

## CMo-3 COMMANDE PAR RETOUR DE SORTIE

### EXERCICE 3-1

La fonction de transfert du système commandé est  $G_p(s) = (s + 4)/(s^2 - 1)$  et celle de l'organe de commande est de la forme  $G_c(s) = k(s + c)/s$ . Représenter dans le plan  $(c, k)$  l'ensemble des points pour lesquels la boucle fermée sera stable et l'erreur stationnaire de vitesse est inférieure à 0.1.

#### a) Stabilité

Appliquons la méthode de Routh.

$$G(s) = G_p(s)G_c(s) = \frac{k(s+4)((s+c))}{s(s^2-1)}$$

$$\Rightarrow P(s) = s(s^2 - 1) + k(s + 4)((s + c)) \\ = s^3 + ks^2 + [-1 + k(4 + c)]s + 4kc.$$

$s^3$	1	$-1+k(4+c)$	
$s^2$	k	$4kc$	
$s^1$	a		$a = (4+c)k - (1+4c)$
$s^0$	$4kc$		

Le système est stable si tous les éléments de la première colonne sont de même signe ( $>0$ ). D'où

$$k > 0, c > 0$$

$$\text{et } k > (1 + 4c)/(4 + c). \quad (1)$$

#### b) Erreur stationnaire de vitesse

Type de  $G(s)$ :  $n_0 = 1$ .

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = -4kc$$

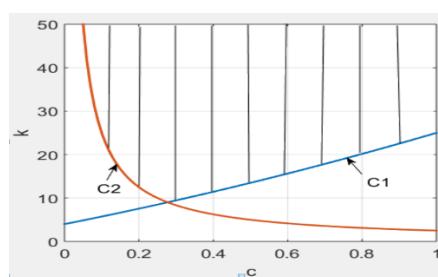
$$|e_{sv}| = |1/K_v| \leq 0.1 \Rightarrow kc \geq 10/4$$

$$\text{D'où } k \geq 2.5/c. \quad (2)$$

Traçons les courbes

$$C_1 : k = (1 + 4c)/(4 + c) \text{ et } C_2 : k = 2.5/c.$$

Un point  $(c, k)$  qui vérifie les deux conditions (1) et (2) doit se trouver dans la région hachurée de la figure suivante.



### EXERCICE 3-2

La fonction de transfert de la chaîne directe d'une boucle à retour unitaire est

$$G(s) = \frac{k(s+1)}{s(s-1)(s+10)}.$$

1) À partir de quelle valeur de  $k$  la boucle fermée sera stable ?

2) Représenter le diagramme de Bode de la fonction asymptotique  $G_a(s)$  associée à  $G(s)$  en précisant en fonction de  $k$  ses valeurs aux fréquences de cassure.

3) Estimer à partir de  $G_a(s)$  la valeur de  $k$  pour laquelle la fréquence de coupure de gain  $\omega_{cg}$  de  $G(s)$  est égale à 5 rad/sec et calculer  $M_P$ .

4) Calculer la fréquence de coupure de phase  $\omega_{cp}$  et estimer  $M_G$  de  $G_a(s)$ .

5) Vérifier les résultats précédents par Matlab.

#### 1) Stabilité

$$P(s) = s(s-1)(s+10) + k(s+1)$$

$$= s^3 + 9s^2 + (k-10)s + k.$$

Tableau de Routh

$s^3$	1	$k-10$	
$s^2$	9	k	
$s^1(x9)$	a		$a = 8k - 90$
$s^0$	k		

D'après ce tableau le système sera stable si  $k > 90/8 = 11.25$ .

