CMo-1 Transformée de Laplace et systèmes linéaires.

<u>EXERCICE 1-1</u>
Soit g(t) la fonction qui vaut sinωt entre 0 et π/ω et 0 ailleurs. Déterminer sa transformée de Laplace
1) A partir de la définition de cette transformée.
2) En employant la propriété (1-19) de la fonction tronquée.

1)

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\pi/\omega} \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} e^{-st}dt$$

$$= \frac{1}{2j}\int_0^{\pi/\omega} (e^{-(s-j\omega)t} - e^{-(s+j\omega)t})dt$$

$$= \frac{1}{2j}\left[-\frac{e^{-(s-j\omega)t}}{s-j\omega}\Bigg|_0^{\pi/\omega} + \frac{e^{-(s+j\omega)t}}{s+j\omega}\Bigg|_0^{\pi/\omega} \right]$$

$$= \frac{\omega}{s^2+\omega^2}(1+e^{-s\pi/\omega}).$$

2)

$$f(t) = \sin\omega t - 1(t-\pi/\omega)\sin\omega t$$

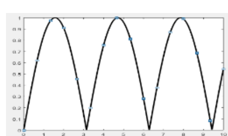
$$\Rightarrow \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}(\sin\omega t) - e^{-s\pi/\omega}\mathcal{L}[\sin\omega(t+\pi/\omega)]$$

$$= \mathcal{L}(\sin\omega t)(1+e^{-s\pi/\omega}) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}(1+e^{-s\pi/\omega})$$

<u>EXERCICE 1-2</u>
Tenant compte du résultat de l'exercice 1-1, déterminer la transformée de Laplace de la fonction sinusoïdale redressée |sinωt|, t ∈ [0. ∞).

$$\mathcal{L}[g(t)] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}(1+e^{-s\pi/\omega}),$$

$T = \pi/\omega.$



$$\Rightarrow \mathcal{L}[f(t)] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}\frac{1+e^{-s\pi/\omega}}{1-e^{-s\pi/\omega}}.$$

<u>EXERCICE 1-3</u>
Tenant compte du résultat de l'exercice 1-2, déterminer la transformée de Laplace de la dérivée seconde de la fonction sinusoïdale redressée |sinωt|, t ∈ [0, ∞), représenter son graphe et interpréter le résultat.

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}\frac{1+e^{-s\pi/\omega}}{1-e^{-s\pi/\omega}}, \quad f(0)=0, f'(0)=\omega.$$

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2\mathcal{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0)$$

$$= s^2\mathcal{L}[f(t)] - \omega = [(s^2+\omega^2)-\omega^2]\mathcal{L}[f(t)] - \omega$$

$$= \omega\left(1-\frac{\omega^2}{s^2+\omega^2}\right)\left(\frac{1+e^{-s\pi/\omega}}{1-e^{-s\pi/\omega}}\right) - \omega$$

Interprétation

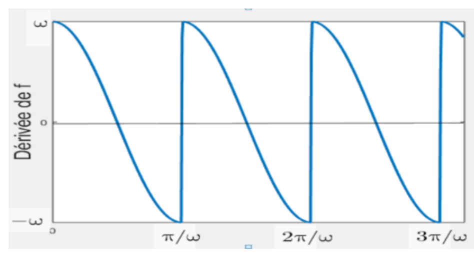
$$\mathcal{L}[f''(t)] = -\omega^2\mathcal{L}[f(t)] + \omega\left(\frac{1+e^{-s\pi/\omega}}{1-e^{-s\pi/\omega}} - 1\right)$$

$$= -\omega^2\mathcal{L}[f(t)] + 2\omega\frac{e^{-s\pi/\omega}}{1-e^{-s\pi/\omega}}$$

$$= -\omega^2\mathcal{L}[f(t)] + 2\omega(e^{-s\pi/\omega} + e^{-s2\pi/\omega} + e^{-s3\pi/\omega} + \cdots) \qquad (1)$$

En effet,

$$g'(t) = \omega\cos\omega t,\ t\in[0,\pi/\omega) \Rightarrow f'(t) = \omega\sum_{k=0}^{\infty} g'_{k\pi/\omega}(t)$$



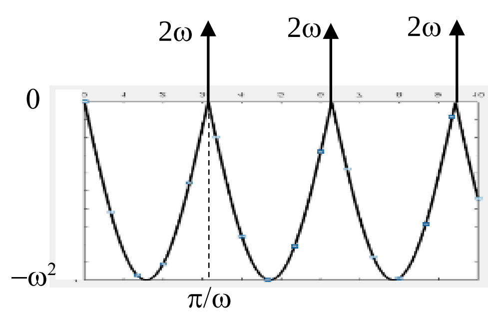
La dérivée d'un saut étant une distribution de Dirac d'amplitude 2ω, on a :

$$f''(t) = \left[-\omega^2\sum_{k=0}^{\infty}\underbrace{\sin\omega(t-k\pi/\omega)}_{k\pi/\omega\le t<(k+1)\pi/\omega}\right]$$

$$+2\omega\sum_{k=1}^{\infty}\delta(t-k\pi/\omega)$$

$$\mathcal{L}[f''(t)] = -\omega^2\mathcal{L}[f(t)] + 2\omega\sum_{k=1}^{\infty}e^{-sk\pi/\omega}.$$

La même expression que (1)



EXERCICE 1-4
Déterminer $\mathcal{L}[t\cos\omega t]$ et $\mathcal{L}[t^2\cos\omega t]$ en appliquant $\mathcal{L}(t^n e^{-\sigma t}) = n!/(s+\sigma)^{n+1}$ (voir (1-28) et (1-11)).

$$\mathcal{L}[t\cos\omega t] = \frac{1}{2}\mathcal{L}(te^{j\omega t} + te^{-j\omega t}).$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(s-j\omega)^2} + \frac{1}{(s+j\omega)^2}\right)$$

$$= \frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}.$$

$$\mathcal{L}[t^2\cos\omega t] = \frac{1}{2}\mathcal{L}(t^2e^{j\omega t} + t^2e^{-j\omega t}).$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2!}{(s-j\omega)^3} + \frac{2!}{(s+j\omega)^3}\right)$$

$$= \frac{A(s,j\omega) + A(s,-j\omega)}{(s^2+\omega^2)^3}$$

avec $A(s,j\omega) = s^3 + 3j\omega s^2 - 3\omega^2 s - j\omega.$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[t^2\cos\omega t] = \frac{2s(s^2-3\omega^2)}{(s^2+\omega^2)^3}.$$

EXERCICE 1-5
Déterminer l'inverse f(t) de

$$f(s) = \frac{2s+5}{s(s+1)^2(s^2+2s+5)}.$$

$$f(s) = \frac{A}{s} + \frac{B_2}{(s+1)^2} + \frac{B_1}{s+1} + \frac{Cs+D}{s^2+2s+5}.$$

$$A = sf(s)\big|_{s=0} = 1,$$

$$B_2 = (s+1)^2 f(s)\big|_{s=-1} = \frac{3}{-4},$$

$$B_1 = \frac{d}{ds}(s+1)^2 f(s)\Big|_{s=-1}$$

$$= \frac{2s(s^2+2s+5) - (3s^2+4s+5)(2s+5)}{s^2(s^2+2s+5)^2}\Bigg|_{s=-1}$$

$$= \frac{-2(4)-(4)(3)}{4^2} = \frac{-5}{4},$$

$$C = \lim_{s\to\infty} sf(s) - A - B_1 = 0 - 1 + 5/4 = 1/4,$$

$$f(1) = A + B_2/4 + B_1/2 + \frac{C+D}{8}$$

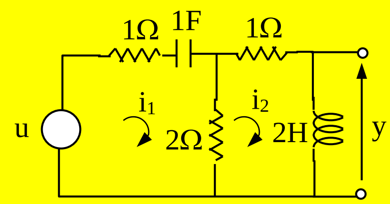
$$\Rightarrow D = 8\left(\frac{7}{4(8)}\right) - 8 + \frac{3}{2} + 5 - \frac{1}{4} = \frac{12}{4} - 3 = 0.$$

Donc

$$f(s) = \frac{1}{s} - \frac{3/4}{(s+1)^2} - \frac{5/4}{s+1} + \frac{(1/4)(s+1) - 1/4}{(s+1)^2+4}$$

$$f(t) = 1 - \frac{e^{-t}}{4}\left[(3t+5) - \left(\cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\right].$$

EXERCICE 1-6
Déterminer la fonction de transfert G(s) = y(s)/u(s) du circuit suivant.



