

# Chapitre 1

## TRANSFORMÉE DE LAPLACE ET SYSTÈMES LINÉAIRES

**Rappels.** Nous avons vu dans la partie "modélisation" que l'état d'un système en un instant donné se caractérise par un ensemble de grandeurs physiques  $x_1, \dots, x_n$  (positions, vitesses, tensions, courants, températures, ... des éléments mécaniques, électriques, thermiques, ... du système) formant un vecteur  $x = [x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n]$  appelé *état*. Cet état peut évoluer d'une manière autonome ou sous l'effet d'actions externes  $u_1, \dots, u_p$  (forces, tensions électriques, débits calorifiques, ...) formant un vecteur  $u = [u_1 ; u_2 ; \dots ; u_n]$  appelé *entrée ou action*. L'accroissement  $dx$  de l'état entre deux instants voisins  $t$  et  $t + dt$  dépend des valeurs de  $x$  et de  $u$  à l'instant  $t$  et il est, en première approximation, proportionnel à  $dt$ . En d'autres termes,  $dx = f_t(x, u).dt$  où  $f_t$  est une fonction de  $\mathbb{R}^{n+p}$  dans  $\mathbb{R}^n$  dépendante des paramètres associés aux éléments constituant le système à l'instant  $t$  (masses, raideurs, résistances, capacités, masses calorifiques, ...). Souvent ces paramètres ne se modifient pas au cours du temps et on dit dans ce cas que le système est *invariant*. Pour un tel système on désigne  $f_t$  par  $f$  d'où  $dx = f(x, u).dt$ ,  $\forall t$ . En divisant cette dernière équation par  $dt$  on déduit que *l'équation d'état* d'un système invariant est de la forme :

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (1-1)$$

où  $f$  est une application de  $\mathbb{R}^{n+p}$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Par la suite, nous allons seulement considérer des systèmes invariants pour les raisons suivantes :

- 1) La plupart des systèmes pratiques sont considérés invariants.
- 2) Même pour un système variant, il est souvent possible de subdiviser son temps de fonctionnement en des intervalles tels que dans

chacun d'eux le système peut-être supposé invariant.

Ce qui importe généralement l'utilisateur n'est pas nécessairement l'état  $x$  mais certaines grandeurs  $y_1, \dots, y_q$  liées en tout instant à l'état  $x$  et à l'entrée  $u$ . Le vecteur  $y = [y_1 ; y_2 ; \dots ; y_q]$  est appelé *sortie* ou *réponse* du système. La relation donnant  $y$  en fonction de  $x$  et de  $u$  est dite *équation de sortie* qui s'écrit :

$$y = g(x, u) \quad (1-2)$$

où  $g$  est une application de  $\mathbb{R}^{n+p}$  dans  $\mathbb{R}^q$ .

À noter que la représentation de l'état d'un système par un vecteur  $x$  n'est pas unique. D'abord, tout vecteur  $x'$  lié à  $x$  par une bijection est aussi une représentation de l'état. D'autre part, certaines composantes de  $x$  qui n'ont pas d'effet sur la sortie ou qui ne sont pas affectées par l'entrée peuvent être supprimées.

**Systèmes linéaires.** Un système est linéaire quand les applications  $f$  et  $g$  des équations (1-1) et (1-2) sont toutes les deux linéaires. Par définition, une application  $h$  est linéaire si  $h(a_1v^1 + a_2v^2) = a_1h(v^1) + a_2h(v^2)$ . D'où un système linéaire jouit de l'important principe de superposition suivant :

*L'effet d'une combinaison linéaire de causes est égal à la même combinaison linéaire de leurs effets séparés.*

Par exemple, si à partir d'un même état initial  $x_0$ , l'entrée  $u^1(t)$  produit l'état  $x^1(t)$  et l'entrée  $u^2(t)$  l'état  $x^2(t)$ , alors l'entrée  $a_1u^1(t) + a_2u^2(t)$  produit à partir de

$x_0$  l'état  $a_1x^1(t) + a_2x^2(t)$ . Ceci n'est pas vrai pour un système non-linéaire.

Ce principe facilite considérablement l'étude des systèmes linéaires. Par exemple, sachant que toute fonction  $u(t)$  peut être approximée par une fonction en escalier c'est-à-dire par une somme d'échelons  $a_i(t)$  (nul avant  $t_i$  et constant après  $t_i$ ), il suffit de connaître l'état  $x^i(t)$  qui produit un échelon pour déduire par superposition l'état  $x(t)$  qui produit une entrée  $u(t)$  quelconque. En plus, la transformée de Laplace est une technique mathématique qui facilite la résolution des équations différentielles linéaires invariants en les transformant en équations algébriques linéaires ordinaires. L'emploi de cette technique facilite l'analyse des systèmes linéaires tandis que les systèmes non linéaires n'ont pas ces avantages.

Nous commençons par définir la transformée de Laplace et donner ses propriétés essentielles afin de l'employer pour développer la théorie de base des systèmes linéaires.

## 1-1 TRANSFORMÉE DE LAPLACE

**Définition.** La transformée de Laplace d'une fonction  $f(t)$  définie sur l'intervalle  $[0, \infty)$  et prenant ses valeurs dans  $\mathcal{C}$  est la fonction  $\mathcal{L}f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  définie par

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt, \quad s \in \mathcal{C}. \quad (1-1)$$

Cette définition est valable dans le domaine  $D$  des  $s$  pour lesquels l'intégrale dans (1-1) est convergente. La fonction  $\mathcal{L}f$  peut être vue comme l'image de  $f$  par un opérateur  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{L}f = \mathcal{L}(f)$ , et on démontre que cet opérateur est presque partout injectif, c'est-à-dire l'implication

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t)] \Rightarrow f(t) = g(t) \quad (1-2)$$

est partout vraie sauf éventuellement pour certaines valeurs isolées de  $t$ .

**Fonctions élémentaires.** Nous verrons qu'à partir des transformées de Laplace de  $e^{at}$  et de  $t^n$  nous pouvons déduire les transformées des fonctions qui apparaissent le plus dans les applications.

a) Cherchons d'abord la transformée de Laplace de la fonction  $f(t) = e^{at}$ ,  $t \geq 0$ . Par application de la définition (1-1), on a :

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt = \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \Big|_0^\infty.$$

En remplaçant  $s$  par  $\sigma + j\omega$  et  $a$  par  $\alpha + j\beta$  où  $\sigma, \omega, \alpha$  et  $\beta$  sont les parties réelles et imaginaires de  $s$  et  $a$ , l'équation précédente devient

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{e^{-(\sigma-\alpha)t}}{-(s-a)} e^{-j(\omega-\beta)t} \Big|_0^\infty.$$

Comme  $e^{-j(\omega-\beta)t}$  n'est pas convergente quand  $t \rightarrow \infty$ , se déplaçant continuellement sur le cercle unité (de centre O et de rayon 1), le terme au second membre ne converge vers une valeur finie que dans le domaine  $D$  définie par  $\sigma > \alpha$  où l'on a :

$$\boxed{\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}}, \quad R_e(s) > R_e(a). \quad (1-3)$$

Notons que la transformée  $\mathcal{L}$  de la fonction

$$g(t) = \begin{cases} b & \text{pour } t = t_0, \\ e^{at} & \text{pour } t \neq t_0, \end{cases} \quad b \neq e^{at_0},$$

est aussi donnée par (1-3) bien que  $g(t)$  diffère de  $f(t)$  au point isolé  $t = t_0$ .

b) On appelle *échelon unité* la fonction

$$l(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 & \text{si } t \geq 0. \end{cases} \quad (1-4)$$

Pour  $t \geq 0$ , elle est égale à  $e^{0t}$  et sa transformée de Laplace d'après (1-3) est

$$\boxed{\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}}, \quad R_e(s) > 0. \quad (1-5)$$

c) Soit la fonction polynomiale  $t^n$  avec  $t \geq 0$  et  $n$  un entier  $> 0$ . Sa transformée de Laplace est

$$\mathcal{L}[t^n] = \int_0^\infty t^n e^{-st} dt.$$

En intégrant par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t^n] &= t^n \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty n t^{n-1} \frac{e^{-st}}{-s} dt \\ &= \frac{n}{s} \mathcal{L}[t^{n-1}] \end{aligned}$$

dont le domaine de validité est  $R_e(s) > 0$ . Sachant que pour  $t \geq 0$  on a  $t^0 = 1(t)$ , on déduit par récurrence à partir de (1-5) que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t] &= \frac{1}{s^2}, \quad \mathcal{L}[t^2] = \frac{2}{s^3}, \quad \mathcal{L}[t^3] = \frac{3!}{s^4}, \dots \\ \mathcal{L}[t^n] &= \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad R_e(s) > 0 \end{aligned} \quad (1-6)$$

Les propriétés suivantes permettent de déduire des transformées (1-3), (1-5) et (1-6) celles d'autres fonctions.

**Linéarité.** L'opérateur de Laplace  $\mathcal{L}$  est linéaire c'est-à-dire, pour deux constantes  $c_1$  et  $c_2$  et deux fonctions  $f_1$  et  $f_2$  quelconques on a :

$$\mathcal{L}(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \mathcal{L}(f_1) + c_2 \mathcal{L}(f_2). \quad (1-7)$$

Ceci est évident car l'intégration est linéaire :

$$\int_0^\infty (c_1 f_1 + c_2 f_2) dt = c_1 \int_0^\infty f_1 dt + c_2 \int_0^\infty f_2 dt.$$

Par exemple, comme  $\cos \omega t = (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) / 2$ ,

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{1}{2} \left\{ \mathcal{L}[e^{j\omega t}] + \mathcal{L}[e^{-j\omega t}] \right\}.$$

D'où, d'après (1-3),

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega} \right)$$

ou

$$\boxed{\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}}, \quad R_e(s) > 0. \quad (1-8)$$

De la même manière, on trouve que la transformée de  $\sin \omega t = (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) / 2j$  est

$$\boxed{\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}}, \quad R_e(s) > 0. \quad (1-9)$$

**Fonction amortie.** La transformée de Laplace de la fonction  $g(t) = e^{-at} f(t)$ ,  $a \in \mathbb{C}$ , est

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = \int_0^\infty f(t) e^{-(s+a)t} dt.$$

On déduit, d'après la définition (1-1), que la transformée de  $g(t)$  s'obtient à partir de celle de  $f(t)$  en remplaçant  $s$  par  $s + a$ . En d'autres termes

$$\boxed{\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = \mathcal{L}[f(t)] \Big|_{s \rightarrow s+a}}. \quad (1-10)$$

Le domaine de validité de cette transformée dépend de celui de  $\mathcal{L}[f(t)]$ .

Par exemple, d'après (1-6),

$$\boxed{\mathcal{L}[t^n e^{-\sigma t}] = \frac{n!}{(s+\sigma)^{n+1}}}, \quad R_e(s) > -R_e(\sigma) \quad (1-11)$$

et d'après (1-8) et (1-9),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{-\sigma t} \cos \omega t] &= \frac{s + \sigma}{(s + \sigma)^2 + \omega^2} \\ \mathcal{L}[e^{-\sigma t} \sin \omega t] &= \frac{\omega}{(s + \sigma)^2 + \omega^2} \end{aligned} \quad (1-12)$$

où  $R_e(s) > -R_e(\sigma)$ .

**Fonction retardée.** La fonction  $f(t)$  retardée de  $r (\geq 0)$  est définie par

$$f_r(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < r, \\ f(t-r) & \text{si } t \geq r. \end{cases} \quad (1-13)$$

$f_r$  est donc la fonction  $f$  décalée de  $r$  vers la droite. Comme elle est nulle avant  $r$ , sa transformée de Laplace est donnée par

$$\mathcal{L}[f_r(t)] = \int_r^{\infty} f(t-r)e^{-st} dt.$$

Par le changement de variable  $\tau = t - r$ , on obtient :

$$\mathcal{L}[f_r(t)] = \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s(\tau+r)} d\tau$$

d'où

$$\boxed{\mathcal{L}[f_r(t)] = e^{-sr} \mathcal{L}[f(t)]}. \quad (1-14)$$

Le domaine de validité de  $\mathcal{L}f_r$  est celui de  $\mathcal{L}f$ .

La fonction  $l(t)$  retardée de  $r$  est la fonction notée  $l(t-r)$  qui vaut 0 pour  $t < r$  et 1 pour  $t \geq r$ . D'après (1-5) et (1-14), on a :  $\mathcal{L}[l(t-r)] = e^{-sr}/s$ .

L'expression du signal carré  $c(t)$  représenté par la figure 1-1 est

$$c(t) = a.l(t) - a.l(t-r) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ a & \text{si } 0 \leq t < r, \\ 0 & \text{si } t \geq r. \end{cases}$$

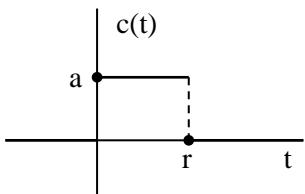


Fig. 1-1 Signal carré

La transformée de Laplace de ce signal est alors

$$\mathcal{L}[c(t)] = a \cdot \frac{1}{s} - a \cdot \frac{e^{-sr}}{s}$$

$$= a \frac{1 - e^{-sr}}{s}, \quad R_e(s) > 0 \quad (1-15)$$

Pour  $r = \varepsilon > 0$  et  $a = 1/\varepsilon$ , la surface sous le signal carré (son intégrale) est égale à 1  $\forall \varepsilon$ . Quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , le signal carré s'annule partout sauf pour  $t = 0$  où il tend vers l'infini. Le signal ainsi obtenu est appelé *distribution de Dirac* définie par

$$\delta(t) = 0, \forall t \neq 0 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (1-16)$$

Tenant compte de (1-15), on a :

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-s\varepsilon}}{\varepsilon s}$$

et en appliquant la règle d'Hôpital, on obtient :

$$\boxed{\mathcal{L}[\delta(t)] = 1}. \quad (1-17)$$

Nous verrons que  $\delta(t)$  intervient chaque fois qu'on dérive une fonction ayant un saut de discontinuité.

**Fonction tronquée.** Pour annuler une fonction  $f(t)$  avant  $r$  et conserver ses valeurs après  $r$ , il suffit de la multiplier par  $l(t-r)$ . En d'autres termes

$$f(t).l(t-r) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < r, \\ f(t) & \text{si } t \geq r. \end{cases} \quad (1-18)$$

Sa transformée de Laplace est donc

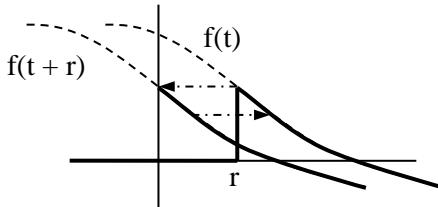
$$\mathcal{L}[f(t).l(t-r)] = \int_r^{\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

En posant  $\tau = t - r$ , l'équation précédente devient :

$$\mathcal{L}[f(t).l(t-r)] = \int_0^{\infty} f(\tau+r)e^{-s(\tau+r)} d\tau$$

ou

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t).l(t-r)] = e^{-sr} \mathcal{L}[f(t+r)]}. \quad (1-19)$$



**Fig. 1-2** Transformée d'une fonction tronquée

Comme le montre la figure 1-2, l'équation (1-19) signifie que la transformée de la fonction tronquée  $f(t)I(t-r)$  est égale à la transformée de la fonction  $f(t)$  avancée de  $r$  puis le résultat est retardée de  $r$ .