#### 2) Diagramme asymptotique de Bode

$$G(s) = \frac{k(s+1)}{s(s-1)(s+10)}.$$

Ses fréquences de cassures sont :

$$0, 1, 10.$$

Tableau de  $G_a(s)$

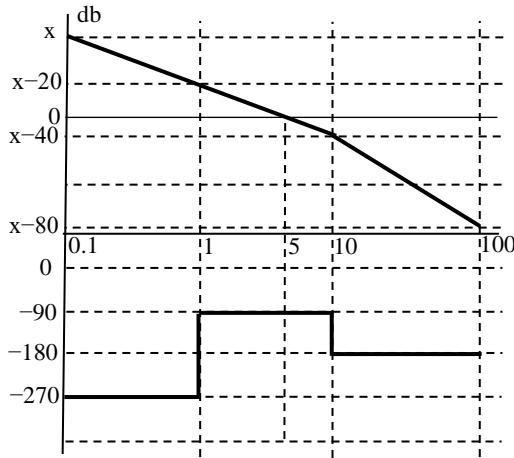
Intervalle	$G_a(s)$	$ G_a _{int} \text{ db}$	$m \text{ db/dc}$	$\phi^\circ$
$0.1 < \omega \leq 1$	$-k/10s$	x	-20	-270
$1 < \omega \leq 10$	$k/10s$	x-20	-20	-90
$10 < \omega \leq 100$	$k/s^2$	x-40 → x-80	-40	-180

$$x = 20\log(k)$$

À noter que quand  $\omega \rightarrow 0$ ,

$$G(j\omega) \rightarrow -90^\circ - \arg(j\omega - 1) \rightarrow -90^\circ - 180^\circ = -270^\circ.$$

Diagramme de  $G_a(s)$



### 3) Valeur de $k$ pour $\omega_{cg} = 5 \text{ rad/s}$ et MP.

Dans l'octave [5, 10] le gain  $|G_a|$  décroît de 6 db (20 db/dc). Comme à la fréquence 10 le gain est  $x-40$  db, on déduit que  $\omega_{cg} = 5$  si  $x-40+6 = x-36 = 0$  db, d'où

$$x = 36 = 20\log(k) \Rightarrow k = 10^{36/20} = 63.1.$$

$$\begin{aligned} \text{MP} &= \arg G(j\omega_{cg}) + 180 \\ &= \arg(j\omega_{cg} + 1) - 90^\circ - \arg(j\omega_{cg} - 1) - \arg(j\omega_{cg} + 10) + 180 \\ &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{5}{1} - 90^\circ - (180 - \operatorname{tg}^{-1} \frac{5}{1}) - \operatorname{tg}^{-1} \frac{5}{10} + 180 \\ &= 2\operatorname{tg}^{-1} \frac{5}{1} - 90^\circ - \operatorname{tg}^{-1} \frac{5}{10} = 40.8^\circ. \end{aligned}$$

### 4) $\omega_{cp}$ et MG

$$G(s) = \frac{k(s+1)}{s(s-1)(s+10)}$$

$$\begin{aligned} \text{numG}(j\omega) &= -j(j\omega+1)(-j\omega-1)(-j\omega+10) \\ &= (\omega-j)[-(\omega^2+10)-(10-1)j\omega] \\ \text{Im}[G(j\omega_{cp})] &= 0 \Rightarrow -(10-1)\omega_{cp}^2 + (\omega_{cp}^2 + 10) \\ &= -8\omega_{cp}^2 + 10 \Rightarrow \omega_{cp} = \sqrt{5}/2 = 1.12 \text{ rad/s}. \end{aligned}$$

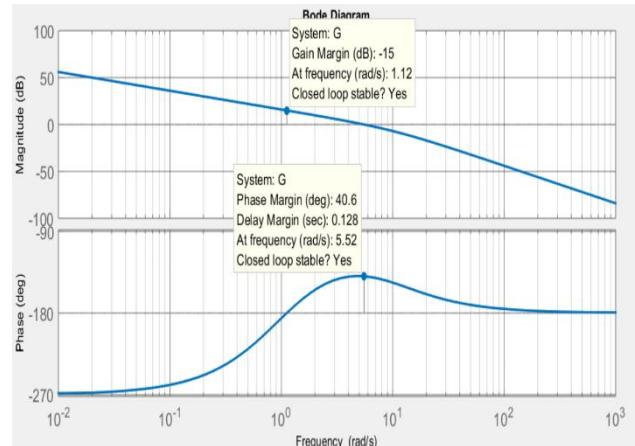
Cette fréquence appartient à la décade [1, 10] où le gain en 1 est  $x-20$  et la pente est  $m=-20$ . D'où le gain en db à la fréquence  $\omega_{cp} = 1.12$  est