Les équations des deux mailles :

$$\left(1+\frac{1}{s}\right)i_1 + 2(i_1 - i_2) = u,$$

$$(1+2s)i_2 + 2(i_2 - i_1) = 0.$$

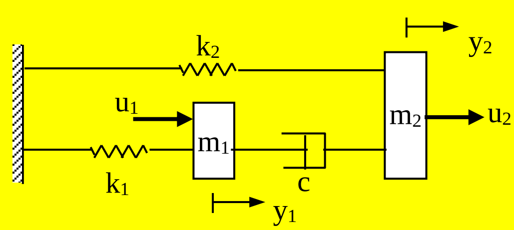
ou $$\left(3+\frac{1}{s}\right)i_1 - 2i_2 = u,$$

$$-2i_1 + (3+2s)i_2 = 0.$$

$$\Rightarrow i_2 = \frac{\begin{vmatrix} (3s+1)/s & u \\ -2 & 0 \end{vmatrix}}{\left(\frac{3s+1}{s}\right)(3+2s) - 4} = \frac{2su}{6s^2+7s+3}$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{y}{u} = \frac{2si_2}{u} = \frac{4s^2}{6s^2+7s+3}.$$

EXERCICE 1-7
Le système suivant a deux entrées, les forces u_1 et u_2, et deux sorties, les déplacements y_1 et y_2 des masses. Pour m_1 = 1 kg, m_2 = 2 kg, k_1 = 1 N/m, k_2 = 3 N/m, et c = 2 N/(m/s), déterminer la matrice de transfert de ce système.



Les équations des mouvements des masses sont :

$$m_1 s^2 y_1 = u_1 - k_1 y_1 - c(sy_1 - sy_2)$$

$$m_2 s^2 y_2 = u_2 - k_2 y_2 - c(sy_2 - sy_1)$$

ou

$$\begin{pmatrix} s^2+2s+1 & -2s \\ -2s & 2s^2+2s+3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^2+2s+1 & -2s \\ -2s & 2s^2+2s+3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

ou $y = G(s)u$ avec

$$G(s) = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} 2s^2+2s+3 & 2s \\ 2s & s^2+2s+1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = (s^2+2s+1)(2s^2+2s+3) - 4s^2$$
$$= 2s^4 + 4s^3 + 5s^2 + 7s + 3.$$

EXERCICE 1-8

On considère le système de l'exercice 1-7. Définir ses variables d'état et déterminer les matrices A, B, C et D de ses équations d'état.

Les ressorts emmagasinent de l'énergie potentielle caractérisée par $x_1 = y_1$ pour k_1 et $x_3 = y_2$ pour k_2. L'énergie cinétique des masses sera caractérisée par $x_2 = dy_1/dt$ pour m_1 et $x_4 = dy_2/dt$ pour m_2.

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m_1}[-k_1 x_1 - cx_2 + cx_4 + u_1]$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{m_2}[cx_2 - k_2 x_3 - cx_4 + u_2]$$

ou

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3/2 & -1 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}}_{B}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{C}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 1-9

Retrouver la matrice de transfert de l'exercice 1-7 à partir des équations d'état de l'exercice 1-8.

$G(s) = C(sI-A)^{-1}B$.

avec $(sI-A)^{-1} = \mathrm{adj}(sI-A)/\det((sI-A)$.

$$sI - A = \begin{pmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 1 & s+2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ 0 & -1 & 3/2 & s+1 \end{pmatrix}$$

$$\det(sI-A) = s[(s+2)(s^2+s+3/2) - 2s]$$
$$+ (s^2+s+3/2)$$

$$= \frac{1}{2}[(s^2+2s+1)(2s^2+2s+3) - 4s^2] = \frac{\Delta}{2}$$

Les éléments de l'adjoint d'une matrice sont les cofacteurs de la transposée de cette matrice.

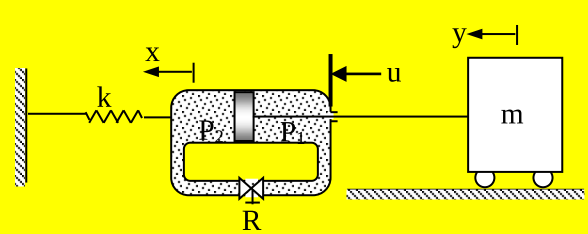
$$(sI-A)^T = \begin{pmatrix} s & 1 & 0 & 0 \\ -1 & s+2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & s & 3/2 \\ 0 & -2 & -1 & s+1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{adj}(sI-A)B = \begin{pmatrix} s^2+s+3/2 & s \\ s(s^2+s+3/2) & s^2 \\ s & (s^2+2s+1)/2 \\ s^2 & s(s^2+2s+1)/2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{C\,\mathrm{adj}(sI-A)B}{\Delta/2} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} 2s^2+2s+3 & 2s \\ 2s & s^2+2s+1 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 1-10

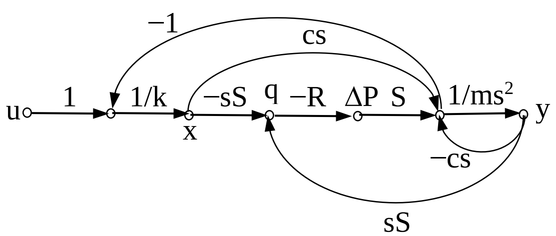
L'entrée du système représenté ci-dessous est la force u appliquée au cylindre et sa sortie est le déplacement y du chariot. La résistance à l'écoulement à travers le robinet est R = 10^9 Pa/(m^3/s), la section du cylindre est S = 10^{-3} m^2, le facteur du frottement visqueux entre le piston et le cylindre est c = 200 N/(m/s), la raideur du ressort est k =500 N/m, la masse du chariot est m = 200 kg et on néglige les masses des autres éléments. Construire un graphe liant u à y et déduire la fonction de transfert de ce système.



- Le mouvement y de la masse m est lié à la force appliquée au piston.

- La force sur le piston provient du frottement et de la différence de pression $\Delta P = P_1 - P_2$ dans les compartiments du cylindre.
- La différence de pression dépend du débit q à travers le robinet c.à.d. de la vitesse relative de la masse par rapport au cylindre.
- Le frottement dépend aussi de cette vitesse
- Le déplacement x du cylindre esr égal à celui du ressort qui équilibre la force u, l'action des pressions dans le cylindre et le frottement.

Le graphe suivant précise les relations précédentes.