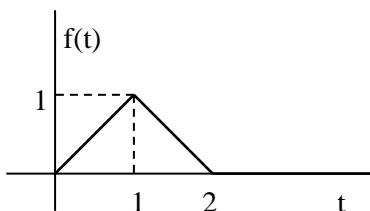
### Exemple 1-1

La fonction triangulaire  $f(t)$  représentée sur la figure 1-3 a pour expression :

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ -t + 2 & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{si } 2 \leq t \end{cases}$$

qu'on peut l'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} f(t) &= t[1(t) - 1(t-1)] \\ &\quad + (-t+2)[1(t-1) - 1(t-2)] \\ &= t - 2(t-1).1(t-1) + (t-2).1(t-2). \end{aligned}$$



**Fig. 1-3** Signal triangulaire

En appliquant la linéarité et les formules (1-6) et (1-19), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}(t) - 2\mathcal{L}(t)e^{-s} + \mathcal{L}(t)e^{-2s} \\ &= \frac{1}{s^2} - 2\frac{1}{s^2}e^{-s} + \frac{1}{s^2}e^{-2s} \\ &= \left(\frac{1-e^{-s}}{s}\right)^2. \end{aligned} \quad (1-20)$$

### EXERCICE 1-1

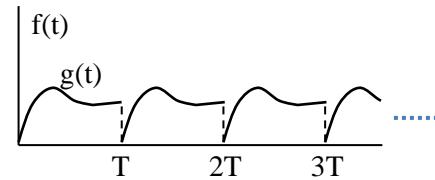
Soit  $g(t)$  la fonction qui vaut sin $\omega t$  entre 0 et  $\pi/\omega$  et 0 ailleurs. Déterminer sa transformée de Laplace

- 1) A partir de la définition 1-1
- 2) En employant la propriété (1-19) de la fonction tronquée.

**Fonction périodique.** Soit une fonction  $g(t)$  définie entre 0 et  $T$  et nulle ailleurs. Pour  $t$  appartenant à  $[0, \infty)$ , la fonction

$$f(t) = g(t - nT) \quad \text{si } nT \leq t < (n+1)T \quad (1-21)$$

où  $n = 0, 1, 2, \dots$ , est périodique dont la fonction de périodicité est  $g(t)$  comme le montre la figure 1-4.



**Fig. 1-4** Fonction périodique

La fonction  $f(t)$  peut aussi s'écrire sous la forme :

$$f(t) = g(t) + g_T(t) + g_{2T}(t) + \dots$$

où  $g_{nT}$  est la fonction  $g(t)$  retardée de  $nT$ . Tenant compte de (1-14), on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}[g(t)] + e^{-sT}\mathcal{L}[g(t)] + e^{-s2T}\mathcal{L}[g(t)] + \dots \\ &= \mathcal{L}[g(t)](1 + e^{-sT} + e^{-s2T} + e^{-s3T} + \dots). \end{aligned}$$

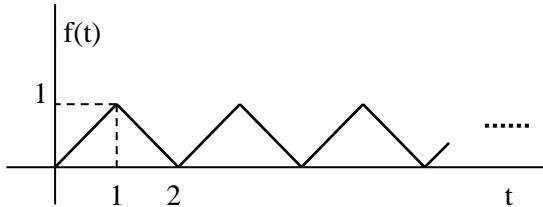
La somme entre parenthèses étant une progression géométrique de raison  $e^{-sT}$ , on déduit que dans le domaine  $\text{Re}(s) > 0$  (où la série converge)

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \mathcal{L}[g(t)]}. \quad (1-22)$$

### Exemple 1-2

Tenant compte de (1-20), la transformée de Laplace de la fonction en dents de scie représentée à la figure 1-5 est

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-2s}} \left( \frac{1-e^{-s}}{s} \right)^2 = \frac{1-e^{-s}}{s^2(1+e^{-s})}. \quad (1-23)$$

**Fig. 1-5** Signal en dents de scie**EXERCICE 1-2**

Tenant compte du résultat de l'exercice 1-1, déterminer la transformée de Laplace de la fonction sinusoïdale redressée  $|\sin \omega t|$ ,  $t \in [0, \infty)$ .

**Dérivée.** Cherchons la transformée de Laplace de la dérivée  $f'(t)$  d'une fonction  $f(t)$ . On a :

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^\infty f'(t)e^{-st} dt$$

dont l'intégration par partie donne

$$\mathcal{L}[f'(t)] = f(t)e^{-st} \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt.$$

Dans le domaine  $D_1$  des  $s = \sigma + j\omega$  pour lesquels  $f(t)e^{-\sigma t} \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ , on obtient :

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s \mathcal{L}[f(t)] - f(0). \quad (1-24)$$

Dans le sous ensemble  $D_2$  de  $D_1$  où  $f'(t)e^{-\sigma t} \rightarrow 0$ , (1-24) implique que la transformée de Laplace de la dérivée seconde est

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f''(t)] &= s \mathcal{L}[f'(t)] - f'(0) \\ &= s \{ s \mathcal{L}[f(t)] - f(0) \} - f'(0) \\ &= s^2 \mathcal{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0). \end{aligned}$$

Par récurrence, on arrive à la formule générale suivante :

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n \mathcal{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(0). \quad (1-25)$$

**Exemple 1-3**

On lance verticalement vers le haut une masse à partir d'une position  $y_0$  avec une vitesse initiale  $v_0$ . L'accélération ascendante de la masse étant opposée à celle  $g$  de la pesanteur, on a :

$$y''(t) = -g.$$

En passant aux transformées de Laplace tenant compte de (1-25) et (1-5), on obtient :

$$\begin{aligned} s^2 \mathcal{L}[y(t)] - sy_0 - v_0 &= -\frac{g}{s} \\ \text{ou } \mathcal{L}[y(t)] &= -\frac{g}{s^3} + \frac{v_0}{s^2} + \frac{y_0}{s} \end{aligned}$$

et (1-6) conduit à la formule connue

$$y(t) = -\frac{g}{2} t^2 + v_0 t + y_0.$$

**Exemple 1-4**

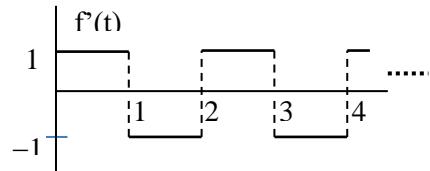
La valeur initiale de la fonction en dents de scie de la figure 1-5 est  $f(0) = 0$  et sa transformée de Laplace est donnée par (1-23). La transformée de sa dérivée est alors

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s \mathcal{L}[f(t)] = \frac{1-e^{-s}}{s} \cdot \frac{1}{1+e^{-s}}.$$

Or  $1/(1+e^{-s})$  est la somme de la progression géométrique de raison  $-e^{-s}$  et, d'après (1-15), le terme  $(1-e^{-s})/s$  est la transformée du signal carré  $c(t)$  de largeur 1 et de hauteur 1. D'où

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \mathcal{L}[c(t)](1-e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s} + \dots)$$

Ceci signifie qu'à chaque intervalle de largeur 1 le signe du signal carré  $c(t)$  s'inverse comme le montre la figure (1-6).

**Fig. 1-6** Dérivée du signal en dents de scie

Ce résultat est évident car la dérivée du côté croissant d'une dent de la figure 1-5 est +1 et la dérivée du côté décroissant est -1.

### Exemple 1-5

L'expression de la fonction représentée à la figure 1-7 est

$$\begin{aligned} f(t) &= t[1(t-1)-1(t-2)] \\ &\quad + (-t/2+2)[1(t-2)-1(t-4)] \\ &= t \cdot 1(t-1) - (3t/2 - 2)1(t-2) \\ &\quad + (t/2 - 2)1(t-4) \end{aligned}$$

dont la transformée d'après (1-19) est

$$\mathcal{L}[f(t)] = \left( \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} \right) e^{-s} - \left( \frac{3}{2s^2} + \frac{1}{s} \right) e^{-2s} + \frac{1}{2s^2} e^{-4s}.$$

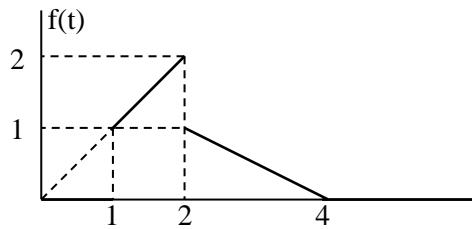


Fig. 1-7 Fonction discontinue

Comme  $f(0) = 0$  et en sachant que  $3/2s = 1/s + 1/2s$ , la transformée de la dérivée de  $f(t)$  peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'(t)] &= s\mathcal{L}[f(t)] \\ &= \left( \frac{1}{s} + 1 \right) e^{-s} - \left( \frac{3}{2s} + 1 \right) e^{-2s} + \frac{1}{2s} e^{-4s} \\ &= \frac{1}{s} (e^{-s} - e^{-2s}) + 1 (e^{-s} - e^{-2s}) \\ &\quad - \frac{1}{2s} (e^{-2s} - e^{-4s}). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} f'(t) &= 1[1(t-1) - 1(t-2)] + \delta(t-1) - \delta(t-2) \\ &\quad - \frac{1}{2}[1(t-2) - 1(t-4)] \end{aligned}$$

dont le graphe est représenté à la figure 1-8.

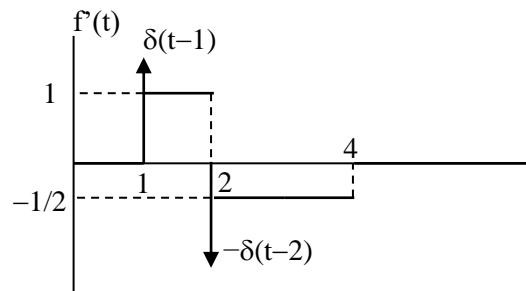


Fig. 1-8 Dérivée de la fonction fig. 3-7

Ce graphe peut être déduit par simple inspection des pentes et des sauts de la fonction  $f(t)$ .

### EXERCICE 1-3

Tenant compte du résultat de l'exercice 1-2, déterminer la transformée de Laplace de la dérivée seconde de la fonction sinusoïdale redressée  $|\sin \omega t|$ ,  $t \in [0, \infty)$ , représenter son graphe et interpréter le résultat.

**Intégration.** Soit

$$F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau.$$

Comme  $\frac{d}{dt} F(t) = f(t)$ , on a, d'après (1-24),

$$\mathcal{L}[f(t)] = s\mathcal{L}[F(t)] - F(0)$$

ou

$$\mathcal{L}[F(t)] = \mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{\mathcal{L}[f(t)]}{s} + \frac{F(0)}{s}. \quad (1-26)$$

Ainsi, si  $f(0) = 0$ , l'opérateur de dérivation d'une fonction  $f(t)$  est  $s$  et si  $F(0) = 0$ , son opérateur d'intégration est  $1/s$ .

**Multiplication par  $t$ .** Cherchons la transformée  $\mathcal{L}$  de la fonction  $tf(t)$ . on a :

$$\mathcal{L}[tf(t)] = \int_0^\infty tf(t)e^{-st} dt = - \int_0^\infty \frac{d}{ds}(f(t)e^{-st}) dt$$

d'où

$$\mathcal{L}[tf(t)] = - \frac{d}{ds} (\mathcal{L}[f(t)]). \quad (1-27)$$

**Exemple 1-6**

Tenant compte de (1-8) et (1-9), on déduit de (1-27) que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[t \sin \omega t] &= -\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2} \\ \mathcal{L}[t \cos \omega t] &= -\left(\frac{s^2 + \omega^2 - s(2s)}{(s^2 + \omega^2)^2}\right) \\ &= \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}\end{aligned}\quad (1-28)$$

D'autre part, en remarquant que

$$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2} = \frac{1}{s^2 + \omega^2} - \frac{2\omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$$

on obtient :

$$\frac{2\omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2} = \mathcal{L}\left[\frac{\sin \omega t}{\omega} - t \cos \omega t\right]. \quad (1-29)$$

Cette formule peut servir pour l'inversion de la transformée de Laplace.

**EXERCICE 1-4**

Déterminer  $\mathcal{L}[t \cos \omega t]$  et  $\mathcal{L}[t^2 \cos \omega t]$  en appliquant  $\mathcal{L}(t^n e^{-\sigma t}) = n! / (s + \sigma)^{n+1}$  (voir (1-28) et (1-11)).

**Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale.** La formule (1-24) de la transformée  $\mathcal{L}$  de la dérivée d'une fonction s'écrit :

$$\begin{aligned}s \mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}[f'(t)] + f(0), \\ &= \int_0^\infty f'(t) e^{-st} dt + f(0).\end{aligned}\quad (1-30)$$

Dans le domaine où  $\lim_{s \rightarrow \infty} f'(t) e^{-st} = 0 \forall t$  et où la limite peut être introduite sous l'intégrale, on tire de (1-30) que  $\lim_{s \rightarrow \infty} s \mathcal{L}[f(t)] = f(0)$ .

D'autre part,

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty \lim_{s \rightarrow 0} f'(t) e^{-st} dt + f(0)$$

$$= \int_0^\infty f'(t) dt + f(0) = f(\infty).$$

à condition que la limite peut être introduite sous l'intégrale et que  $f(\infty)$  existe.

On a ainsi les deux égalités suivantes :

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow \infty} s \mathcal{L}[f(t)] &= \lim_{t \rightarrow 0} f(t), \\ \lim_{s \rightarrow 0} s \mathcal{L}[f(t)] &= \lim_{t \rightarrow \infty} f(t),\end{aligned}\quad (1-31)$$

On démontre que la validité de chacune de ces égalités est assurée si et seulement si ses deux membres existent et ils sont finis.

