gamma_r = \frac{k_a}{R} u - \frac{2\pi}{p} \left(J \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k_a^2}{R} \frac{dx}{dt} \right)$$

Fonction de transfert

Tenant compte de (2) et en remplaçant dans (1), on obtient :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx + c \frac{dx}{dt} + \left(\frac{2\pi}{p} \right)^2 \left(J \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k_a^2}{R} \frac{dx}{dt} \right) = \frac{2\pi k_a}{pR} u$$

$$m_e \frac{d^2 x}{dt^2} + c_e \frac{dx}{dt} + kx = au$$

avec

$$m_e = m + \left(\frac{2\pi}{p} \right)^2 J, \quad a = \frac{2\pi k_a}{pR}, \quad c_e = c + Ra^2.$$

La fonction de transfert est donc

$$\frac{x}{u} = \frac{a}{m_e s^2 + c_e s + k}.$$