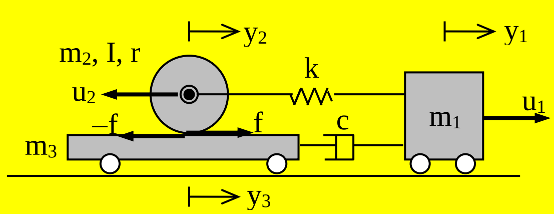


Le graphe est constitué de 2 chemins, l'un direct et l'autre passe par cs. Chaque chemin touche les trois boucles et chaque boucle touche les deux autres.

$$G(s) = \frac{y}{u} = \frac{C_1 + C_2}{1 - B_1 - B_2 - B_3}$$
$$= \frac{(RS^2/km)s^{-1} + (c/km)s^{-1}}{1 + (c/m)s^{-1} + (RS^2/m)s^{-1} + (RS^2/k)s}$$
$$= \frac{(10^3/10^5) + (200/10^5)}{s + (200/200) + (10^3/200) + (10^3/500)s^2}$$
$$= \frac{0.012}{2s^2 + s + 6}\ \frac{m}{N}$$

<u>EXERCICE 1-11</u>

Retrouver le résultat de l'exemple 1-17 en appliquant la méthode de Cramer.



Le moment de la force f qu'exerce la remorque sur le rouleau est $fr = -I\ddot{\theta}$ où θ = $(y_2 - y_3)/r$ d'où $f = (I/r^2)(\ddot{y}_3 - \ddot{y}_2)$. Tenant compte de cette relation et en appliquant la loi de Newton aux 3 masses, on obtient :

$$(m_1 s^2 + cs + k)y_1 = csy_3 + ky_2 + u_1,$$
$$[(m_2 + I/r^2)s^2 + k]y_2 = (I/r^2)s^2 y_3 + ky_1 - u_2,$$
$$[(m_3 + I/r^2)s^2 + cs]y_3 = (I/r^2)s^2 y_2 + csy_1.$$

En posant

$$D_1 = m_1 s^2 + cs + k,$$
$$D_2 = (m_2 + I/r^2)s^2 + k,$$
$$D_3 = (m_3 + I/r^2)s^2 + cs,$$

les équations précédentes s'écrivent sous la forme :

$$\begin{pmatrix} D_1 & -k & -cs \\ -k & D_2 & -(I/r^2)s^2 \\ -cs & -(I/r^2)s^2 & D_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ -u_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminant de la matrice.

$$D_1(D_2D_3 - I^2s^4/r^4)$$
$$- k(kD_3 + cIs^3/r^2) - cs(kIs^2/r^2 + cD_2 s)$$
$$= D_1D_2D_3 - k^2D_3 - \frac{I^2s^4}{r^4}D_1 - c^2s^2D_2 - \frac{2Icks^3}{r^2} = \pi(s)$$

Les sorties.

$$y_1 = \frac{1}{\pi(s)}\begin{pmatrix} u_1 & -k & -cs \\ -u_2 & D_2 & -(I/r^2)s^2 \\ 0 & -(I/r^2)s^2 & D_3 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{u_1(D_2D_3 - I^2s^4/r^4) + u_2(-kD_2 - cIs^3/r^2)}{\pi(s)}$$

$$y_2 = \frac{1}{\pi(s)}\begin{pmatrix} D_1 & u_1 & -cs \\ -k & -u_2 & -(I/r^2)s^2 \\ -cs & 0 & D_3 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{u_1(kD_3 + cIs^3/r^2) - u_2(D_1D_3 - c^2s^2)}{\pi(s)}$$

$$y_3 = \frac{1}{\pi(s)}\begin{pmatrix} D_1 & -k & u_1 \\ -k & D_2 & -u_2 \\ -cs & -(I/r^2)s^2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{u_1(kIs^2/r^2 + cD_2 s) + u_2(-D_1 s^2/r^2 - cD_2 s)}{\pi(s)}.$$

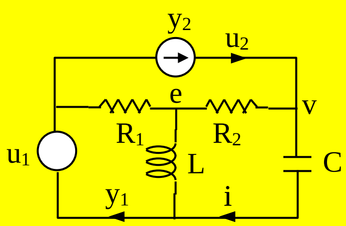
La première colonne de G(s) se déduit des expressions des sorties en annulant u_2 et la deuxième colonne en annulant u_1.

$$G(s) = \frac{1}{\pi(s)}\begin{pmatrix} D_2D_3 - I^2s^4/r^4 & -kD_3 - cIs^3/r^2 \\ kD_3 + cIs^3/r^2 & -D_1D_3 + c^2s^2 \\ kIs^2/r^2 + cD_2 s & -D_1 s^2/r^2 - cD_2 s \end{pmatrix}.$$

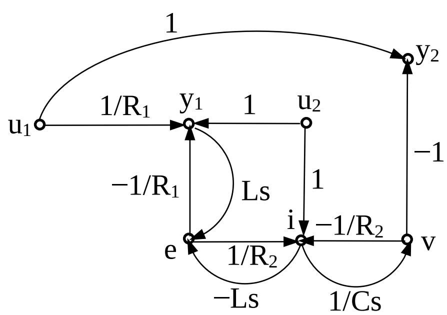
Le même résultat obtenu par la méthode de Mason.

<u>EXERCICE 1-12</u>

Construire le graphe des équations du circuit suivantt ('exemple 1-11) et retrouver sa matrice de transfert.



$$y_1 = u_2 + (u_1 - e)/R_1.$$
$$e = Ls(y_1 - i),$$
$$i = u_2 - (v - e)/R_2,$$
$$v = i/Cs,$$
$$y_2 = u_1 - v.$$



Les boucles

$$B_1 = -\frac{Ls}{R_1}, \quad B_2 = -\frac{Ls}{R_2}, \quad B_3 = -\frac{1}{R_2Cs}$$

B_1 et B_3 ne se touchent pas.

$$\begin{aligned}\Delta &= 1 - B_1 - B_2 - B_3 + B_1B_3 \\ &= 1 + Ls\frac{R_1+R_2}{R_1R_2} + \frac{1}{R_2Cs} + \frac{L}{R_1R_2C} \\ &= \frac{LC(R_1+R_2)s^2 + (L + R_2R_1C)s + R_1}{R_1R_2Cs} = \frac{\pi(s)}{R_1R_2Cs}\end{aligned}$$

Les chemins

$$C_{11}\delta_{11} = \frac{1 - B_2 - B_3}{R_1} = \frac{LCs^2 + R_2Cs + 1}{R_1R_2Cs}$$

$$C^1_{12}\delta^1_{12} + C^2_{12}\delta^2_{12} = (1 - B_2 - B_3) + \frac{Ls}{R_1} = \Delta - \frac{Ls}{R_1R_2Cs}$$

$$C^1_{21}\delta^1_{21} + C^2_{21}\delta^2_{21} = \Delta - \frac{Ls}{R_1R_2Cs},$$

$$\begin{aligned}C^1_{22}\delta^1_{22} + C^2_{22}\delta^2_{22} &= -\frac{1 - B_1}{Cs} - \frac{Ls}{R_2Cs} \\ &= \frac{(R_1+R_2)Ls + R_1R_2}{R_1R_2Cs}.\end{aligned}$$

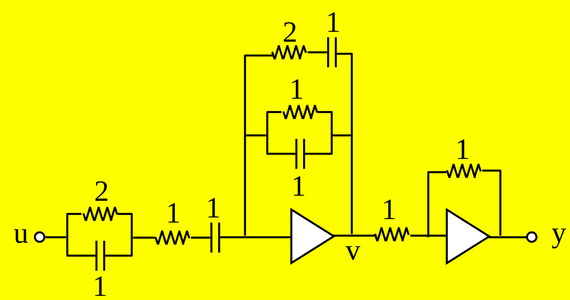
La fonction de transfert est

$$G(s) = \frac{1}{\pi(s)}\begin{pmatrix} LCs^2 + R_2Cs + 1 & \pi(s) - Ls \\ Ls - \pi(s) & (R_1+R_2)Ls + R_1R_2 \end{pmatrix}$$

La même que dans l'exemple 1-11.