**Exemples 1-7**

1)

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s \mathcal{L}[e^{at}] = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{s-a} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0} e^{at} = 1.$$

D'où, pour la fonction exponentielle, le théorème de la valeur initiale ( $t \rightarrow 0$ ) s'applique  $\forall a$ . Par contre,

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow 0} s \mathcal{L}[e^{at}] &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s-a} = \begin{cases} 0 & \text{si } a \neq 0, \\ 1 & \text{si } a = 0 \end{cases} \\ \text{mais } \lim_{t \rightarrow \infty} e^{at} &= \begin{cases} 0 & \text{si } \operatorname{Re}(a) < 0, \\ 1 & \text{si } a = 0, \\ \text{sans limite si } \operatorname{Re}(a) = 0 \text{ et } a \neq 0, \\ \infty & \text{si } \operatorname{Re}(a) > 0. \end{cases}\end{aligned}$$

D'où le théorème de la valeur finale ne s'applique à l'exponentielle que si  $\operatorname{Re}(a) < 0$  ou  $a = 0$ .

2) On a les mêmes conclusions pour les fonctions  $e^{\sigma t} \cos \omega t$  et  $e^{\sigma t} \sin \omega t$  puisque chacune est une combinaison linéaire de  $e^{(\sigma+j\omega)t}$  et  $e^{(\sigma-j\omega)t}$ .

**Transformée inverse.** Sauf ambiguïté, nous désignerons par la suite la transformée de Laplace d'une fonction  $f(t)$  par la même lettre que cette fonction mais avec un argument  $s$  au lieu de  $t$ , c.à.d. on pose  $f(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ . Sous certaines conditions le plus souvent vérifiées, on démontre qu'on peut

obtenir la fonction  $f(t)$  à partir de sa transformée  $f(s)$  en appliquant la formule d'inversion :

$$f(t) = \frac{1}{2j\pi} \int_D f(s)e^{st} ds. \quad (1-32)$$

L'intégration au second membre de (1-32) est le long d'une droite verticale  $D$  à droite de tous les pôles de  $f(s)$ .  $D$  est le lieu des points  $s = \sigma + j\omega$ ,  $\omega$  variant de  $-\infty$  à  $+\infty$  avec  $\sigma$  fixe supérieur aux parties réelles des pôles de  $f(s)$ . Sur  $D$   $f(s)$  est finie.

En pratique, les transformées de Laplace de la plupart des fonctions usuelles sont des sommes de fonctions rationnelles (éventuellement retardées) de la forme  $f(s) = n(s)/d(s)$  où  $n$  et  $d$  sont des polynômes à coefficients réels. Dans ce cas, au lieu d'appliquer (1-32), il est plus simple de décomposer chaque fonction rationnelle en des fractions simples et d'additionner les inverses de ces fractions déduites des formules de la transformée de Laplace. À chaque fraction simple correspond une racine réelle du dénominateur de  $d(s)$  (pôle) ou deux racines complexes conjuguées. Ces racines peuvent être simples ou multiples.

#### a) Inverse d'une fraction à pôle réel.

Si le pôle  $-\sigma$  est de multiplicité  $n = 1, 2, \dots$ , il lui correspond la somme de  $n$  fractions de la forme :

$$f_k(s) = \frac{A_k}{(s + \sigma)^k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

D'après (1-11), la transformée inverse de  $f_k(s)$  est

$$f_k(t) = A_k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\sigma t}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (1-33)$$

#### b) Inverse d'une fraction à pôles complexes simples.

À ces pôles correspondent une fraction de la forme :

$$f(s) = \frac{As + B}{(s + \sigma)^2 + \omega^2},$$

les pôles étant  $-\sigma \pm j\omega$ . En écrivant

$$f(s) = \frac{A(s + \sigma) + (B - A\sigma)}{(s + \sigma)^2 + \omega^2},$$

on déduit de (1-12) que

$$f(t) = e^{-\sigma t} \left( A \cos \omega t + \frac{B - A\sigma}{\omega} \sin \omega t \right). \quad (1-34)$$

c) Inverse d'une fraction à pôles complexes doubles.  
À ces pôles correspondent les deux fractions

$$\frac{As + B}{(s + \sigma)^2 + \omega^2} + \frac{Cs + D}{((s + \sigma)^2 + \omega^2)^2}.$$

L'inverse de la première est donné par (1-34). Pour la deuxième, en l'écrivant sous la forme

$$f(s) = \frac{C(s + \sigma) + D - C\sigma}{[(s + \sigma)^2 + \omega^2]^2}$$

et en appliquant (1-28) et (1-29) avec  $s$  remplacé par  $s + \sigma$ , on déduit que

$$f(t) = e^{-\sigma t} \left[ -\frac{C}{2\omega} t \sin \omega t + \frac{D - C\sigma}{2\omega^2} \left( \frac{\sin \omega t}{\omega} - t \cos \omega t \right) \right]$$

Ce dernier cas apparaît peu dans les applications.

#### Exemple 1-8

Déterminons  $f(t)$  sachant que

$$f(s) = \frac{(2s+1)}{(s+1)(s+2)^2(s^2+s+1)}.$$

a) On commence par décomposer  $f(s)$  en fractions simples.

$$f(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B_2}{(s+2)^2} + \frac{B_1}{s+2} + \frac{Cs+D}{s^2+s+1}. \quad (1)$$

b) Le calcul des constantes  $A$ ,  $B_2$ ,  $B_1$ ,  $C$  et  $D$  se fait comme suit.

En multipliant les deux membres de (1) par  $(s+1)$  et en remplaçant  $s$  par  $-1$ , on obtient

$$A = (s+1)f(s)|_{s=-1} = \frac{2s+1}{(s+2)^2(s^2+s+1)}|_{s=-1} = -1.$$

De même, en multipliant les deux membres de (1) par  $(s + 2)^2$  et en remplaçant  $s$  par  $-2$ , on obtient

$$B_2 = (s + 2)^2 f(s) \Big|_{s=-2} = \frac{2s+1}{(s+1)(s^2+s+1)} \Big|_{s=-2} = -1.$$

Pour calculer  $B_1$ , on multiplie les deux membres de (1) par  $(s + 2)^2$  et on dérive par rapport à  $s$  (ce qui élimine  $B_2$  mais conserve  $B_1$ ) puis on remplace  $s$  par  $-2$  (ce qui élimine  $A$ ,  $C$  et  $D$ ). D'où

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{d}{ds} [(s + 2)^2 f(s)] \Big|_{s=-2} \\ &= \frac{2(s+1)(s^2+s+1)-(3s^2+4s+2)(2s+1)}{(s+1)^2(s^2+s+1)^2} \Big|_{s=-2} \\ &= 4/3. \end{aligned}$$

C s'obtient de l'égalité

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sf(s) = A + B_1 + C \Rightarrow C = 0 + 1 - 4/3 = -1/3$$

et  $D$  s'obtient de l'égalité

$$\begin{aligned} f(0) &= A + B_2 / 4 + B_1 / 2 + D \\ \Rightarrow D &= 1/4 + 1 - 1/4 - 2/3 = 1/3. \end{aligned}$$

Ainsi, la substitution de  $A$ ,  $B_2$ ,  $B_1$ ,  $C$  et  $D$  par leurs valeurs dans (1) donne

$$f(s) = \frac{-1}{s+1} + \frac{1}{(s+2)^2} + \frac{4/3}{s+2} - \frac{1}{3} \frac{(s+1/2)-3/2}{(s+1/2)^2+3/4}.$$

En appliquant (1-33) et (1-34) aux fractions simples de  $f(s)$ , on trouve

$$\begin{aligned} f(t) &= -e^{-t} + \left(t + \frac{4}{3}\right)e^{-2t} \\ &\quad - \frac{e^{-t/2}}{3} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2}t - \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ &= \left(t + \frac{4}{3}\right)e^{-2t} - e^{-t} - \frac{e^{-t/2}}{3} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

Remarque. D'une façon générale, si  $p$  est un pôle de multiplicité  $n$  de  $f(s)$ , la constante  $A_k$  de la fraction

$A_k/(s - p)^k$  du développement de  $f(s)$  en fractions simples est donnée par la formule :

$$A_k = \frac{1}{(n-k)!} \left[ \frac{d^{n-k}}{ds^{n-k}} (s-p)^n f(s) \right]_{s=-\sigma}.$$

$A_1$  est appelé le résidu de  $f(s)$  au pôle  $p$ .

### EXERCICE 1-5

Déterminer l'inverse  $f(t)$  de

$$f(s) = \frac{2s+5}{s(s+1)^2(s^2+2s+5)}.$$

**Résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants.** Ces équations sont de la forme :

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)} = \sum_{k=0}^m b_k u^{(k)} \quad (1-35)$$

où  $y^{(i)}$  et  $u^{(k)}$  sont la  $i^{\text{ème}}$  et la  $k^{\text{ème}}$  dérivées de  $y$  et  $u$ . La fonction  $u(t)$  est connue ainsi que les valeurs initiales de  $y$ ,  $y^{(1)}$ , ...,  $y^{(n-1)}$  et il s'agit de déterminer la fonction  $y(t)$ . En appliquant aux deux membres la formule (1-25) qui associe aux dérivées leurs transformations de Laplace, on aboutit à une équation algébrique linéaire à une inconnue  $y(s)$ . Par inversion de la solution, on déduit  $y(t)$ .

### Exemple 1-9

Cherchons la solution de l'équation différentielle linéaire suivante :

$$y'' + 2y' + 10y = u' + u$$

avec  $y(0) = 0$  et  $y'(0) = 2$ .

La transformée de Laplace de cette équation est l'équation algébrique

$$s^2 y(s) - 2 + 2sy(s) + 10y(s) = su(s) - u(0) + u(s)$$

$$\text{d'où} \quad y(s) = \frac{(s+1)u(s) + 2 - u(0)}{s^2 + 2s + 10}.$$

Pour  $u(t) = 5(2 - e^{-t})$ , on a :

$$u(0) = 5 \text{ et } u(s) = 5[2/s - 1/(s+1)] = 5(s+2)/s(s+1)$$

et en remplaçant dans l'expression de  $y(s)$ , on tire

$$y(s) = \frac{2(s+5)}{s(s^2 + 2s + 10)}.$$

Il reste à calculer l'inverse  $y(t)$  de  $y(s)$  dont la décomposition en fractions simples est

$$y(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2 + 2s + 10}.$$

Par identification des numérateurs des deux expressions de  $y(s)$ , on déduit le système d'équations

$$A + B = 0, \quad 2A + C = 2 \quad \text{et} \quad 10A = 10.$$

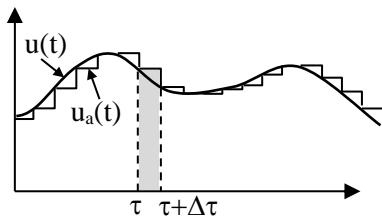
dont la solution est  $A = 1$ ,  $B = -1$ ,  $C = 0$ .

La transformée inverse de  $y(s)$  est donc

$$y(t) = 1 - e^{-t} (\cos 3t - \frac{1}{3} \sin 3t).$$

## 3-2 SYSTÈMES LINÉAIRES

Considérons un système linéaire monovariable (à une seule entrée et une seule sortie) et cherchons la réponse de ce système à une entrée  $u(t)$  quand ce système est initialement inerte (état initial nul).



**Fig. 1-9** Approximation de  $u(t)$  par une fonction en escalier

La fonction  $u(t)$  peut être approximée par une fonction en escalier définie par

$$u_a(t) = u(\tau) \text{ pour } \tau \leq t < \tau + \Delta\tau$$

et représentée avec  $u(t)$  à la figure 1-9. La fonction  $u_a$  peut être vue comme une suite d'impulsions aux

instants  $0, \Delta\tau, 2\Delta\tau, \dots$  telles que l'impulsion à l'instant  $\tau = k\Delta\tau$  a une hauteur  $u(\tau)$  et une largeur  $\Delta\tau$ . Comme le système est linéaire, sa réponse à  $u_a$  en un instant  $t$  est égale à la somme de ses réponses en cet instant aux impulsions qui apparaissent avant  $t$ . Or la valeur en  $t$  de la réponse  $y_\tau$  à une impulsion en  $\tau$  ( $\leq t$ ) est proportionnelle à  $u(\tau)$  et à  $\Delta\tau$  et dépend de la durée  $t - \tau$  séparant ces deux instants. En d'autre termes,  $y_\tau(t) = g(t - \tau)u(\tau)\Delta\tau$  où la fonction  $g$  dépend du système considéré. Il est à noter que toute impulsion qui arrive après  $t$  n'a aucun effet en cet instant, d'où  $g(t - \tau) = 0 \forall \tau > t$ . Ainsi la réponse en  $t$  à la fonction en escalier  $u_a$  est égale à

$$y_a(t) = \sum_{\tau=0}^t g(t - \tau)u(\tau)\Delta\tau.$$

Quand  $\Delta\tau \rightarrow 0$ ,  $u_a \rightarrow u$  d'où la réponse en  $t$  à l'entrée  $u$  est  $y(t) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} y_a(t)$  c'est-à-dire, par définition de l'intégrale de Riemann,

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau)u(\tau)d\tau. \quad (1-36)$$

Cette intégrale, noté  $(g \cdot u)(t)$ , est appelée *produit de convolution* des fonctions  $g$  et  $u$ .

**Fonction de transfert.** Tenant compte de (1-36), la transformée de Laplace de la réponse  $y(t)$  d'un système linéaire à une entrée  $u(t)$  est

$$y(s) = \int_0^\infty \left( \int_0^t g(t - \tau)u(\tau)d\tau \right) e^{-st} dt.$$

Comme  $g(t - \tau) = 0$  pour  $\tau > t$ , on peut écrire

$$y(s) = \int_0^\infty \int_0^\infty g(t - \tau)u(\tau)e^{-st} d\tau dt.$$

En effectuant le changement de variable  $v = t - \tau$ , l'égalité précédente devient :

$$y(s) = \int_0^\infty g(v)e^{-sv} dv \int_0^\infty u(\tau)e^{-s\tau} d\tau.$$

c'est-à-dire

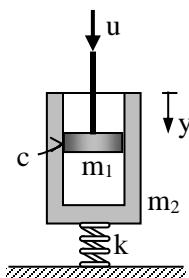
$$\boxed{y(s) = G(s)u(s)} \quad (1-37)$$

où  $G(s)$  et  $u(s)$  sont les transformées de Laplace des fonctions  $g(t)$  et  $u(t)$ . L'égalité (1-37) montre que la connaissance de  $G(s)$  permet de déterminer par simple multiplication algébrique la réponse  $y$  à toute entrée  $u$ .  $G(s)$  est appelé fonction de transfert du système considéré.

Pour  $u(t) = \delta(t)$ , on a  $u(s) = 1$  d'où  $y(s) = G(s)$  ce qui signifie que la fonction de transfert est la transformée de Laplace de la réponse à une impulsion de Dirac appelée *réponse impulsionale*. Cette réponse est donc la fonction  $g(t)$  introduite ci-dessus et qui caractérise le système.