$$20\log|G(1.12j)| = -20\log(1.12) + x-20 = 15 \text{ db.}$$

Donc  $MG = -15 \text{ db.}$

### 5) Vérification

```
>> n = -1; d = [0 1 -10];
>> G = zpk(n,d,63.1);
>> bode(G)
```



### EXERCICE 3-3

1) En déterminant les points de bifurcations et les asymptotes, construire l'allure du lieu des pôles de la boucle fermée T à retour unitaire quand K varie de 0 à l'infini (lieu des racines) sachant que la fonction de transfert de la boucle ouverte est

$$KG(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s+9)}.$$

- 2) Déterminer la valeur de K pour laquelle les pôles de T sont situés sur une même verticale.
- 3) Expliquer pourquoi en cette position des pôles de T la constante de temps de la réponse sera minimum.
- 4) Vérifier les résultats de cet exercice par Matlab.

#### 1) Allure du lieu des racines

##### a) $\mathcal{L} \cap \mathcal{R}$

Un point  $p$  de  $\mathcal{R}$  appartient au lieu  $\mathcal{L}$  si et seulement s'il a à sa droite un nombre impair de zéros et de pôles de  $G(s)$ . Cette fonction a un zéro  $z_1 = -1$  et 3 pôles  $q_1 = -9$ ,  $q_{2,3} = 0$ . Du pôle  $-9$  part une branche sur l'axe des réels et se dirige vers le zéro  $-1$  et du pôle double  $0$  (point de bifurcation) partent deux branches avec une inclinaison de départ  $\pi/2$  et se dirigent vers l'infini.

##### b) Points de bifurcation

Ils sont les solutions de  $N'D - D'N = 0$  c.à.d. de

$$Ks^2(s+9) - K(3s^2 + 18s)(s+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2s(s^2 + 6s + 9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_{b1} = 0, \\ s_{b2} = -3 \pm \sqrt{9-9} = -3. \end{cases}$$

$s_{b1} = 0$  est évidemment un point de bifurcation puisqu'il est le point de départ de deux branches. Le point de bifurcation  $s_{b2} = -3$ , appartenant à la branche réelle, il est nécessairement un point de rencontre des trois branches. Au point  $s_{b2}$  correspond le gain

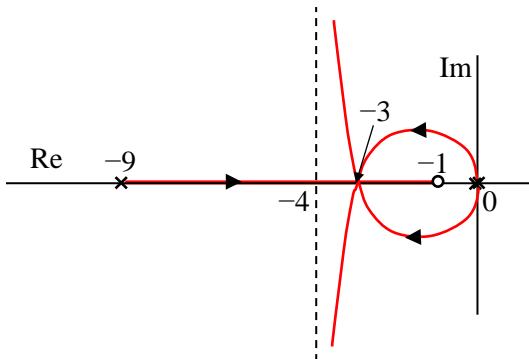
$$K_b = -\frac{1}{G(s_{b2})} = -\frac{9(-3+9)}{(-3+1)} = 27.$$

### c) Asymptotes

Comme  $n - m = 3 - 1 = 2$ , les deux branches qui partent de 0 tendent vers des asymptotes d'inclinaisons  $\theta = (2k + 1)\pi/2$ ,  $k = 0$  ou 1, et se rencontrent au point  $a = [(0 + 0 - 9) - (-1)]/2 = -4$ .

### d) Allure

On déduit de ce qui précède l'allure suivante.