<u>EXERCICE 1-13</u>

Déterminer la fonction de transfert du circuit suivant, représenter son graphe et construire sa réalisation à partir de ses équations d'état.



$$y = -v = \frac{Z_p}{Z_s}u.$$

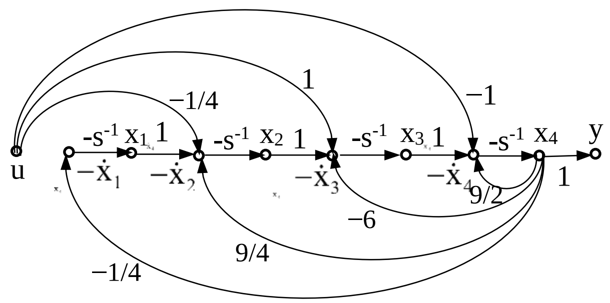
$$Z_p = \frac{(2s+1)/[(s+1)s]}{((2s+1)/s] + 1/(s+1)} = \frac{2s+1}{(2s+1)(s+1)+s},$$

$$Z_s = 2/(2s+1) + (s+1)/s = \frac{2s + (2s+1)(s+1)}{s(2s+1)}.$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow G(s) = \frac{y}{u} &= \frac{2s+1}{(2s+1)(s+1)+s}\cdot\frac{s(2s+1)}{2s+(2s+1)(s+1)} \\ &= \frac{4s^3 + 4s^2 + s}{(2s^2+4s+1)(2s^2+5s+1)} \\ &= \frac{4s^3 + 4s^2 + s}{4s^4 + 18s^3 + 24s^2 + 9s + 1}.\end{aligned}$$

Graphe

$$G(s) = \frac{s^{-1} + s^{-2} + (1/4)s^{-3}}{1 + (9/2)s^{-1} + 6s^{-2} + (9/4)s^{-3} + (1/4)s^{-4}}$$



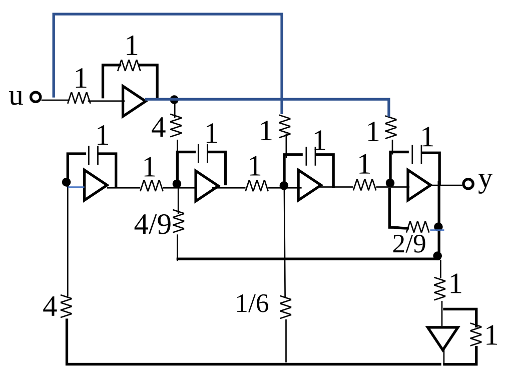
Équations d'état

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{4}x_4 \Rightarrow x_1 = -s^{-1}\left[-\frac{x_4}{4}\right]$$

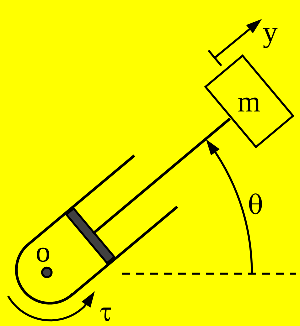
$$\dot{x}_2 = -x_1 - \frac{9}{4}x_4 + \frac{1}{4}u \Rightarrow x_2 = -s^{-1}\left[x_1 + \frac{x_4}{4/9} - \frac{u}{4}\right]$$

$$\dot{x}_3 = -x_2 + 6x_4 - u \Rightarrow x_3 = -s^{-1}\left[x_2 - \frac{x_4}{1/6} + u\right]$$

$$\dot{x}_4 = -x_3 - \frac{9}{2}x_4 + u \Rightarrow x_4 = -s^{-1}\left[x_3 + \frac{x_4}{2/9} - u\right]$$



EXERCICE 1-14



Le bras d'un robot, constitué d'un cylindre de section S muni d'un piston entrainant une masse m, est situé dans un plan vertical. Le frottement entre le piston et le cylindre est visqueux de facteur c et on néglige les masses des autres pièces. On admet que l'air dans le cylindre est un gaz parfait de température T et de nombre de moles n constants. Le bras est activé par un couple τ autour de l'axe o. Soit d la distance entre o et le la masse m quand la pression P dans le cylindre est égale à la pression atmosphérique P_a et soit y le déplacement de la masse par rapport à cette position.

1) Écrire les équations différentielles liant y et l'inclinaison θ au couple τ.

2) On désire maintenir le système en équilibre avec une inclinaison du cylindre de θ_d. Quelle valeur doit avoir τ et que sera la valeur de y ?

3) Linéariser les équations du système autour de ce point de fonctionnement et déduire la fonction de transfert entre y et τ.

1)

Déplacement y

y dépend de la pression, de la composante de la pesanteur selon l'axe du piston et du frottement.

$$nRT = P_a S d \text{ et } PS(d+y) = nRT$$

$$m\ddot{y} = (P - P_a)S - mg\sin\theta - c\dot{y}$$

$$\Rightarrow m\ddot{y} + c\dot{y} + mg\sin\theta = \frac{P_a S d}{d+y} - P_s S$$

$$= P_s S.\frac{-y}{d+y} \quad (1)$$

Rotation θ

θ dépend de τ et du moment de la pesanteur en o.

$$J\ddot{\theta} = \tau - mg(d+y)\cos\theta, \quad J = m(d+y)^2$$

$$\Rightarrow m(d+y)^2\ddot{\theta} + mg(d+y)\cos\theta = \tau \quad (2)$$

2)

À l'équilibre les dérivées de y et θ s'annulent. D'où

$$(1) \rightarrow (d + y_d)mg\sin\theta_d = -P_a S y_d$$

$$\Rightarrow y_d = \left(-\frac{dmg\sin\theta_d}{P_a S + mg\sin\theta_d}\right)$$

$$(2) \rightarrow \tau_d = (d + y_d)mg\cos\theta_d.$$

3)

On pose y = y − y_d, τ = τ − τ_d et θ = θ − θ_d.

Linéarisation de (1)

$$m\ddot{y}+c\dot{y}+(mg\cos\theta_d)\theta=-P_aS\left(\frac{d}{(d+y_d)^2}\right)y$$

ou

$$m\ddot{y}+c\dot{y}+\frac{P_aSd}{(d+y_d)^2}y+\frac{\tau_d}{d+y_d}\theta=0. \quad (3)$$

<u>Linéarisation de (2)</u>
Sachant que $\ddot{\theta}_d=0$,

$$m(d+y_d)^2\ddot{\theta}+(mg\cos\theta_d)y$$
$$-[mg(d+y_d)\sin\theta_d]\theta=\tau. \quad (4)$$

En posant

$$\alpha=\frac{P_aSd}{(d+y_d)^2},\quad \beta=\frac{\tau_d}{d+y_d},\quad \mu=m(d+y_d)^2$$
$$\delta=mg\cos\theta_d,\quad \gamma=mg(d+y_d)\sin\theta_d,$$

les équations (3) et (4) peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{pmatrix} ms^2+cs+\alpha & \beta \\ \delta & \mu s^2+\gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ \theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \tau \end{pmatrix}.$$

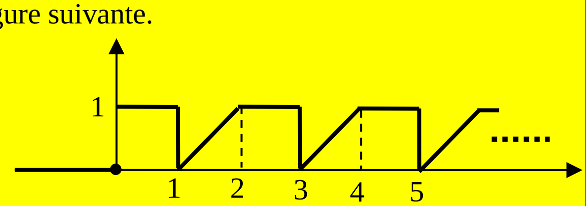
La relation entre y et τ est donc

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 0 & \beta \\ \tau & \mu s^2+\gamma \end{vmatrix}}{(ms^2+cs+\alpha)(\mu s^2+\gamma)-\delta\beta}$$

$$\Rightarrow G(s)=-\frac{\beta}{(ms^2+cs+\alpha)(\mu s^2+\gamma)-\delta\beta}.$$