### Exemple 1-10

L'entrée du système de la figure 1-10 est la force  $u$  appliquée au piston et sa sortie est le déplacement  $y$  du cylindre. La masse du piston est  $m_1$ , celle du cylindre est  $m_2$ , le ressort a une raideur  $k$  et le frottement entre le piston et le cylindre est visqueux de facteur  $c$ . Le piston comporte des orifices permettant à l'air de le traverser librement.



**Fig. 1-10** Mouvement du cylindre sous l'effet du frottement du piston

En posant  $v$  la vitesse du piston, la loi de Newton appliquée au piston et au cylindre conduit aux deux équations :

$$\begin{aligned} m_1 \dot{v} &= u - c(v - \dot{y}), \\ m_2 \ddot{y} &= -c(\dot{y} - v) - ky. \end{aligned}$$

Si le système est initialement inerte c.à.d. si  $v(0) = y(0) = \dot{y}(0) = 0$ , le passage aux transformées de Laplace des équations précédentes donne le système d'équations algébriques suivant :

$$\begin{aligned} (m_1 s + c)v(s) - c y(s) &= u(s) \\ -c v(s) + (m_2 s^2 + cs + k)y(s) &= 0 \end{aligned}$$

dont la solution en  $y(s)$  s'obtient en appliquant la formule de Cramer :

$$y(s) = \frac{\begin{vmatrix} m_1 s + c & u(s) \\ -c & 0 \end{vmatrix}}{(m_1 s + c)(m_2 s^2 + cs + k) - c^2 s} = G(s)u(s)$$

avec

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{c}{m_1 m_2 s^3 + c(m_1 + m_2)s^2 + m_1 ks + ck}.$$

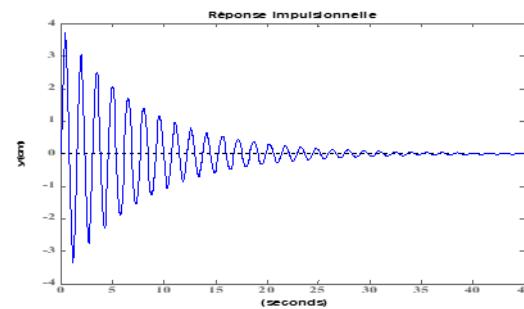
Pour

$$m_1 = 1\text{kg}, m_2 = 5\text{kg}, c = 10\text{N}/(\text{m/s}), k = 100\text{N/m},$$

$$G(s) = \frac{2}{s^3 + 12s^2 + 20s + 200}.$$

Afin de représenter à l'aide de Matlab la réponse (en cm) de ce système à une impulsion de Dirac, on écrit les instructions suivantes :

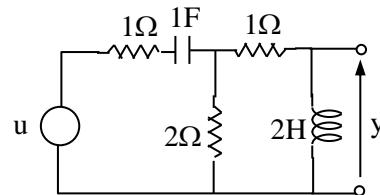
```
>> n = 200; d = [1 12 20 200];
>> impulse(n, d)
```



$G(s)$  n'est autre que la transformée de Laplace de cette réponse.

### EXERCICE 1-6

Déterminer la fonction de transfert  $G(s) = y(s)/u(s)$  du circuit suivant.



**Matrice de transfert.** Considérons maintenant un système linéaire à p entrées  $u_1, \dots, u_p$  et q sorties  $y_1, \dots, y_q$ . Si toutes les entrées sont nulles sauf  $u_k$  la réponse à la  $i^{\text{ème}}$  sortie est celle d'un système monovariable d'entrée  $u_k$  et de sortie  $y_i$ . En désignant par  $G_{ik}(s)$  la fonction de transfert de ce sous-système, la transformée de Laplace de la  $i^{\text{ème}}$  sortie quand seule la  $k^{\text{ème}}$  entrée n'est pas nulle est, d'après (1-37),  $y_i(s) = G_{ik}(s)u_k(s)$ . Comme le système global est linéaire, l'effet de toutes les entrées sur la  $i^{\text{ème}}$  sortie est la somme de leurs effets sur cette sortie. En d'autres termes,

$$y_i(s) = G_{1i}(s)u_1(s) + \dots + G_{pi}(s)u_p(s), \quad i = 1, \dots, q.$$

Ces q équations sont équivalentes à l'équation matricielle

$$y(s) = G(s)u(s)$$

avec

$$\begin{aligned} y(s) &= \begin{pmatrix} y_1(s) \\ \vdots \\ y_q(s) \end{pmatrix}, \quad u(s) = \begin{pmatrix} u_1(s) \\ \vdots \\ u_p(s) \end{pmatrix}, \\ \text{et } G(s) &= \begin{pmatrix} G_{11}(s) & \cdots & G_{1p}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{q1}(s) & \cdots & G_{qp}(s) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1-38)$$

C'est la matrice de transfert du système.

### Exemple 1-11

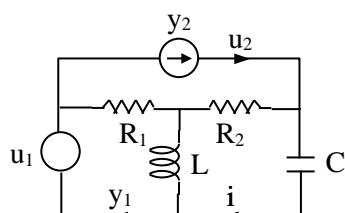


Fig. 1-11 Circuit à 3 mailles

Soient  $y_1$  le courant qui traverse le générateur de tension  $u_1$  et  $y_2$  la tension aux bornes du générateur de courant  $u_2$  et déterminons la matrice de transfert  $G(s)$  entre l'entrée  $u = (u_1 ; u_2)$  et la sortie  $y = (y_1 ; y_2)$ . Dans ce but, écrivons en transformée de Laplace les équations des trois mailles du circuit :

$$\begin{aligned} u_1 &= R_1(y_1 - u_2) + Ls(y_1 - i), \\ y_2 &= R_2(u_2 - i) + R_1(u_2 - y_1), \\ R_2(u_2 - i) + Ls(y_1 - i) - \frac{1}{Cs}i &= 0. \end{aligned}$$

Ces équations s'écrivent sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} R_1 + Ls & 0 & -Ls \\ R_1 & 1 & R_2 \\ -Ls & 0 & R_2 + Ls + \frac{1}{Cs} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + R_1 u_2 \\ (R_1 + R_2) u_2 \\ R_2 u_2 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice au premier membre est

$$\Delta = (R_1 + Ls)(R_2 + Ls + \frac{1}{Cs}) - L^2 s^2$$

et, d'après Cramer,

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} u_1 + R_1 u_2 & 0 & -Ls \\ (R_1 + R_2) u_2 & 1 & R_2 \\ R_2 u_2 & 0 & R_2 + Ls + \frac{1}{Cs} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\Delta} \left[ (u_1 + R_1 u_2)(R_2 + Ls + \frac{1}{Cs}) + R_2 Ls u_2 \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} R_1 + Ls & 0 & u_1 + R_1 u_2 \\ R_1 & 1 & (R_1 + R_2) u_2 \\ -Ls & 0 & R_2 u_2 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\Delta} [(R_1 + Ls)R_2 u_2 + Ls(u_1 + R_1 u_2)] \end{aligned}$$

et

$$y_2 = \frac{i}{Cs} - u_1.$$

La première colonne de la matrice de transfert  $G(s)$  s'obtient des expressions de  $y_1$  et  $y_2$  précédentes en annulant  $u_2$  et sa deuxième colonne s'obtient en annulant  $u_1$ . D'où

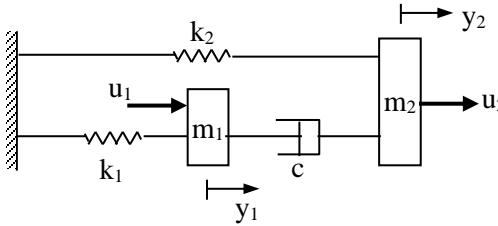
$$G(s) = \frac{1}{\pi(s)} \begin{pmatrix} LCs^2 + R_2 Cs + 1 & \pi(s) - Ls \\ Ls - \pi(s) & (R_1 + R_2)Ls + R_1 R_2 \end{pmatrix}$$

où

$$\pi(s) = \Delta.Cs = (R_1 + R_2)LCs^2 + (R_1 R_2 C + L)s + R_1.$$

**EXERCICE 1-7**

Le système suivant a deux entrées, les forces  $u_1$  et  $u_2$ , et deux sorties, les déplacements  $y_1$  et  $y_2$  des masses. Pour  $m_1 = 1 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 2 \text{ kg}$ ,  $k_1 = 1 \text{ N/m}$ ,  $k_2 = 3 \text{ N/m}$ , et  $c = 2 \text{ N/(m/s)}$ , déterminer la matrice de transfert de ce système.

**Équations d'état d'un système linéaire.**

Comme nous l'avons signalé au début du chapitre, un système est linéaire si les fonctions  $f$  et  $g$  de ses équations d'état et de sortie,  $\dot{x} = f(x, u)$ ,  $y = g(x, u)$ , sont toutes les deux linéaires. Par conséquent, si  $\{e_1, \dots, e_n, \dots, e_{n+p}\}$  est une base dans l'espace  $\mathbb{R}^{n+p}$ , on a :

$$\begin{aligned}\dot{x} = f(x, u) &= x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n) \\ &\quad + u_1 f(e_{n+1}) + \dots + u_p f(e_{n+p}), \\ y = g(x, u) &= x_1 g(e_1) + \dots + x_n g(e_n) \\ &\quad + u_1 g(e_{n+1}) + \dots + u_p g(e_{n+p})\end{aligned}$$

$x_i$  et  $u_i$  étant les composantes de  $x$  et  $u$  dans la base considérée. Ces équations peuvent se mettre sous la forme matricielle :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du\end{aligned}\tag{1-39}$$

où

$$\begin{aligned}A &= [f(e_1) \ \dots \ f(e_n)], \quad B = [f(e_{n+1}) \ \dots \ f(e_{n+p})], \\ C &= [g(e_1) \ \dots \ g(e_n)], \quad D = [g(e_{n+1}) \ \dots \ g(e_{n+p})].\end{aligned}$$

Les colonnes des matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont donc les images des vecteurs de base de  $\mathbb{R}^{n+p}$  par  $f$  et  $g$  et les dimensions de ces matrices sont respectivement  $n \times n$ ,  $n \times p$ ,  $q \times n$  et  $q \times p$ .

**Exemple 1-12**

Les énergies emmagasinées dans le circuit de la figure 1-11 se caractérisent par la tension  $x_1$  aux bornes de la capacité et par le courant  $x_2$  qui traverse l'inductance. Ce sont les variables d'état du système

puisque la connaissance de leurs valeurs initiales est nécessaire et suffisante pour déterminer la réponse  $y(t)$  à toute entrée  $u(t)$ . Les accroissements par unité de temps de ces variables (leurs dérivées) sont donnés par :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{1}{C} i, \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{L} [x_1 - R_2(u_2 - i)], \\ &= \frac{1}{L} [u_1 + R_1(u_2 - i - x_2)].\end{aligned}$$

Comme ces dérivées doivent être exprimées seulement en fonction des  $x_i$  et des  $u_i$ , il faut éliminer  $i$ . Or, des deux dernières équations, on tire

$$(R_1 + R_2)(u_2 - i) = x_1 + R_1 x_2 - u_1$$

ou

$$i = -\frac{x_1 + R_1 x_2 - u_1}{R_1 + R_2} + u_2$$

d'où

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{1}{C} \left[ -\frac{x_1 + R_1 x_2 - u_1}{R_1 + R_2} + u_2 \right], \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{L} \left[ \frac{R_1}{R_1 + R_2} x_1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} (R_1 x_2 - u_1) \right].\end{aligned}$$

De ces équations on déduit que

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{C(R_1 + R_2)} & -\frac{R_1}{C(R_1 + R_2)} \\ \frac{R_1}{L(R_1 + R_2)} & -\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} \end{pmatrix}, \\ B &= \begin{pmatrix} \frac{1}{C(R_1 + R_2)} & \frac{1}{C} \\ \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)} & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

D'autre part,

$$y_1 = x_2 + i = \frac{-x_1 + R_2 x_2 + u_1}{R_1 + R_2} + u_2,$$

$$y_2 = x_1 - u_1.$$

D'où

$$C = \frac{1}{R_1 + R_2} \begin{pmatrix} -1 & R_2 \\ R_1 + R_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1 + R_2} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**EXERCICE 1-8**

On considère le système de l'exercice 1-7. Définir ses variables d'état et déterminer les matrices A, B, C et D de ses équations d'état.

**Des équations d'état à la matrice de transfert.**

Pour un état initial  $x(0) = 0$ , la transformée de Laplace des équations d'état (1-39) est

$$\begin{aligned} sx(s) &= Ax(s) + Bu(s), \\ y(s) &= Cx(s) + Du(s). \end{aligned}$$

De la première équation on tire

$$x(s) = (sI - A)^{-1}Bu(s)$$

où I est la matrice unité. En remplaçant  $x(s)$  par son expression dans la deuxième équation, on déduit que

$$y(s) = G(s)u(s)$$

où

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (1-40)$$

est la matrice de transfert.

**Exemple 1-13**

Considérons les équations d'état du circuit de la figure 1-11 obtenues à l'exemple 1-12 et déterminons à partir de ces équations sa matrice de transfert. On commence par calculer

$$(sI - A)^{-1} = \text{Adj}(sI - A)/\det(sI - A).$$

Or,

$$(sI - A) = \begin{pmatrix} \frac{C(R_1 + R_2)s + 1}{C(R_1 + R_2)} & \frac{R_1}{C(R_1 + R_2)} \\ -\frac{R_1}{L(R_1 + R_2)} & \frac{L(R_1 + R_2)s + R_1R_2}{L(R_1 + R_2)} \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice est le polynôme

$$\Delta = \frac{1}{LC} \left[ LCs^2 + \frac{(R_1R_2C + L)s}{R_1 + R_2} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right]$$

et son adjoint est la matrice

$$\text{Adj} = \begin{pmatrix} \frac{L(R_1 + R_2)s + R_1R_2}{L(R_1 + R_2)} & -\frac{R_1}{C(R_1 + R_2)} \\ \frac{R_1}{L(R_1 + R_2)} & \frac{C(R_1 + R_2)s + 1}{C(R_1 + R_2)} \end{pmatrix}.$$

Il reste à appliquer attentivement la formule (1-40),

$$G(s) = \frac{1}{\Delta} [C(\text{Adj})B + \Delta D],$$

pour vérifier que le résultat est le même que celui obtenu à l'exemple 1-11 :

$$G(s) = \frac{1}{\pi(s)} \begin{pmatrix} LCs^2 + R_2Cs + 1 & \pi(s) - Ls \\ Ls - \pi(s) & (R_1 + R_2)Ls + R_1R_2 \end{pmatrix}$$

où

$$\pi(s) = (R_1 + R_2)LCs^2 + (R_1R_2C + L)s + R_1$$

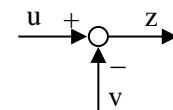
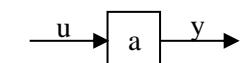
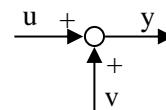
**EXERCICE 1-9**

Retrouver la matrice de transfert de l'exercice 1-7 à partir des équations d'état de l'exercice 1-8.