### 2) Pôles de même partie réelle.

Si les trois pôles de la boucle fermée ont la même partie réelle  $-\sigma$ , leur somme  $-3\sigma$  est l'opposé du coefficient de  $s^2$  du polynôme caractéristique

$$P(s) = s^2(s+9) + K(s+1) = s^3 + 9s^2 + Ks + K.$$

$$\Rightarrow \sigma = 9/3 = 3.$$

Or un pôle de la boucle fermée annule  $P(s)$ . D'où, comme  $-3$  doit être un pôle, on a :

$$P(-3) = -27 + 81 - 3K + K = 0 \Rightarrow K = 54/2 = 27.$$

Les deux autres pôles sont situés sur les branches qui divergent vers l'infini et ils sont les racines de

$$\frac{P(s)}{(s+3)} = \frac{s^3 + 9s^2 + 27s + 27}{s+3} = s^2 + 6s + 9.$$

$$\Rightarrow p_{2,3} = -3 \pm \sqrt{9-9} = -3.$$

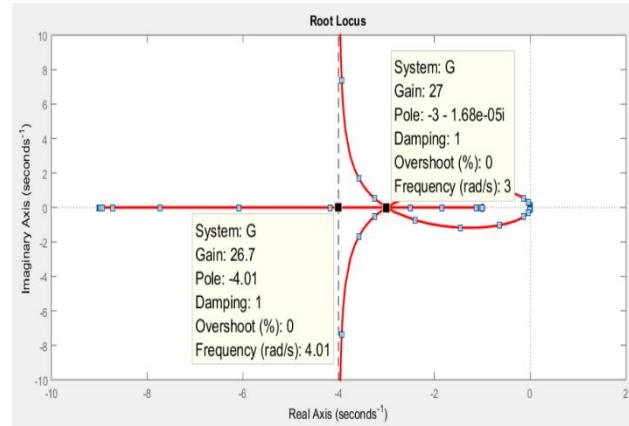
Ce résultat peut être déduit directement du point de bifurcation  $s_{b2}$  obtenu en 1).

### 3) Constante de temps minimum

Pour  $K = K_b$ , la constante de temps est  $\tau = 1/\sigma = 1/3$  sec. Si  $K$  augmente le pôle sur la branche réelle se rapproche de l'axe des imaginaires et  $\tau$  augmente. Si  $K < K_b$ , la partie réelle des pôles sur les branches complexes est à droite de  $-3$  et  $\tau > 1/3$ . La constante de temps est donc minimum pour  $K = K_b$ .

### 4) Vérification

```
>> n = -1; d = [0 0 -9];
>> G = zpk(n,d,1);
>> rlocus(G)
```



### EXERCICE 3-4

Pour  $K < 0$ , en examinant les démonstrations des règles R1 à R8, indiquer celles qui doivent être modifiées et de quelle manière.

Représenter le lieu des racines du polynôme caractéristique  $P(s, K) = s^2(s+1)^2 + K(s+2)$  pour a)  $0 \leq K < \infty$ , b)  $-\infty < K < 0$ .

$$\text{R2} \rightarrow p \in \mathcal{L} \Leftrightarrow \arg[G(p)] = 2k\pi.$$

$$\text{R3} \rightarrow p \in \mathcal{L} \Leftrightarrow (m_d + n_d) \text{ pair.}$$

$$\text{R7} \rightarrow \varphi_d = \frac{1}{V} \left[ \sum_i \arg(q_d - z_i) - \sum_{j \neq d} \arg(q_d - q_j) - 2k\pi \right]$$

$$\varphi_a = \frac{1}{V} \left[ \sum_{j \neq a} \arg(z_a - q_j) - \sum_i \arg(z_a - z_i) + 2k\pi \right].$$

$$\text{R8} \rightarrow a = \frac{\sum q_j - \sum z_i}{n - m} \quad \text{et} \quad \theta = \frac{2k\pi}{n - m}.$$

### Lieux des racines

a)  $\mathcal{L} \cap \mathcal{R}$

$$G(s) = \frac{s+2}{s^2(s+1)^2}$$

$$z_1 = -2, p_{1,2} = 0 \text{ et } p_{3,4} = -1.$$

$$\mathcal{L} \cap \mathcal{R} = \begin{cases} (-\infty, -2] \text{ si } K \geq 0 \\ [-2, -1] \cup [-1, 0] \cup [0, +\infty] \text{ si } K \leq 0. \end{cases}$$