AUTRES EXERCICES ET COMPLÉMENTS

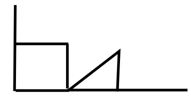
1-15 On considère la fonction f(t) représentée sur la figure suivante.



a) Déterminer sa transformée de Laplace (à noter que f(t) = 0 pour t ≤ 0).
b) Écrire l'expression de la transformée de Laplace de sa dérivée h(t) = df(t)/dt. Déduire l'expression de h(t) et représenter la graphiquement

a) f(t) est périodique de période 2 et de fonction de périodicité

$$g(t)=1(t)-1(t-1)+(t-1)[1(t-1)-1(t-2)]$$
$$=1(t)+(t-2)1(t-1)-(t-1)1(t-2).$$



Sa transformée de Laplace est

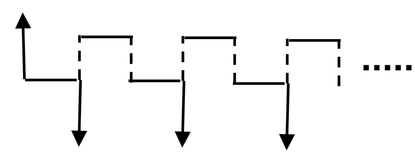
$$\mathcal{L}[g(t)]=\frac{1}{s}+e^{-s}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}\right)-e^{-2s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\right)$$
$$=\frac{s-(s-1)e^{-s}-(s+1)e^{-2s}}{s^2}.$$
$$\Rightarrow \mathcal{L}[f(t)]=\frac{s-(s-1)e^{-s}-(s+1)e^{-2s}}{s^2(1-e^{-2s})}.$$

b) f(0) = 0 d'où la transformée de la dérivée est

$$\mathcal{L}[h(t)]=s\mathcal{L}[f(t)]=\frac{s-(s-1)e^{-s}-(s+1)e^{-2s}}{s(1-e^{-2s})}$$
$$=\frac{(1-e^{-s}-e^{-2s})+(1/s)(e^{-s}-e^{-2s})}{(1-e^{-2s})}$$

h(t) est périodique de période 2 et de fonction de périodicité

$$g_h(t)=\delta(t)-\delta(t-1)-\delta(t-2)+1(t-1)-1(t-2).$$



Remarquer que les impulsions en t = 2 s'annulent.

1-16 Calculer
$\mathcal{L}[[\cos\omega t)/t]$ et $\mathcal{L}^{-1}[\mathrm{Ln}(as+1)]$

a)

$$\mathcal{L}[tf(t)]=\mathcal{L}[\cos\omega t]=\frac{s}{s^2+\omega^2}=-\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f(t)]$$
$$\Rightarrow \mathcal{L}[f(t)]=-\int\frac{s\,ds}{s^2+\omega^2}$$
$$=-\frac{1}{2}\int\frac{dv}{v}=\mathrm{Ln}(v^{-1/2}),\quad v=s^2+\omega^2$$
$$\Rightarrow \mathcal{L}[f(t)]=\mathrm{Ln}\left(\frac{1}{\sqrt{s^2+\omega^2}}\right).$$

b)

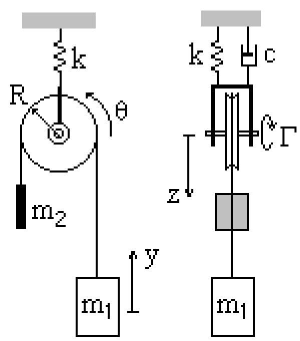
$$\mathcal{L}[f(t)]=\mathcal{L}\mathcal{L}^{-1}[\mathrm{Ln}(as+1)]=\mathrm{Ln}(as+1).$$

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{d}{ds}\mathrm{Ln}(as+1) = -\frac{a}{as+1}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{1}{s+1/a} \Rightarrow tf(t) = -e^{-t/a}$$

$$\Rightarrow f(t) = -\frac{e^{-t/a}}{t}.$$

1-17 Pour le système ci-dessous (représenté de face et de profil), m_1 = 6 kg, m_2 = 4 kg, k = 1 kN/m, c = 1 kN.s/m , R = 10 cm. La masse de la poulie est M = 2 kg, son moment d'inertie est J = 0.1 kg.m^2 et le frottement entre la poulie et son axe est visqueux de facteur c_p = 2 Nm/(rad/sec). z est l'élongation du ressort et y est la position de m_1. On suppose que la corde est inélastique et on prend g = 10 m/s^2.



1) Déterminer les valeurs z_0 et Γ_0 de z et du couple Γ quand le système est au repos. Soit y_0 la position correspondante de m_1.
2) En posant $z_1 = z - z_0$, $\Gamma_1 = \Gamma - \Gamma_0$ et $y_1 = y - y_0$, écrire les équations différentielles liant Γ_1 à z_1 et à la rotation θ de la poulie.
3) Déduire la fonction de transfert $y_1(s)/\Gamma_1(s)$.
4) Déterminer l'expression de la vitesse v(t) de m_1 quand $\Gamma_1(t) = 20[1(t)-1(t-2)]-201(t-2)-1(t-4)]$ et représenter v(t) en supprimant les termes négligeables.

1) À l'équilibre le ressort supporte le poids de la poulie et des masses, d'où

$$kz_0 = (M + m_1 + m_2)g$$

$$\Rightarrow z_0 = \frac{(M + m_1 + m_2)g}{k} = \frac{120}{1000} = 0.12 \text{ m}.$$

Le couple Γ_0 équilibre les moments des masses au centre de la poulie.

$$\Gamma_0 = (m_1 - m_2)gR = (20)(0.1) = 2 \text{ Nm}.$$

2) On distingue dans ce système 3 mouvements : la rotation de la poulie, sa translation verticale et les translations des masses par rapporte à la poulie.

Rotation de la poulie

Désignons par T_1 et T_2 les tensions de la corde des deux côtés de la poulie. On a :

$$J\ddot{\theta} = \Gamma + (T_2 - T_1)R - c_p\dot{\theta}$$

$$\text{ou} \quad J\ddot{\theta} + c_p\dot{\theta} = \Gamma + (T_2 - T_1)R. \quad (1)$$

Translation de la poulie

$$M\ddot{z} = (T_2 + T_1) + Mg - kz - c\dot{z}.$$

$$\text{ou} \quad M\ddot{z} + c\dot{z} + kz = T_2 + T_1. \quad (2)$$

Translations des masses

Le déplacement d'une masse est la somme algébrique de son déplacement par rapport à la poulie et de celui de la poulie :

$$T_1 - m_1 g = m_1(R\ddot{\theta} - \ddot{z})$$

$$m_2 g - T_2 = m_2(R\ddot{\theta} + \ddot{z}),$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T_1 - T_2 = (m_1 - m_2)(g - \ddot{z}) + (m_1 + m_2)R\ddot{\theta} \\ T_1 + T_2 = (m_1 + m_2)(g - \ddot{z}) + (m_1 - m_2)R\ddot{\theta} \end{cases}$$