**Diagramme bloc et graphe de fluence.** Au lieu d'écrire les équations liant les variables du système, il est possible de représenter graphiquement ces relations et d'en déduire la matrice de transfert. Deux types de représentation graphique sont employés : le diagramme bloc et le graphe de fluence dont les conventions sont les suivantes.

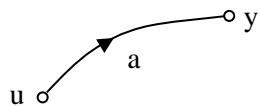
**Conventions du diagramme bloc**

- On représente la multiplication d'un signal u par une constante ou par une fonction de transfert a ( $y = a.u$ ) par le symbole graphique ci-contre.
- Les représentations graphiques de l'addition,  $y = u + v$ , et de la soustraction,  $z = u - v$ , sont les suivantes :



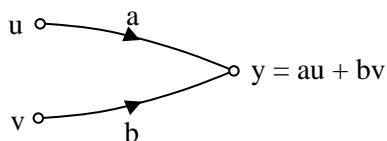
### Conventions du graphe de fluence

- La multiplication d'un signal  $u$  par une constante ou par une fonction de transfert  $a$  ( $y = a.u$ ) se représente par le symbole graphique suivant :



La constante ou la fonction de transfert  $a$  est appelé le gain de l'arc. L'origine  $u$  de l'arc est son entrée et l'extrémité  $y$  sa sortie.

- Un nœud est un point auquel aboutissent un, deux ou plusieurs arcs ; il représente la somme algébrique des réponses de ces arcs et il peut être le départ d'un ou de plusieurs autres arcs.



### Exemple 1-14

Considérons le circuit de la figure 1-12 dont l'entrée est la tension  $u$  et la sortie est la tension  $y$ .

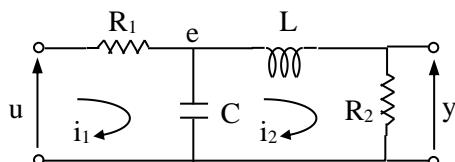
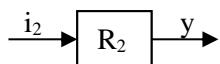
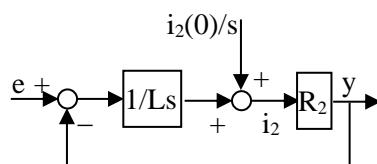


Fig. 1-12 Circuit à 2 mailles

Partant de la sortie, on a  $y = R_2 i_2$ . La représentation en diagramme bloc de cette relation est la suivante.

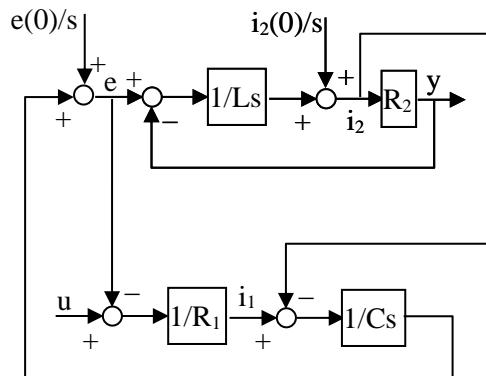


Or, d'après (1-26),  $i_2 = (e - y)/Ls + i_2(0)/s$  qui, connectée à la relation précédente, se représente par

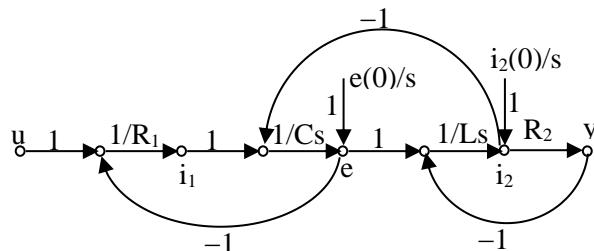


En représentant  $e$  en fonction de  $i_1 - i_2$  puis  $i_1$  en

fonction de  $u - e$ , on arrive au diagramme bloc suivant.



La représentation par graphe de fluence de ce même circuit est la suivante.



À noter que si le système n'est pas initialement inerte, il faut ajouter à la sortie d'une opération d'intégration la transformée de Laplace de la valeur initiale de cette sortie.

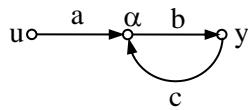
Le diagramme bloc montre peut être mieux l'interaction entre les éléments du système mais le graphe est plus simple à construire et occupe moins de place. Dans ce qui suit de ce paragraphe, nous donnons la règle de Mason qui permet de déduire la fonction de transfert d'un système linéaire à partir de son graphe. Cette même règle s'applique aussi au diagramme bloc.

**Du graphe à la fonction de transfert (Règle de Mason).** Avant d'énoncer cette règle nous allons la justifier à travers certains cas particuliers où la terminologie suivante sera employée.

- On dit que deux arcs sont adjacents si l'extrémité du premier est confondue avec l'origine du second.

- Un chemin entre une entrée  $u$  et une sortie  $y$  est une suite d'arcs adjacents ne passant pas deux fois par le même noeud. L'entrée  $u$  est l'origine du premier arc, la sortie  $y$  est l'extrémité du dernier.
- Le produit des gains des arcs constituant un chemin est le gain de ce chemin qui sera désigné par la lettre  $C$  avec ou sans indice.
- Une boucle est un chemin dont l'origine du premier arc est confondue avec l'extrémité du dernier. Son gain sera désigné par la lettre  $B$  avec ou sans indice.

a) Considérons d'abord un graphe à une seule boucle.



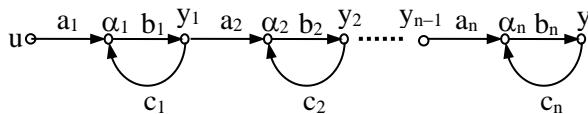
$$\text{On a : } y = b\alpha = b(cy + au)$$

d'où

$$\frac{y}{u} = \frac{C}{1 - B}. \quad (1-41)$$

$C = ab$  est le gain du chemin entre l'entrée  $u$  et la sortie  $y$  et  $B = bc$  est le gain de la boucle.

b) Pour le graphe suivant



$$\text{on a : } y/u = (y/y_{n-1})(y_{n-1}/y_{n-2}) \dots (y_1/u).$$

D'où, d'après (1-41),

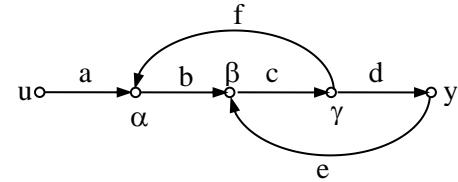
$$\frac{y}{u} = \prod_{i=1}^n \frac{a_i b_i}{1 - B_i} = \frac{C}{\Delta} \quad (1-42)$$

où  $C = \prod a_i b_i$  est le gain du chemin joignant l'entrée  $u$  et la sortie  $y$  et, comme  $\Delta = \prod(1 - B_i)$ ,

$$\boxed{\Delta = 1 - \sum_i B_i + \sum_{i \neq j} B_i B_j - \sum_{i \neq j \neq k} B_i B_j B_k + \dots} \quad (1-43)$$

$B_i = b_i c_i$  étant le gain de la  $i^{\text{ème}}$  boucle.

c) Les boucles du graphe précédent sont disjointes deux à deux n'ayant pas de noeuds en commun. Le graphe suivant comporte deux boucles qui se touchent ayant en commun les noeuds  $\beta$  et  $\gamma$ .



On a :

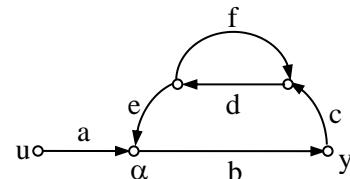
$$\begin{aligned} y &= \frac{bcd}{1 - cde} \alpha \quad \text{et} \quad \alpha = f\gamma + au = f \frac{y}{d} + au \\ \Rightarrow (1 - \frac{bcf}{1 - cde})y &= \frac{bcda}{1 - cde} u. \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{y}{u} = \frac{C}{1 - B_1 - B_2} = \frac{C}{\Delta} \quad (1-44)$$

qui a la même forme que (1-43) à part que dans  $\Delta$  le produit des boucles qui se touchent,  $B_1 = cde$  et  $B_2 = bcf$ , est annulé.

d) Jusqu'ici nous n'avons considéré que des boucles qui touchent le chemin joignant l'entrée à la sortie. Le graphe suivant comporte une boucle qui ne touche pas ce chemin.



On a :

$$y = b\alpha = b(gy + au)$$

où  $g = cde/(1 - df)$  est le gain du sous-graphe joignant  $y$  à  $\alpha$ . D'où

$$(1 - \frac{bcde}{1 - df})y = ab.u$$

ou

$$\frac{y}{u} = \frac{ab(1 - B_1)}{1 - B_1 - B_2} = \frac{C\delta}{\Delta}, \quad . \quad (1-45)$$

$$B_1 = df, \quad B_2 = bcde, \quad \delta = 1 - B_1.$$

La fonction de transfert  $y/u$  a donc la même expression que (1-44) mais son numérateur est multiplié par le terme  $\delta$  qui s'obtient de  $\Delta$  en annulant la boucle qui touche le chemin entre  $u$  et  $y$ .

On peut maintenant énoncer la règle suivante :

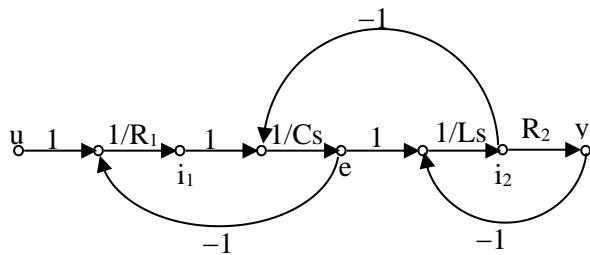
**Règle 1.** La fonction de transfert d'un graphe ayant un seul chemin joignant l'entrée  $u$  à la sortie  $y$  est donnée par

$$\boxed{\frac{y}{u} = \frac{C\delta}{\Delta}} \quad (1-46)$$

- $C$  est le gain du chemin joignant  $u$  à  $y$ .
- $\Delta$  est de la forme que (1-43) où l'on annule les produits des gains des boucles qui se touchent.
- $\delta$  s'obtient de  $\Delta$  en annulant les gains des boucles qui touchent le chemin joignant  $u$  à  $y$ .

### Exemple 1-15

Déterminons la fonction de transfert du circuit de l'exemple 1-14 à partir de son graphe construit dans cet exemple. Par définition de la fonction de transfert, nous devons supposer que le système est initialement inerte c.à.d.  $e(0) = i(0) = 0$ . Le graphe de ce circuit se réduit donc au suivant.



Le seul chemin entre l'entrée  $u$  et la sortie  $y$  a pour gain

$$C = (1/R_1)(1/C_s)(1/L_s)R_2 = \frac{R_2}{R_1 C L s^2}.$$

D'autre part, ce graphe possède 3 boucles de gains

$$B_1 = -\frac{R_2}{L_s}, \quad B_2 = -\frac{1}{L C s^2}, \quad B_3 = -\frac{1}{R_1 C s}.$$

Les boucles  $B_1$  et  $B_3$  sont disjointes mais chacune touche  $B_2$ . D'où

$$\Delta = 1 - (B_1 + B_2 + B_3) + B_1 B_3.$$

Toutes ces boucles touchent le chemin  $C$ , d'où  $\delta = 1$

La fonction de transfert est donc la suivante :

$$\begin{aligned} \frac{y}{u} &= \frac{R_2 / R_1 C L s^2}{1 + R_2 / L s + 1 / L C s^2 + 1 / R_1 C s + R_2 / R_1 C L s^2} \\ &= \frac{R_2}{R_1 C L s^2 + (R_1 R_2 C + L)s + (R_1 + R_2)}. \end{aligned}$$

Pour un graphe ayant plusieurs chemins entre l'entrée  $u$  et la sortie  $y$ , la règle 1 se généralise à la suivante.

**Règle 2.** La fonction de transfert d'un graphe ayant plusieurs chemins joignant l'entrée  $u$  à la sortie  $y$  est donnée par

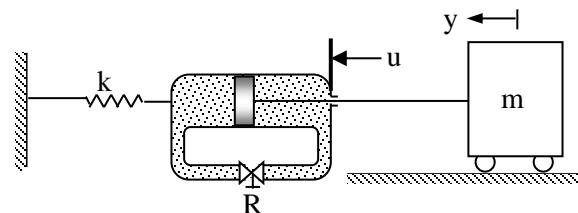
$$\boxed{\frac{y}{u} = \frac{\sum C_i \delta_i}{\Delta}} \quad (1-47)$$

où

- $\Delta$  a la même signification que dans la règle 1.
- $C_i$  est le gain du  $i^{\text{ème}}$  chemin joignant  $u$  à  $y$ .
- $\delta_i$  s'obtient de  $\Delta$  en annulant les gains des boucles qui touchent le  $i^{\text{ème}}$  chemin.

### EXERCICE 1-10

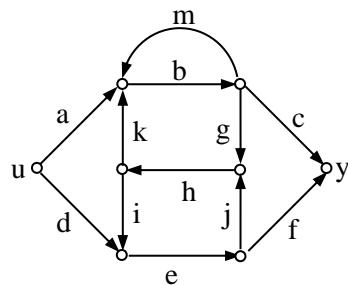
L'entrée du système représenté ci-dessous est la force  $u$  appliquée au cylindre et sa sortie est le déplacement  $y$  du chariot. La résistance à l'écoulement à travers le robinet est  $R = 10^9 \text{ Pa}/(\text{m}^3/\text{s})$ , la section du cylindre est  $S = 10^{-3} \text{ m}^2$ , le facteur du frottement visqueux entre le piston et le cylindre est  $c = 200 \text{ N}/(\text{m}/\text{s})$ , la raideur du ressort est  $500 \text{ N/m}$ , la masse du chariot est  $m = 200 \text{ kg}$  et on néglige les masses des autres éléments. Construire un graphe liant  $u$  à  $y$  et déduire la fonction de transfert de ce système.