En remplaçant les expressions de $T_1 - T_2$ et $T_1 + T_2$ dans (1) et (2) et en posant

$$J_{eq} = J + (m_1 + m_2)R^2$$

$$= 0.1 + (6+4)(0.1)^2 = 0.2 \text{ kgm}^2 \quad ,$$

$$M_{eq} = M + (m_1 + m_2) = 2 + 6 + 4 = 12 \text{ kg},$$

on obtient :

$$J_{eq}\ddot{\theta} + c_p\dot{\theta} = \Gamma - (m_1 - m_2)(g - \ddot{z})R$$

$$= \Gamma - \Gamma_0 + (m_1 - m_2)R\ddot{z}$$

$$\Rightarrow J_{eq}\ddot{\theta} + c_p\dot{\theta} - (m_1 - m_2)R\ddot{z}_1 = \Gamma_1. \quad (3)$$

et

$$M_{eq}\ddot{z} + c\dot{z} + kz = (M + m_1 + m_2)g + (m_1 - m_2)R\ddot{\theta}$$

$$= kz_0 + (m_1 - m_2)R\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow M_{eq}\ddot{z}_1 + c\dot{z}_1 + kz_1 - (m_1 - m_2)R\ddot{\theta} = 0. \quad (4)$$

3) La forme matricielle en transformée de Laplace des équations (3) et (4) est

$$\begin{pmatrix} 0.2s^2+2s & -0.2s^2 \\ -0.2s^2 & 12s^2+1000s+1000 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta \\ z_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice est

$\Delta = 0.2(s^2+10s)(12s^2+1000s+1000)-0.04s^2.$

$= s(2.36s^3+224s^2+2200s+2000)$

d'où

$$\theta=\frac{\begin{vmatrix} \Gamma_1 & 0 \\ 0 & 12s^2+1000s+1000 \end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{12s^2+1000s+1000}{\Delta}\Gamma_1$$

$$z_1=\frac{\begin{vmatrix} 0.2s^2+2s & \Gamma_1 \\ -0.2s^2 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{0.2s^2}{\Delta}\Gamma_1.$$

Donc

$$y_1=R\theta-z_1=\frac{s^2+100s+100}{\Delta}\Gamma_1.$$

La vitesse $v = sy_1$ de m_1 est

$$v=\frac{s^2+100s+100}{2.36s^3+224s^2+2200s+2000}\Gamma_1$$

Une calculatrice détermine les pôles de v/Γ_1 :

$-83.9284, \quad -9.9745, \quad -1.0123.$

Or, $\quad \Gamma_1(s)=\frac{1}{s}\left(20-40e^{-2s}+20e^{-4s}\right)$

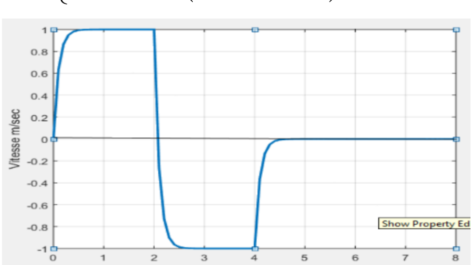
$$\Rightarrow v\approx\frac{s^2+100s+100}{2.36s(s+84)(s+10)(s+1)}\left(20-40e^{-2s}+20e^{-4s}\right)$$

$$=\frac{1}{2.36}\left(\frac{0.12}{s}+\frac{0.0024}{s+84}-\frac{0.12}{s+10}-\frac{0.0013}{s+1}\right)$$

$$v(s)\approx 0.05\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+10}\right)\left(20-40e^{-2s}+20e^{-4s}\right)$$

Donc

$$y=\begin{cases} y_1=1-e^{-10t}, & \text{si } 0\le t<2, \\ y_2=y_1-2\left(1-e^{-10(t-2)}\right) & \text{si } 2\le t<4, \\ y_3=y_2+\left(1-e^{-10(t-4)}\right) & \text{si } t\ge 4. \end{cases}$$



1-18 Deux robinets, l'un d'eau salée de débit q_1 et de concentration c_1 kg/litre et l'autre d'eau douce de débit q_2, alimentent un réservoir duquel on soutire un débit connu q. On désigne par m et M les masses du sel et de l'eau dans le réservoir.
1) Écrire les équations d'état liant q_1 et q_2 à la concentration c du sel et à la masse M dans le réservoir.
2) Quel est le point de fonctionnement si l'on désire que la concentration c soit égale à c_d et la masse de l'eau dans le réservoir soit M_d. Linéariser les équations 1) autour de ce point et déduire la matrice de transfert.liant c aux entrées.

1) Les entrées du système sont les débits q_1 et q_2. Ses sorties sont la concentration c rt la masse de l'eau dans le réservoir et l'état du système se définit par les masses m et M. La variation de cet état est donnée par les équations suivantes :

$$dm/dt = c_1q_1 - cq,$$
$$dM/dt = q_1+q_2-q.$$

La variation de la concentration c = m/M est alors

$$\dot{c}=(1/M)\dot{m}-(m/M^2)\dot{M}$$
$$=(1/M)[(c_1q_1-cq)-c(q_1+q_2-q)]$$
$$=(1/M)[(c_1-c)q_1-cq_2]$$

et

$$\dot{M}=q_1+q_2-q.$$

2) <u>Point de fonctionnement</u>
En un point de fonctionnement constant les dérivées s'annulent. D'où

$(c_1-c_d)q_{1d}-c_dq_{2d}=0.$

$q_{1d}+q_{2d}-q=0.$

$$\Rightarrow q_{1d}=\frac{c_d}{c_1}q \quad \text{et} \quad q_{2d}=\frac{c_1-c_d}{c_1}q.$$

Le point de fonctionnement est donc

$p_f = (q_{1d}, q_{2d}, c_d, M_d).$

<u>Linéarisation</u>
En posant

$u_1 = q_1-q_{1d}$, $u_2 = q_2-q_{2d}$, $x_1 = c-c_d$ et $x_2 = M-M_d$
et $y = c$
les équations d'état linéarisées sont :

$$\dot{x}_1 = -(1/M_d^2)[\overbrace{(c_1-c_d)q_{1d} - c_d q_{2d}}^{=0}]x_2$$
$$+ (q_{1d}/M_d)x_1 + [(c_1-c_d)/M_d]u_1 - (c_d/M_d)u_2,$$
$$\dot{x}_2 = u_1 + u_2.$$
$$y = x_1.$$

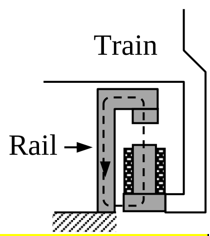
On remarque que $y = x_1$ ne dépend pas de x_2, d'où la variable d'état x_1 suffit pour déduire la matrice de transfert entre les entrées u_1 et u_2 et la sortie y. On a :

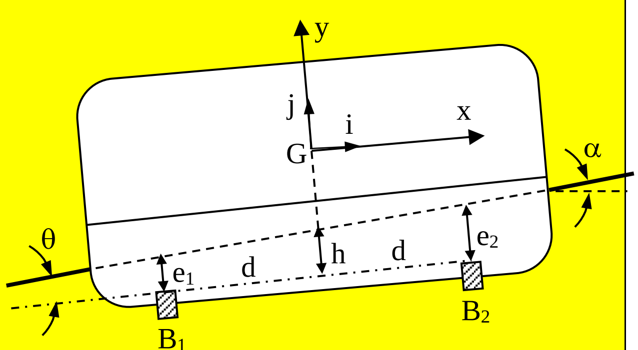
$$[s-(q_{1d}/M_d)]y = [(c_1-c_d)/M_d]u_1 - (c_d/M_d)u_2$$

ou

$$y(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{c_1-c_d}{M_d s - q_{1d}} & \dfrac{-c_d}{M_d s - q_{1d}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{pmatrix}$$

1-19 La figure ci-contre représente le principe de la lévitation d'un train. Un circuit électromagnétique est constitué du rail et d'un électroaimant de n spires fixé au train. Quand l'électroaimant est parcouru par un courant i, il est attiré vers le rail par une force $f = ki^2/e^2$ où k est une constante proportionnelle à n^2 et e est la distance séparant le rail du sommet de l'électroaimant (justifier).





La figure ci-dessus représente un wagon flottant dans l'air au-dessus d'un rail qui fait avec l'horizontal un angle α et avec le wagon un angle θ. Le centre de gravité G du wagon est équidistant des électroaimants B_1 et B_2 qui sont séparés d'une distance 2d et parcourus par des courants i_1 et i_2. La masse du véhicule est m et son moment d'inertie autour de G est J. (On ne considère pas dans ce problème la translation le long du rail mais seulement le système de suspension).

1) La distance séparant la surface d'un électroaimant du rail étant approximée par la longueur du segment e_i porté par l'axe d'une bobine et joignant sa surface au rail, écrire les équations différentielles liant les courants i_1 et i_2 à l'angle θ et à la distance moyenne h séparant les bobines du rail.
2) Linéariser ces équations autour du point de fonctionnement relatif à $h = h_0$ et $\theta = 0$ et déduire la matrice de transfert liant les fluctuations u_1, u_2 de i_1 et i_2 aux fluctuations y_1 et y_2 de h et θ.

Justification de la force d'attraction.
En négligeant les pertes dans le bobinage et le circuit magnétique, la puissance mécanique fournie sera égale à la puissance électrique reçue :

$$f\frac{de}{dt} = ui = n\frac{d\varphi}{dt}i\,. \qquad (1)$$

où φ est le flux magnétique à travers la bobine. Ce flux est lié au courant par la relation $ni = \mathcal{R}\varphi$ où $\mathcal{R}$ est la reluctance du circuit magnétique. Sachant que la perméabilité magnétique μ_a dans l'acier est beaucoup plus grande que celle μ_0 dans l'air, on a : $\mathcal{R} \approx e/\mu_0 S$. En remplaçant $\varphi = ni/\mathcal{R}$ dans (1) et en simplifiant on obtient :

$$f\frac{de}{dt} = -\mu_0 S\frac{n^2 i^2}{e^2}\frac{de}{dt}$$
$$\Rightarrow f = -\frac{ki^2}{e^2}, \quad k = \mu_0 S n^2.$$

Le signe « − » indique que la force f est attractive puisqu'elle diminue e.
Les entrées du système sont i_1 et i_2 et ses sorties sont h et θ.

1) Variation de h
L'angle que fait l'axe y (ou l'axe d'une bobine) du repère lié au wagon avec la verticale est α − θ et les bobines sont éloignées du rail de

$$e_1 = h - d.\mathrm{tg}\theta \quad \text{et} \quad e_2 = h + d.\mathrm{tg}\theta.$$

Le mouvement du wagon selon y (ou h) est

$$m\frac{d^2h}{dt^2}=\frac{ki_1^2}{(h-d.tg\theta)^2}+\frac{ki_2^2}{(h+d.tg\theta)^2}-mg\cos(\alpha-\theta)$$

Variation de θ

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2}=\frac{dki_2^2}{(h+d.tg\theta)^2}-\frac{dki_1^2}{(h-d.tg\theta)^2}\,.$$

2) Point de fonctionnement

En annulant les dérivées de h et θ et en remplaçant h par h_0 et θ par 0, on obtient les équations qui déterminent les courants i_{10} et i_{20} qui produisent les sorties désirées h_0 et 0 quand α est constant et les perturbations sont nulles.

$$\frac{k}{h_0^2}(i_{10}^2+i_{20}^2)=mg\cos\alpha,$$

$$\frac{dk}{h_0^2}(i_{10}^2-i_{20}^2)=0.$$

De ces équations on déduit que

$$i_{10}=i_{20}=h_0\sqrt{\frac{mg\cos\alpha}{2k}}=i_0.$$

Linéarisation

On pose

$$u_1=i_1-i_0,\quad u_2=i_2-i_0,$$
$$y_1=h-h_0\quad \text{et}\quad y_2=\theta.$$

Nous savons que l'accroissement d'une fonction $f(z_1, z_2, \ldots)$ au voisinage du point $z_0 = (z_{10}, z_{20}, \ldots)$ est $\Delta f\approx\Sigma(\delta f/\delta z_i)_{z_0}\Delta z_i$. En remplaçant chaque terme des équations du système par son accroissement au point de fonctionnement (i_0, h_0, $\theta_0 = 0$), on obtient les équations linéarisées suivantes :

$$m\ddot{y}_1=\frac{2ki_0}{h_0^2}u_1+\frac{2ki_0}{h_0^2}u_2-\frac{4ki_0^2}{h_0^3}y_1-(mg\sin\alpha)y_2$$

$$J\ddot{y}_2=-\frac{2ki_{10}}{h_0^2}u_1+\frac{2ki_{10}}{h_0^2}u_2-\frac{4dki_{10}^2}{h_0^3}y_2$$

qui peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{pmatrix}ms^2+a & -mg\sin\alpha\\ 0 & Js^2+da\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=h_0a/2i_{10}\begin{pmatrix}u_1+u_2\\ u_2-u_1\end{pmatrix}$$

où $a=4dki_{10}^2/h_0^3$..

Les sorties sont donc liées aux entrées par les relations

$$y_1=\frac{h_0a/2i_{10}}{\Delta}[(Js^2+da)(u_1+u_2)+mg\sin\alpha(u_2-u_1)]$$

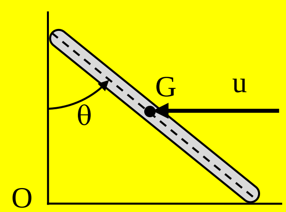
$$y_2=\frac{h_0a/2i_{10}}{\Delta}(ms^2+a)(u_2-u_1)$$

où $\Delta=(ms^2+a)(Js^2+da)$.

et la matrice de transfert est alors

$$\frac{h_0a/2i_{10}}{\Delta}\begin{pmatrix}Js^2+da-mg\sin\alpha & Js^2+da+mg\sin\alpha\\ -(ms^2+a) & ms^2+a\end{pmatrix}.$$

1-20 Une barre de masse m, de longueur 2L et de moment d'inertie $J = mL^2/3$ est appuyée entre un plan vertical et un autre horizontal. On néglige les frottements aux extrémités de la barre et on applique au centre de gravité G (au milieu de la barre) une force horizontale u.



a) En choisissant comme coordonnée généralisée l'inclinaison θ de la barre et en désignant par g l'accélération terrestre, déterminer l'équation différentielle liant u à θ par les méthodes de Lagrange et de Newton.

b) On désire équilibrer la barre avec une inclinaison $\theta_d = 45°$. Que doit être la valeur u_d de la force u ?

c) Pour m = 3 kg, $L=3/\sqrt{2}$ m et en prenant g = 10 m/sec², linéariser l'équation de ce système autour du point de fonctionnement $p_f = [u_d, \theta_d]$ et déduire sa fonction de transfert.

a) Méthode le Lagrange

L'énergie cinétique est la somme des énergies cinétique de trans lation et de rotation :

$$W_c=\frac{1}{2}m|v|^2+\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2,\quad J=\frac{mL^2}{3}.$$

Or

$$\left.\begin{array}{l} x = L\sin\theta \Rightarrow \dot{x} = (L\cos\theta)\dot{\theta} \\ y = L\cos\theta \Rightarrow \dot{y} = -(L\sin\theta)\dot{\theta} \end{array}\right\} \Rightarrow |v|^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = L^2\dot{\theta}^2.$$

Donc $W_c = \dfrac{1}{2} mL^2 (\dot{\theta}^2 + \dfrac{\dot{\theta}^2}{3}) = \dfrac{2mL^2}{3}\dot{\theta}^2.$

L'énergie potentielle est $W_p = mgL\cos\theta$.