**Exemple 1-16**

Le graphe suivant comporte quatre chemins entre l'entrée  $u$  et la sortie  $y$  dont les gains sont

$$C_1 = qbc; C_2 = abghief, C_3 = def, C_4 = dejhkbc.$$



Il a 3 boucles de gains

$$B_1 = bghk, \quad B_2 = ejhi, \quad B_3 = bm.$$

$B_2$  et  $B_3$  sont disjointes et  $B_1$  touchent ces deux boucles. D'où

$$\Delta = 1 - (B_1 + B_2 + B_3) + B_2 B_3.$$

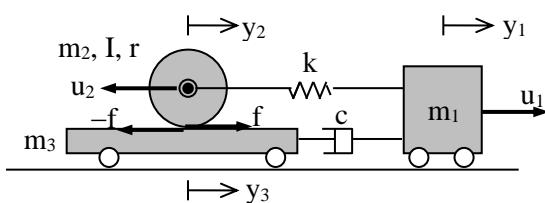
Comme le chemin  $C_1$  ne touche pas  $B_2$  et  $C_3$  ne touche ni  $B_1$  ni  $B_3$  tandis que chacune des chemins  $C_2$  et  $C_4$  touchent toutes les boucles, on a :

$$\delta_1 = 1 - B_2, \quad \delta_2 = 1, \quad \delta_3 = 1 - B_1 - B_3, \quad \delta_4 = 1.$$

Par conséquent,

$$\frac{y}{u} = \frac{C_1(1 - B_2) + C_2 + C_3(1 - B_1 - B_3) + C_4}{1 - (B_1 + B_2 + B_3) + B_2 B_3}.$$

L'élément  $G_{ik}(s)$  de la matrice de transfert d'un graphe à plusieurs entrées et plusieurs sorties s'obtient en annulant toutes les entrées sauf la  $k^{\text{ème}}$  et en ne considérant que la  $i^{\text{ème}}$  sortie. Nous poserons  $C_{ik}^j \delta_{ik}^j$  le terme du numérateur relatif au  $j^{\text{ème}}$  chemin entre l'entrée  $u_k$  et la sortie  $y_i$ .

**Exemple 1-17**


Les entrées de ce système sont les forces  $u_1$  et  $u_2$  et ses sorties sont les déplacements  $y_1$ ,  $y_2$  et  $y_3$ . Sur la remorque, le rouleau ne glisse pas en roulant et le moment de la force  $f$  qu'exerce la remorque sur le rouleau est  $fr = -I\ddot{\theta}$  où  $\theta = (y_2 - y_3)/r$  d'où  $f = (I/r^2)(\ddot{y}_3 - \ddot{y}_2)$ . La loi de Newton appliquée sur chacune des trois masses conduit aux équations suivantes.

$$C_1 = abc, \quad C_2 = abghief,$$

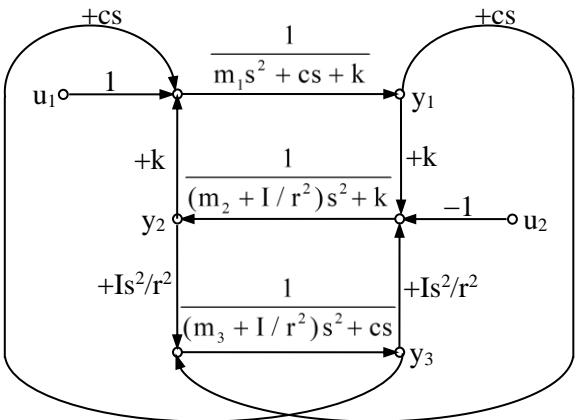
$$C_3 = def, \quad C_4 = dejhkbc.$$

$$(m_1 s^2 + cs + k)y_1 = csy_3 + ky_2 + u_1,$$

$$[(m_2 + I/r^2)s^2 + k]y_2 = (I/r^2)s^2y_3 + ky_1 - u_2,$$

$$[(m_3 + I/r^2)s^2 + cs]y_3 = (I/r^2)s^2y_2 + csy_1.$$

Au lieu de déterminer la matrice de transfert en résolvant les équations précédentes par la méthode de Cramer (comme nous l'avons fait dans les exemples 1-10 et 1-11), nous allons la déterminer à partir du graphe de ces équations représenté par la figure suivante.



Ce graphe comporte 5 boucles de gains

$$B_1 = \frac{k^2}{D_1 D_2}, \quad B_2 = \frac{I^2 s^4}{r^4 D_2 D_3},$$

$$B_3 = \frac{c^2 s^2}{D_1 D_3}, \quad B_4 = B_5 = \frac{I c k s^3}{r^2 D_1 D_2 D_3},$$

où

$$D_1 = m_1 s^2 + cs + k,$$

$$D_2 = (m_2 + I/r^2)s^2 + k,$$

$$D_3 = (m_3 + I/r^2)s^2 + cs.$$

Chacune de ces boucles touchant toutes les autres,

$$\Delta = 1 - \sum_{i=1}^5 B_i = \frac{\pi(s)}{D_1 D_2 D_3} \quad \text{avec}$$

$$\pi(s) = D_1 D_2 D_3 - k^2 D_3 - \frac{I^2 s^4}{r^4} D_1 - c^2 s^2 D_2 - \frac{2 I c k s^3}{r^2}.$$

D'autre part, en considérant les chemins de chaque entrée à chaque sortie, on a :

$$C_{11}\delta_{11} = \frac{1}{D_1}(1 - B_2), \quad C_{22}\delta_{22} = -\frac{1}{D_2}(1 - B_3),$$

$$C_{21}^1\delta_{21}^1 + C_{21}^2\delta_{21}^2 = \frac{k}{D_1 D_2} + \frac{I c s^3}{r^2 D_1 D_2 D_3}$$

$$C_{12}^1\delta_{12}^1 + C_{12}^2\delta_{12}^2 = -\frac{k}{D_1 D_2} - \frac{I c s^3}{r^2 D_1 D_2 D_3},$$

$$C_{31}^1\delta_{31}^1 + C_{31}^2\delta_{31}^2 = \frac{c s}{D_1 D_3} + \frac{I k s^2}{r^2 D_1 D_2 D_3},$$

$$C_{32}^1\delta_{32}^1 + C_{32}^2\delta_{32}^2 = -\frac{I s^2}{r^2 D_2 D_3} - \frac{k c s}{D_1 D_2 D_3}.$$

La matrice de transfert est la suivante où l'élément ( $i, k$ ) est  $\sum_j C_{ik}^j \delta_{ik}^j / \Delta$ :

$$G(s) = \frac{1}{\pi(s)} \begin{pmatrix} D_2 D_3 (1 - B_2) & -k D_3 - \frac{I c s^3}{r^2} \\ k D_3 + \frac{I c s^3}{r^2} & -D_1 D_3 (1 - B_3) \\ D_2 c s + \frac{I k s^2}{r^2} & -D_1 \frac{I s^2}{r^2} - k c s \end{pmatrix}.$$

Il reste à remplacer les termes par leurs expressions et à simplifier.

#### EXERCICE 1-11

Retrouver le résultat de l'exemple précédent en appliquant la méthode de Cramer.

#### EXERCICE 1-12

Construire le graphe des équations du circuit de l'exemple 1-11 et retrouver sa matrice de transfert.

De l'exemple 1-17 et des exercices précédents, le lecteur peut constater que l'obtention de la matrice de transfert par la méthode de Cramer est souvent plus simple que par celle de Mason. Cependant quand le système est défini par son graphe, comme c'est souvent le cas en automatique, la règle de Mason permet d'obtenir directement la fonction de transfert sans passer par la résolution des équations correspondantes à ce graphe.

## 1-3 RÉALISATION ÉLECTRONIQUE

Nous donnons dans ce paragraphe une technique permettant de réaliser une fonction de transfert par un circuit électronique. Une des utilités de cette technique est la construction d'un organe de commande électronique. En effet, il s'agit de réaliser physiquement cet organe une fois sa fonction de transfert déterminée analytiquement par des méthodes qui seront expliquées dans les prochains chapitres.

L'amplificateur opérationnel (ampli-op) est l'élément de base de la réalisation électronique d'une fonction de transfert. Sa description étant détaillée dans un cours d'électronique, nous nous limitons ici à donner ses propriétés essentielles.

**Amplificateur Opérationnel.** C'est un circuit intégré constitué d'une vingtaine de transistors connectés à un grand nombre de résistances. Il a deux entrées désignées par  $-$  et  $+$  sur lesquelles on applique des tensions  $e_1$  et  $e_2$ , sa sortie est une tension  $v$  et il est alimenté sous une tension constante  $V^+ - V^-$  de quelques volts. Son fonctionnement est celui du circuit équivalent représenté par la figure 1-13 où  $i_e$  et  $i_s$  sont les courants d'entrée et de sortie de l'ampli-op. On définit

- son impédance d'entrée par

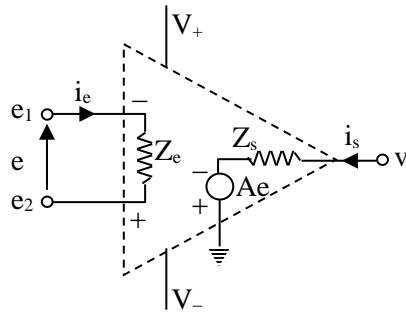
$$Z_e = \frac{e_1 - e_2}{i_e} \quad \text{quand } i_s = 0,$$

- son impédance de sortie par

$$Z_s = \frac{v}{i_s} \quad \text{quand } e = e_1 - e_2 = 0 \text{ et}$$

- son gain en tension par

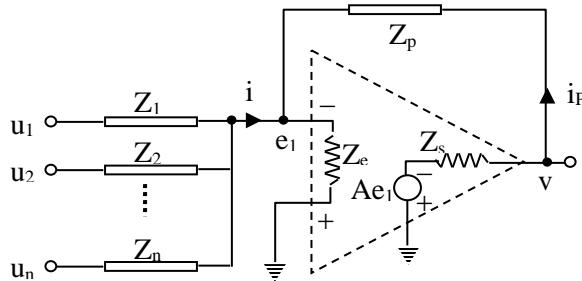
$$A = -\frac{v}{e} \text{ quand } i_s = 0.$$



**Fig. 1-13** Circuit équivalent d'un ampli-op

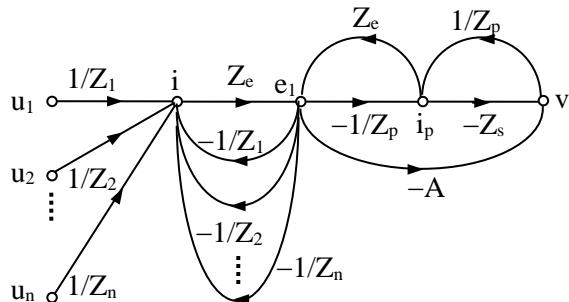
Pour les ampli-op. usuels, les paramètres  $Z_e$ ,  $Z_s$  et  $A$  sont presque constants dans une large bande de fréquences (de quelques kHz) du signal d'entrée  $e$ . Le gain  $A$  est très grand, généralement supérieur à  $10^5$  et l'impédance d'entrée  $Z_e$  est beaucoup plus grande que l'impédance de sortie  $Z_s$  (exemple :  $Z_e = 1 \text{ M}\Omega$  et  $Z_s = 100 \Omega$ ).

Considérons le circuit de la figure 1-14 constitué d'un amplificateur opérationnel auquel sont connectées  $n + 1$  impédances  $Z_1, \dots, Z_n$  et  $Z_p$ .



**Fig. 1-14** Impédances connectées à un ampli-op.

Les relations entre les variables de ce circuit sont représentées par le graphe suivant :



De ce graphe on déduit que la fonction de transfert entre une entrée  $u_k$  et la sortie  $v$  est donnée par

$$\frac{v}{u_k} = \frac{\frac{Z_e Z_s}{Z_k Z_p} - \frac{Z_e}{Z_k} A}{1 + \frac{Z_s}{Z_p} + \frac{Z_e}{Z_p} A + \sum_{k=1}^n \left( \frac{Z_e}{Z_k} + \frac{Z_e Z_s}{Z_k Z_p} \right)}.$$

Si toutes les impédances extérieures  $Z_p$  et  $Z_k$  sont choisies entre  $Z_s$  et  $Z_e$  telles que  $|Z_p/Z_k| \ll A$ , on peut vérifier que le premier terme du numérateur sera négligeable devant  $Z_e A / Z_k$  et que, devant  $Z_e A / Z_p$ , tous les autres termes du dénominateur seront négligeables. D'où  $v/u_k = -Z_p / Z_k$  et, par superposition des effets de toutes les entrées, on arrive à la relation générale suivante :

$$v = -Z_p \sum_{k=1}^n \frac{1}{Z_k} u_k. \quad (1-48)$$

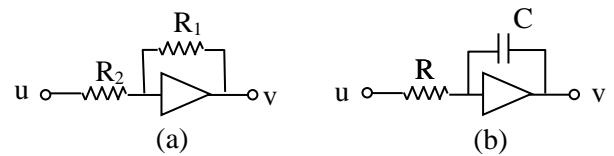
Ce résultat peut être interprété en remarquant que la tension  $v$  étant limitée par la tension d'alimentation, les très grandes valeurs du gain  $A$  et de l'impédance d'entrée  $Z_e$  impliquent que la tension d'entrée  $e = e_1$  et le courant  $i_e$  qui pénètre dans l'ampli-op. sont presque nuls. Par conséquent,

$$i_p = \frac{v}{Z_p} = -i = -\sum_{k=1}^n \frac{u_k}{Z_k}$$

d'où (1-48). De cette équation, on déduit les cas particuliers suivants :

a) Le circuit de la figure 1-15a où le triangle est une représentation simplifiée de l'ampli-op. de la figure 1-14 (d'entrée  $e = e_1$  et de sortie  $v$ ) est un amplificateur avec inversion de signe car pour  $Z_p = R_1$  et  $Z_1 = R_2$ , (1-48) se réduit à  $v = -(R_1/R_2)u$ .

b) De même, pour  $n = 1$ ,  $Z_p = 1/Cs$  et  $Z_1 = R$ , on a :  $v = -u/RC$  d'où le circuit de la figure 1-15b est un intégrateur de  $-u$  par une constante  $1/RC$ .



**Fig. 1-15** Circuit d'un inverseur (a) et d'un intégrateur (b)

**Réalisation d'une fonction de transfert.** En suivant la méthode décrite dans l'exemple suivant, il est toujours possible de construire une réalisation électronique d'une fonction de transfert rationnelle par combinaison d'intégrateurs et d'amplificateurs.

### Exemple 1-18

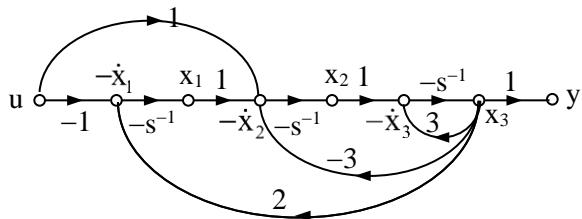
Soit la fonction de transfert

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{s+1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 2}.$$

1) On commence par diviser le numérateur et le dénominateur par le terme du dénominateur de plus grande puissance :

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{s^{-2} + s^{-3}}{1 + 3s^{-1} + 3s^{-2} + 2s^{-3}}.$$

2) On construit un graphe ayant cette fonction de transfert. C'est le cas d'un graphe à 3 boucles de gains  $-3s^{-1}$ ,  $-3s^{-2}$  et  $-2s^{-3}$  qui se touchent et deux chemins de gains  $s^{-2}$  et  $s^{-3}$  touchant chacun toutes les boucles. Ces conditions sont vérifiées par le graphe suivant où toutes les boucles et tous les chemins passent par l'avant dernier nœud  $x_3$ .



Les arcs de gain  $-s^{-1}$  représentent des intégrateurs. Si le signal de sortie d'un tel arc est  $x_i$ , son entrée est alors  $-\dot{x}_i$  (l'opposée de la dérivée de  $x_i$ ). On déduit du graphe les équations d'état suivantes :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2x_3 + u, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + 3x_3 - u, \\ \dot{x}_3 &= -x_2 - 3x_3\end{aligned}$$

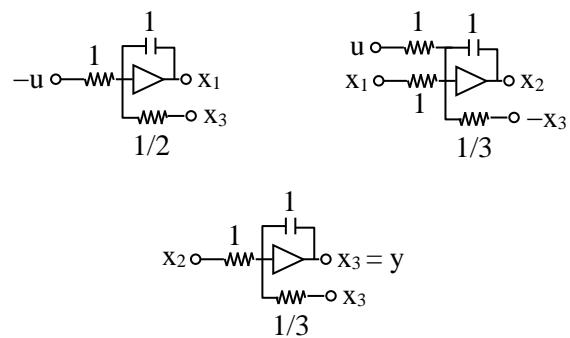
et  $y = x_3$ .

On a donc là un moyen d'associer des équations d'état à une fonction de transfert.

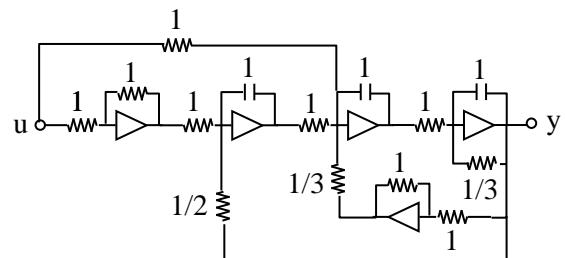
3) On écrit la transformée de Laplace des équations précédentes sous la forme de la relation (1-48) relative au circuit de la figure 1-14 avec  $Z_p = 1/s$ :

$$\begin{aligned}x_1 &= -\frac{1}{s} \left( \frac{1}{1/2} x_3 + \frac{1}{1} (-u) \right), \\ x_2 &= -\frac{1}{s} \left( \frac{1}{1} x_1 + \frac{1}{1/3} (-x_3) + \frac{1}{1} u \right), \\ x_3 &= -\frac{1}{s} \left( \frac{1}{1} x_2 + \frac{1}{1/3} x_3 \right), \\ \text{et } y &= x_3.\end{aligned}$$

Les circuits qui correspondent à ces relations sont donc les suivants où les capacités sont en  $\mu F$  et les résistances en  $M\Omega$  (on peut multiplier les valeurs de la capacité et des résistances à l'extérieur d'un ampli op par une même constante)



4) Il ne reste qu'à utiliser des inverseurs pour obtenir  $-u$  et  $-x_3$  puis à connecter les différents circuits par les bornes de même nom pour obtenir la réalisation électronique suivante de  $G(s)$ .



Bien que la méthode de l'exemple précédent est systématique, applicable à toute fonction de transfert rationnelle, et permet de mesurer les variables d'état

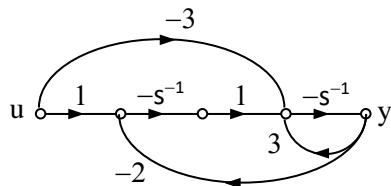
aux sorties des intégrateurs, elle est souvent non économique en nombre d'ampli-op.

### Exemple 1-19

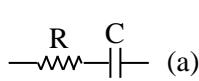
Considérons la fonction de transfert

$$G(s) = \frac{y}{u} = \frac{3s}{(s+1)(s+2)} = \frac{3s^{-1}}{1 + 3s^{-1} + 2s^{-2}}. \\ = [3/(s+1)]/[(s+2)/s].$$

En représentant le graphe de cette fonction :

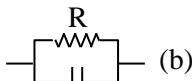


on constate que la méthode de l'exemple 1-18 conduit à un circuit ayant 2 intégrateurs et deux inverseurs, soit 4 ampli-op. Or, en remarquant que les impédances des montages (a) et (b) suivants



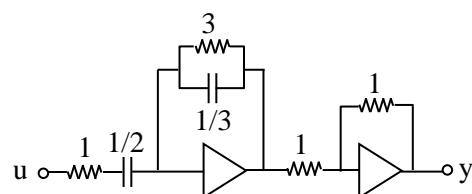
sont

$$(a) \rightarrow \frac{RCs+1}{Cs},$$



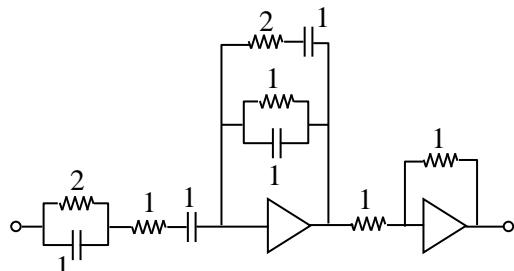
$$(b) \rightarrow \frac{R}{RCs+1},$$

Le circuit suivant réalise  $G(s)$  avec 2 ampli-op. au lieu de 4.



### EXERCICE 1-12

Déterminer la fonction de transfert du circuit suivant, représenter son graphe et construire sa réalisation à partir de ses équations d'état.



## 1-4 LINÉARISATION

La plupart des systèmes qu'on rencontre dans les applications sont non linéaires mais souvent leur comportement quand ils sont intégrés dans un système de commande automatique peut être décrit par des équations linéaires. Pour mettre ce fait en évidence, considérons les équations d'état

$$\dot{x}_r = f(x_r, u_r), \quad y_r = g(x_r, u_r) \quad (1-48)$$

lant l'entrée, l'état et la sortie effectifs d'un système non linéaire invariant et supposons qu'il s'agit de maintenir la réponse réelle  $y_r(t)$  aussi voisine que possible d'une réponse désirée  $y_d(t)$ . Il est évident que cette réponse  $y_d(t)$  doit être réalisable c'est-à-dire qu'il doit exister une entrée  $u_d(t)$  et un état  $x_d(t)$  qui vérifient avec  $y_d(t)$  les équations d'état du système c.à.d.

$$\dot{x}_d = f(x_d, u_d), \quad y_d = g(x_d, u_d). \quad (1-49)$$

Si le système est bien commandé l'écart  $y = y_r - y_d$  entre la réponse désirée et la réponse effective sera petit et il en est de même des écarts  $u = u_r - u_d$  et  $x = x_r - x_d$ . Ce sont ces écarts que l'automaticien cherche à les maintenir aussi petits que possible malgré l'imprécision du modèle et la présence des perturbations. Leurs équations s'obtiennent en retranchant (1-49) de (1-48) ce qui donne :

$$\dot{x} = \dot{x}_r - \dot{x}_d = f(x_r, u_r) - f(x_d, u_d),$$

$$y = y_r - y_d = g(x_r, u_r) - g(x_d, u_d).$$

Ces équations vectorielles sont équivalentes aux équations scalaires suivantes :

$$\dot{x}_i = f_i(x_r, u_r) - f_i(x_d, u_d), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1-50)$$

$$y_j = g_j(x_r, u_r) - g_j(x_d, u_d), \quad j = 1, \dots, q,$$

où  $n$  est le nombre des variables d'état et  $q$  est le nombre des sorties. Rappelons que la différentielle d'une fonction  $h(z)$ ,  $z = [z_1 \dots z_m] \in \mathbb{R}^m$  est définie par

$$\begin{aligned} dh &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} [h(z + \Delta z) - h(z)] \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[ \left. \frac{\partial h}{\partial z_i} \right|_z \Delta z_1 + \dots + \left. \frac{\partial h}{\partial z_m} \right|_z \Delta z_m \right] \end{aligned} \quad (1-51)$$

à condition que  $h$  soit dérivable au point  $z$  par rapport à chacune de ses variables. Par conséquent, si les écarts  $x = x_r - x_d$  et  $u = u_r - u_d$  sont faibles, on peut approximer les équations (1-50) par les suivantes :

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\delta f_i}{\delta x_k} \Big|_{p_f} x_k + \sum_{k=1}^p \frac{\delta f_i}{\delta u_k} \Big|_{p_f} u_k, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$y_j = \sum_{k=1}^n \frac{\delta g_j}{\delta x_k} \Big|_{p_f} x_k + \sum_{k=1}^p \frac{\delta g_j}{\delta u_k} \Big|_{p_f} u_k, \quad i = 1, \dots, q,$$

où les dérivées partielles sont calculées au point  $p_f = (x_d, u_d)$  appelé *point de fonctionnement* du système. En employant la notation matricielle, les équations précédentes prennent la forme (1-39) des équations d'état d'un système linéaire,

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du,$$

où les matrices  $A$  et  $B$  sont ici les jacobiens de  $f$  par rapport à  $x$  et  $u$ , calculés au point  $p_f$  :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1} & \dots & \frac{\delta f_1}{\delta x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta f_n}{\delta x_1} & \dots & \frac{\delta f_n}{\delta x_n} \end{pmatrix}_{p_f}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta u_1} & \dots & \frac{\delta f_1}{\delta u_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta f_n}{\delta u_1} & \dots & \frac{\delta f_n}{\delta u_p} \end{pmatrix}_{p_f}.$$

De même, les matrices  $C$  et  $D$  sont les jacobiens de  $g$  par rapport à  $x$  et  $u$ , calculés aussi au point  $p_f$ .

Ces matrices sont constantes (système invariant) si  $p_f$  est fixe c.à.d. s'il s'agit d'une commande de régulation ( $y_d = c^{te}$ ) et elles dépendent du temps (système variant) si  $p_f$  est variable c.à.d. s'il s'agit d'une commande de poursuite ( $y_d = y_d(t)$  variable).

De la même manière, tenant compte de (1-51), la linéarisation d'une équation entrée-sortie,

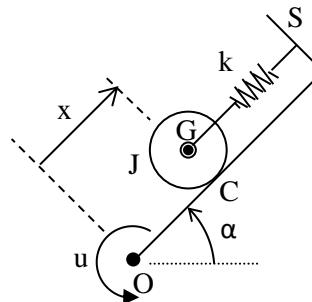
$$h_i(y_r, \dot{y}_r, \ddot{y}_r, \dots, u_r, \dot{u}_r, \ddot{u}_r, \dots) = 0$$

autour d'un point de fonctionnement

$$p_f = (y_d, \dot{y}_d, \ddot{y}_d, \dots, u_d, \dot{u}_d, \ddot{u}_d, \dots)$$

s'obtient à partir de  $dh_i = 0$  en approximant  $dh_i$  par  $\Sigma(\delta h_i / \delta z_k)_{p_f} z_k$  où  $z_k$  désigne l'écart du  $k^{\text{ème}}$  argument de  $h_i$  de sa valeur désirée.

### Exemple 1-20



Une roue de moment d'inertie  $J$ , de masse  $m$  et de rayon  $R$  peut tourner autour de son axe  $G$  avec un frottement visqueux de facteur  $c_1$  pour rouler sans glisser le long du plan du support  $S$ . L'axe de la roue est lié au support par un ressort de raideur  $k$ . Un couple  $u$  tourne  $S$  autour d'une articulation  $O$  où le frottement est visqueux de facteur  $c_2$ . On suppose que cette rotation  $\alpha$  est toujours comprise entre  $-\pi/2$  et  $\pi/2$  et on néglige la masse du support. Quand le ressort est au repos (ni tendu, ni comprimé), la distance entre  $O$  et le point de contact  $C$  de la roue avec le plan est  $a$ .

#### Mise en équations

Employons la méthode de Lagrange pour déterminer les équations liant le couple  $u$  à la rotation  $\alpha$  du support et à la distance  $x$  entre  $O$  et  $C$ . Rappelons que les énergies, cinétique  $W_c$  et potentielle  $W_p$ , du système sont liées aux efforts non conservatifs par les équations

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\delta W_c}{\delta \dot{q}_i} \right) - \frac{\delta W_c}{\delta q_i} + \frac{\delta W_p}{\delta q_i} = e_i \quad i = 1, \dots, r$$

où les  $q_i$  sont les coordonnées généralisées du système et  $e_i$  est la résultante des efforts non conservatifs qui effectuent un travail quand seule la coordonnée  $q_i$  varie. (Voir § 1-6 de la partie "modélisation")

Pour le système considéré, les coordonnées généralisées sont  $\alpha$  et  $x$ . Déterminons en fonction de ces coordonnées et de leurs dérivées les expressions de  $W_c$  et de  $W_p$ . En désignant par  $v$  la vitesse de

translation du centre de gravité G de la roue et par  $\theta$  sa rotation, on a ;

$$W_c = \frac{1}{2}m|v|^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2.$$

Or, si  $(O, i, j)$  est un repère orthonormé lié au support S avec  $i$  selon le vecteur  $\overrightarrow{OC}$ ,

$$\begin{aligned} v &= \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = \frac{d}{dt}(xi + Rj) = \dot{x}i + x\frac{di}{dt} + R\frac{dj}{dt} \\ &= (\dot{x} - R\dot{\alpha})i + x\dot{\alpha}j. \end{aligned}$$

D'autre part, comme la roue roule sans glisser, on a  $\dot{\theta} = \dot{x}/R$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned} W_c &= \frac{1}{2}m[(\dot{x} - R\dot{\alpha})^2 + x^2\dot{\alpha}^2] + \frac{1}{2}\frac{J}{R^2}\dot{x}^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(m + J/R^2\right)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(x^2 + R^2)\dot{\alpha}^2 - mR\dot{x}\dot{\alpha}. \end{aligned}$$

L'énergie potentielle provient de la déformation du ressort et du déplacement vertical de la roue :

$$W_p = \frac{1}{2}k(x - a)^2 + mg(x \sin \alpha + R \cos \alpha).$$

Appliquons maintenant les équations de Lagrange.

a) Selon  $x$

$$\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\delta W_c}{\delta \dot{x}}\right) = \left(m + J/R^2\right)\ddot{x} - mR\ddot{\alpha}, \quad \frac{\delta W_c}{\delta x} = mx\dot{\alpha}^2$$

$$\frac{\delta W_p}{\delta x} = k(x - a) + mg \sin \alpha \quad \text{et} \quad e_x = -c_1\dot{\theta} = -c_1\frac{\dot{x}}{R}$$

d'où

$$\begin{aligned} \left(m + J/R^2\right)\ddot{x} - mR\ddot{\alpha} \\ = mx\dot{\alpha}^2 - k(x - a) - mg \sin \alpha - c_1\frac{\dot{x}}{R}. \end{aligned} \quad (1)$$

b) Selon  $\alpha$

$$\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\delta W_c}{\delta \dot{\alpha}}\right) = m(x^2 + R^2)\ddot{\alpha} + 2mx\dot{x}\dot{\alpha} - mR\ddot{x}, \quad \frac{\delta W_c}{\delta \alpha} = 0$$

$$\frac{\delta W_p}{\delta \alpha} = mg(x \cos \alpha - R \sin \alpha) \quad \text{et} \quad e_\alpha = u - c_2\dot{\alpha}$$

d'où

$$\begin{aligned} m(x^2 + R^2)\ddot{\alpha} - mR\ddot{x} \\ = -2mx\dot{x}\dot{\alpha} - c_2\dot{\alpha} - mg(x \cos \alpha - R \sin \alpha) + u. \end{aligned} \quad (2)$$

Les équations entrée-sortie du système sont donc (1) et (2). À noter que  $mx\dot{\alpha}^2$  est une force centrifuge et  $-2mx\dot{x}\dot{\alpha}$  est le moment d'une force de Coriolis.