Équation de Lagrange

$$\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\delta W_c}{\delta\dot{\theta}}\right) - \frac{\delta W_c}{\delta\theta} + \frac{\delta W_p}{\delta\theta} = e_\theta$$

$$\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\delta W_c}{\delta\dot{\theta}}\right) = \frac{4mL^2}{3}\ddot{\theta}, \quad \frac{\delta W_c}{\delta\theta} = 0, \quad \frac{\delta W_p}{\delta\theta} = -mgL\sin\theta$$

et $e_\theta = -uLco\theta.$

$$\Rightarrow \frac{4mL}{3}\ddot{\theta} = mg\sin\theta - uco\theta.$$

b) <u>Méthode de Newton</u>

Soient x et y les coordonnées de G. Comme les frottements aux extrémités de la barre sont négligeables, la réaction R_v du sol est verticale et la réaction R_h du mur est horizontale. D'où la translation de G est donnée par les équations

$$m\ddot{x} = R_h - u \quad \text{et} \quad m\ddot{y} = R_v - mg.$$

Mais

$x = L\sin\theta$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = mL[(\cos\theta)\ddot{\theta} - (\sin\theta)\dot{\theta}^2] = R_h - u, \quad (1)$$

et

$y = L\cos\theta$

$$\Rightarrow m\ddot{y} = mL[-(\sin\theta)\ddot{\theta} - (\cos\theta)\dot{\theta}^2] = R_v - m \quad (2)$$

L'équation de la rotation autour de G est

$$J\ddot{\theta} = \frac{mL^2}{3}\ddot{\theta} = R_v L\sin\theta - R_h L\cos\theta.$$

En multipliant (2) par Lsinθ et (1) par Lcosθ et en soustrayant, on obtient :

$$\frac{mL^2}{3}\ddot{\theta} = -mL^2\ddot{\theta} + mgL\sin\theta - uL\cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{4mL}{3}\ddot{\theta} = mg\sin\theta - u\cos\theta. \quad (3)$$

b) À l'équilibre les dérivées s'annulent et l'inclinaison θ sera égale à $\theta_d = 45^o$ si

$$u = mg = u_d.$$

c) En posant

$$\tilde{\theta} = \theta - \theta_d \quad \text{et} \quad \tilde{u} = u - u_d,$$

la linéarisation de (3) est

$$\frac{4mL}{3}\ddot{\tilde{\theta}} = (mg\cos\theta_d)\tilde{\theta} - (\cos\theta_d)\tilde{u} + (u_d\sin\theta_d)\tilde{\theta}$$

et en remplaçant les constantes par leurs valeurs, on obtient :

$$(12/\sqrt{2})\ddot{\tilde{\theta}} = (30\sqrt{2})\tilde{\theta} - \frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{u}$$

ou

$$(12s^2 - 60)\tilde{\theta}(s) = -\tilde{u}(s)$$

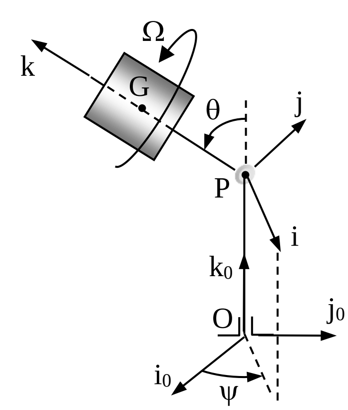
$$\Rightarrow g(s) = \frac{\tilde{\theta}(s)}{\tilde{u}(s)} = -\frac{1}{12(s^2 - 5)}.$$

1-21 Un rotor, de masse m et de tenseur d'inertie $J_G = \mathrm{diag}(I, I, I_z)$ par rapport à son centre de gravité G, tourne autour de son axe k avec une vitesse constante Ω. L'axe k, attaché à une articulation P peut tourner autour de la verticale k_0 passant par P ainsi qu'autour de l'axe i perpendiculaire en P au plan (k, k_0). La distance entre P et G est d.

1) Écrire les expressions des composantes de la vitesse de rotation ω du rotor ainsi que les composantes de la vitesse absolue v = V(G) de G dans le repère R = (G, i, j, k).

2) Appliquer la méthode de Lagrange pour déduire l'équation différentielle liant la rotation ψ du rotor autour de k_0 à sa rotation θ autour de i.

3) Déduire que si θ = π/2, le rotor tourne autour de la verticale avec une vitesse angulaire $mgd/I_z\Omega$.



1)

Vitesse de rotation dans R

La figure montre que la vitesse de rotation est

$$\omega = \dot{\theta} i + \Omega k + \dot{\psi} k_0 \qquad (1)$$

Pour écrire cette vitesse dans le repère R, il suffit d'exprimer le vecteur k_0 dans ce repère. Or k_0 étant orthogonal à i, il est dans le plan (j, k). D'où $k_0 = (\sin\theta)j + (\cos\theta)k$ et en remplaçant dans (1), on obtient :

$$\omega = \dot{\theta} i + (\dot{\psi}\sin\theta) j + (\Omega + \dot{\psi}\cos\theta)k. \qquad (2)$$

Vitesse de translation dans R

On voit sur la figure que $\overrightarrow{OG} = (OP)k_0 + d.k$. Sachant que $(OP)k_0$ est constant, on a :

$$v = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = d.\frac{dk}{dt}.$$

La longueur du vecteur k étant constante (=1), sa dérivée est $\omega \wedge k$. D'où, tenant compte de (2), on obtient :

$$\begin{aligned} v &= d.[\dot{\theta}(i \wedge k) + (\dot{\psi}\sin\theta)(j \wedge k)] \\ &= d.[(\dot{\psi}\sin\theta)i - \dot{\theta} j]. \end{aligned} \qquad (3)$$

2) Équations du mouvement

Pour appliquer la méthode de Lagrange, calculons l'énergie cinétique W_c et l'énergie potentielle W_p du rotor.

$$W_c = \frac{1}{2}\omega^T J \omega + \frac{1}{2} m v^T v.$$

Tenant compte de (2) et (3),

$$\begin{aligned} W_c &= \frac{1}{2}[I\dot{\theta}^2 + I(\dot{\psi}\sin\theta)^2 + I_z(\Omega + \dot{\psi}\cos\theta)^2] \\ &\quad + \frac{md^2}{2}[(\dot{\psi}\sin\theta)^2 + \dot{\theta}^2] \\ &= \frac{1}{2}[(I + md^2)\dot{\theta}^2 + (I + md^2)(\dot{\psi}\sin\theta)^2 \\ &\quad + I_z(\Omega + \dot{\psi}\cos\theta)^2] \end{aligned}$$

et

$$W_p = mgd\cos\theta.$$

Les termes de l'équation de Lagrange selon la coordonnée θ sont

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta W_c}{\delta\dot{\theta}} = (I + md^2)\ddot{\theta},$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta W_c}{\delta\theta} &= (I + md^2)(\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta) \\ &\quad - I_z(\Omega + \dot{\psi}\cos\theta)\dot{\psi}\sin\theta \end{aligned}$$

$$\frac{\delta W_p}{\delta\theta} = -mgd\sin\theta.$$

Comme les efforts non conservatifs sont nuls (actions extérieures et frottements), l'équation liant θ à ψ est :

$$\begin{aligned} (I + md^2)\ddot{\theta} + [I_z - (I + md^2)]\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta \\ = I_z\Omega\dot{\psi}\sin\theta - mgd\sin\theta. \end{aligned}$$

3)

θ étant constant (= π/2), on a cosθ = 0 et l'équation précédente se réduit à

$$-I_z\Omega\dot{\psi} + mgd = 0 \Rightarrow \dot{\psi} = \frac{mgd}{I_z\Omega}.$$