#### Point de fonctionnement

Supposons qu'on désire maintenir le système en équilibre avec une inclinaison du support de  $\alpha_d = \pi/4$ . Dans cet état d'équilibre, on a :

$$\dot{\alpha}_d = \ddot{\alpha}_d = \dot{x}_d = \ddot{x}_d = 0$$

tandis que la position  $x_d$  de la roue et le moment  $u_d$  se déduisent des équations (1) et (2) du système en remplaçant les grandeurs connues par leurs valeurs. En effet (1) se réduit à

$$\begin{aligned} 0 &= -k(x_d - a) - mg \sin \alpha_d \\ \Rightarrow x_d &= a - \frac{mg\sqrt{2}}{2k} \end{aligned}$$

et (2) à

$$\begin{aligned} 0 &= -mg(x_d \cos \alpha_d - R \sin \alpha_d) + u_d \\ \Rightarrow u_d &= \frac{mg\sqrt{2}}{2}(x_d - R). \end{aligned}$$

On a ainsi déterminé toutes les composantes du point de fonctionnement

$$\begin{aligned} p_f &= (x_d, \alpha_d, \dot{x}_d, \dot{\alpha}_d, \ddot{x}_d, \ddot{\alpha}_d, u_d) \\ &= (x_d, \pi/4, 0, 0, 0, 0, u_d). \end{aligned}$$

#### Linéarisation

Il suffit de remplacer chaque terme des équations (1) et (2) par son écart de sa valeur désirée c.à.d. par sa différentielle approximative (1-51) au point de fonctionnement  $p_f$ . Par exemple, en désignant les écarts  $x - x_d$ ,  $\alpha - \alpha_d$  et  $u - u_d$  respectivement par  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{\alpha}$  et  $\tilde{u}$ , le terme  $mg \cdot x \cdot \cos \alpha$  sera remplacé par

$$\begin{aligned} (mg \cos \alpha|_{p_f})\tilde{x} + (-mg x \sin \alpha|_{p_f})\tilde{\alpha} \\ = (mg\sqrt{2}/2)(\tilde{x} - x_d)\tilde{\alpha} \end{aligned}$$

et le terme  $mx\dot{\alpha}^2$  par

$$m\dot{\alpha}^2|_{p_f} \tilde{x} + 2m\dot{x}\dot{\alpha}|_{p_f} \tilde{\alpha} = 0.$$

Ces substitutions conduisent aux équations des écarts suivantes :

$$(m + J/R^2)\ddot{\tilde{x}} - (mR)\ddot{\tilde{\alpha}} = -k\tilde{x} - (mg\sqrt{2}/2)\tilde{\alpha} - (c_1/R)\dot{\tilde{x}} \quad (1')$$

$$m(x_d^2 + R^2)\ddot{\tilde{\alpha}} - mR\ddot{\tilde{x}} = -c_2\dot{\tilde{\alpha}} - (mg\sqrt{2}/2)[\tilde{x} - (x_d + R)\tilde{\alpha}] + \tilde{u}. \quad (2')$$

On voit que ces équations sont linéaires et invariants. En posant

$$m_e = m + J/R^2, \quad J_e = m(x_d^2 + R^2),$$

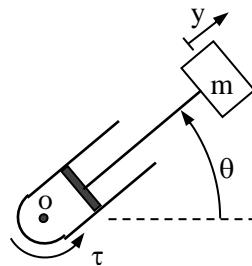
$$P_e = mg\sqrt{2}/2 \quad \text{et} \quad \kappa = P_e(x_d + R),$$

les équations (1') et (2') peuvent se mettre sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} m_e & -mR \\ -mR & J_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\tilde{x}} \\ \ddot{\tilde{\alpha}} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} c_1/R & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{\alpha}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & P_e \\ P_e & -\kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{\alpha} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tilde{u}$$

qui est du type  $M\ddot{q} = -C\dot{q} - Kq + f$  où les matrices  $M$ ,  $C$  et  $K$  désignent respectivement l'inertie, le frottement et la raideur du système et  $f$  le vecteur des actions.

#### EXERCICE 1-14



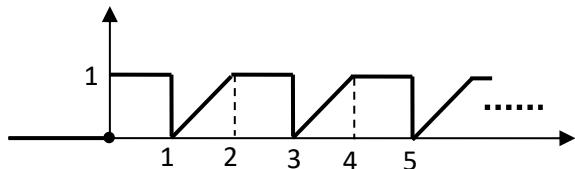
Le bras d'un robot, constitué d'un cylindre de section  $S$  muni d'un piston entraînant une masse  $m$ , est situé dans un plan vertical. Le frottement entre le piston et le cylindre est visqueux de facteur  $c$  et on néglige les masses des autres pièces. On admet que l'air dans

le cylindre est un gaz parfait de température  $T$  et de nombre de moles  $n$  constants. Le bras est activé par un couple  $\tau$  autour de l'axe  $o$ . Soit  $d$  la distance entre  $o$  et la masse  $m$  quand la pression  $P$  dans le cylindre est égale à la pression atmosphérique  $P_a$  et soit  $y$  le déplacement de la masse par rapport à cette position.

- 1) Écrire les équations différentielles liant  $y$  et l'inclinaison  $\theta$  au couple  $\tau$ .
- 2) On désire maintenir le système en équilibre avec une inclinaison du cylindre de  $\theta_d$ . Quelle valeur doit avoir  $\tau$  et que sera la valeur de  $y$  ?
- 3) Linéariser les équations du système autour de ce point de fonctionnement et déduire la fonction de transfert entre  $y$  et  $\tau$ .

## AUTRES EXERCICES ET COMPLÉMENTS

**1-15** On considère la fonction  $f(t)$  représentée sur la figure suivante.

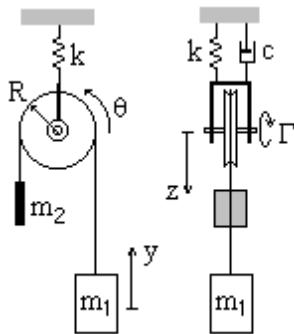


- a) Déterminer sa transformée de Laplace (à noter que  $f(t) = 0$  pour  $t \leq 0$ ).  
b) Écrire l'expression de la transformée de Laplace de sa dérivée  $h(t) = df(t)/dt$ . Déduire l'expression de  $h(t)$  et représenter la graphiquement.

**1-16** Calculer

$$\mathcal{L}[\cos\omega t]/t \text{ et } \mathcal{L}^{-1}[\ln(as+1)].$$

**1-17** Pour le système ci-dessous (représenté de face et de profil),  $m_1 = 6 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 4 \text{ kg}$ ,  $k = 1 \text{ kN/m}$ ,  $c = 1 \text{ kN.s/m}$ ,  $R = 10 \text{ cm}$ . La masse de la poulie est  $M = 2 \text{ kg}$ , son moment d'inertie est  $J = 0.1 \text{ kg.m}^2$  et le frottement entre la polie et son axe est visqueux de facteur  $c_p = 2 \text{ Nm/(rad/sec)}$ .  $z$  est l'elongation du ressort et  $y$  est la position de  $m_1$ . On suppose que la corde est inélastique et on prend  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .



- 1) Déterminer les valeurs  $z_0$  et  $\Gamma_0$  de  $z$  et du couple  $\Gamma$  quand toutes les pièces du système sont immobiles. Soit  $y_0$  la position correspondante de  $m_1$ .  
2) En posant  $z_1 = z - z_0$ ,  $\Gamma_1 = \Gamma - \Gamma_0$  et  $y_1 = y - y_0$ , écrire les équations différentielles liant  $\Gamma_1$  à  $z_1$  et à la rotation  $\theta$  de la poulie.  
3) Déduire la fonction de transfert  $y_1(s)/\Gamma_1(s)$ .  
4) Déterminer l'expression de la vitesse  $v(t)$  de  $m_1$  quand  $\Gamma_1(t) = 20[1(t)-1(t-2)]-201(t-2)-1(t-4)]$  et

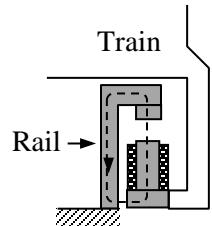
représenter  $v(t)$  en supprimant les termes négligeables.

**1-18** Deux robinets, l'un d'eau salée de débit  $q_1$  et de concentration  $c_1 \text{ kg/litre}$  et l'autre d'eau douce de débit  $q_2$ , alimentent un réservoir duquel on soutire un débit connu  $q$ . On désigne par  $m$  et  $M$  les masses du sel et de l'eau dans le réservoir.

1) Écrire les équations d'état liant  $q_1$  et  $q_2$  à la concentration  $c$  du sel et à la masse  $M$  dans le réservoir.

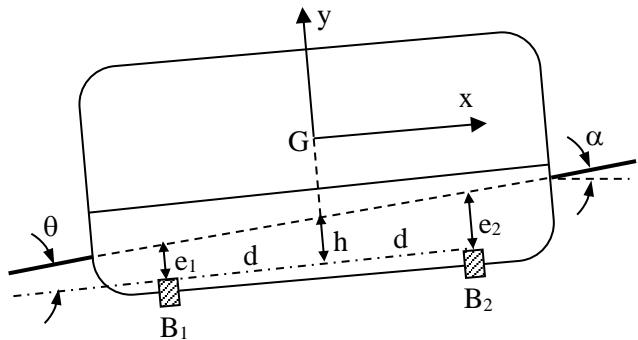
2) Quel est le point de fonctionnement si l'on désire que la concentration  $c$  soit égale à  $c_d$  et la masse de l'eau dans le réservoir soit  $M_d$ . Linéariser les équations 1) autour de ce point et déduire la matrice de transfert.

**1-19** La figure ci-contre



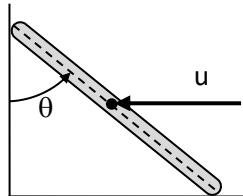
représente le principe de la lévitation d'un train. Un circuit électromagnétique est constitué du rail et d'un électroaimant de  $n$  spires fixé au train. Quand l'électroaimant est parcouru par un courant  $i$ , il est attiré vers le rail par une force  $f = ki^2/e^2$  où  $k$  est une constante proportionnelle à  $n^2$  et  $e$  est la distance séparant le rail du sommet de l'électroaimant (justifier).

La figure suivante représente un wagon flottant dans l'air au-dessus d'un rail qui fait avec l'horizontal un angle  $\alpha$  et avec le wagon un angle  $\theta$ . Le centre de gravité  $G$  du wagon est équidistant des électroaimants  $B_1$  et  $B_2$  qui sont séparés d'une distance  $2d$  et parcourus par des courants  $i_1$  et  $i_2$ . La masse du véhicule est  $m$  et son moment d'inertie autour de  $G$  est  $J$ . (On ne considère pas dans ce problème la translation le long du rail mais seulement le système de suspension).



- 1) La distance séparant la surface d'un électroaimant du rail étant approximée par la longueur du segment  $e_i$  porté par l'axe de la bobine et joignant sa surface au rail, écrire les équations différentielles liant les courants  $i_1$  et  $i_2$  à l'angle  $\theta$  et à la distance moyenne  $h$  séparant les bobines du rail.
- 2) Linéariser ces équations autour du point de fonctionnement relatif à  $h = h_0$  et  $\theta = 0$  et déduire la matrice de transfert liant les fluctuations  $u_1$ ,  $u_2$  de  $i_1$  et  $i_2$  aux fluctuations  $y_1$  et  $y_2$  de  $h$  et  $\theta$ .

**1-20** Une barre de masse  $m$ , de longueur  $2L$  et de moment d'inertie  $J = mL^2/3$  est appuyée entre un plan vertical et un autre horizontal. On néglige les frottements aux extrémités de la barre et on applique au centre de gravité  $G$  (au milieu de la barre) une force horizontale  $u$ .



- a) En choisissant comme coordonnée généralisée l'inclinaison  $\theta$  de la barre et en désignant par  $g$  l'accélération terrestre, montrer que l'équation différentielle liant  $u$  à  $\theta$  est donnée par

$$\frac{4mL}{3}\ddot{\theta} - mg \sin \theta = -u \cos \theta.$$

- b) On désire équilibrer la barre avec une inclinaison  $\theta_d = 45^\circ$ . Que doit être la valeur  $u_d$  de la force  $u$  ?  
c) Pour  $m = 3$  kg,  $L = 3/\sqrt{2}$  m et en prenant  $g = 10$  m/sec<sup>2</sup>, linéariser l'équation de ce système autour du point de fonctionnement  $p_f = [u_d, \theta_d]$  et déduire sa fonction de transfert.

**1-21.** Un rotor, de masse  $m$  et de tenseur d'inertie  $J_G = \text{diag}(I, I, I_z)$  par rapport à son centre de gravité  $G$ , tourne autour de son axe  $k$  avec une vitesse constante  $\Omega$ . L'axe  $k$ , attaché à une articulation  $P$  peut tourner autour de la verticale  $k_0$  passant par  $P$  ainsi qu'autour de l'axe  $i$  perpendiculaire en  $P$  au plan ( $k, k_0$ ). La distance entre  $P$  et  $G$  est  $d$ .

- 1) Écrire les expressions des composantes de la vitesse de rotation  $\omega$  du rotor ainsi que les composantes de la vitesse absolue  $v = V(G)$  de  $G$  dans le repère ( $G, i, j, k$ ).

- 2) Appliquer la méthode de Lagrange pour déduire l'équation différentielle liant la rotation  $\psi$  du rotor autour de  $k_0$  à sa rotation  $\theta$  autour de  $i$ .  
3) Déduire que si  $\theta = \pi/2$ , le rotor tourne autour de la verticale avec une vitesse angulaire  $mgd/I_z\Omega$ .