### b) Points de bifurcation

Ils vérifient  $D'N - N'D = 0, \forall K$ .

$$\Rightarrow (4s^3 + 6s^2 + 2s)(s+2) - s^2(s+1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow s(3s^3 + 12s^2 + 13s + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_{b1} = 0 \\ s_{b2} = -2.4574 \\ s_{b3} = -1 \\ s_{b4} = -0.5426. \end{cases}$$

0 et -1 étant des pôles doubles sont des points de bifurcations  $\forall K$ . D'autre part,

$$\begin{cases} s_{b2} \in \mathcal{L} \text{ si } K \geq 0 \\ s_{b4} \in \mathcal{L} \text{ si } K \leq 0. \end{cases}$$

En chaque point de bifurcation arrivent ou partent deux branches dont l'inclinaison est un multiple de  $\pi/2$ . Chacun de ces points est un pôle double de la boucle fermée.

### c) Asymptotes

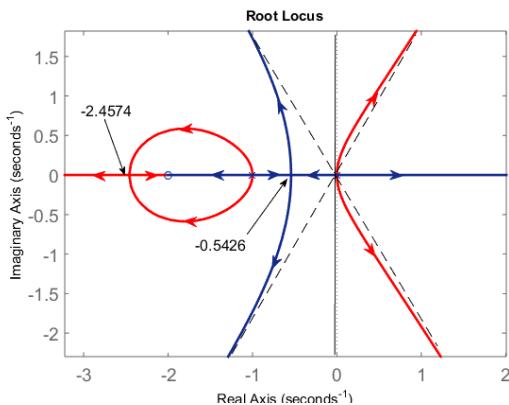
$n - m = 3$  asymptotes d'intersection

$$a = [(0 + 0 - 1 - 1) - (-2)]/3 = 0 \quad \forall K$$

$$\theta = \begin{cases} (2k+1)\pi/3 \text{ si } K \geq 0 \\ (2k\pi/3) \text{ si } K \leq 0. \end{cases}$$

### d) Vérification par Matlab

```
>> n = -2; d = [0 0 -1 -1];
>> G = zpk(n,d,1); G_ = zpk(n,d,-1);
>> rlocus(G)
>> hold
Current plot held
>> rlocus(G_)
```



### EXERCICE 3-5

Un procédé  $G_p(s) = 1/(s^2 - a^2)$ ,  $a > 0$ , est commandé par le régulateur PID,  $G_c(s) = k(s + \alpha)(s + \beta)/s$ ,  $k > 0$  et  $\beta > 0$ . En choisissant  $\alpha = a$  pour simplifier le pôle stable de  $G_p$ ,

a) à partir de quelle valeur de  $k$  la boucle fermée  $T(s)$  sera stable.

b) Montrer que les pôles complexes de  $T(s)$  décrivent un cercle de centre  $-\beta$  et de rayon  $R = [\beta(\beta + a)]^{1/2}$ . Déduire l'allure du lieu des racines et déterminer ses points de bifurcation et les valeurs de  $k$  correspondantes à ces points.

c) On désire une réponse de constante de temps  $\tau$  et de facteur d'amortissement 0.5. Déterminer  $k$  et  $\beta$  en fonction de  $a$  et  $\tau$ .

### a) Stabilité

$$kG(s) = \frac{1}{s^2 - a^2} \cdot \frac{k(s+a)(s+\beta)}{s} = \frac{k(s+\beta)}{s(s-a)}$$

$$\Rightarrow P(s) = s(s-a) + k(s+\beta) = s^2 + (k-a)s + k\beta$$

Les racines de  $P(s)$ , dont le produit est  $k\beta > 0$ , sont de même signe ou complexes. Leur partie réelle sera négative si leur somme  $-(k-a) < 0$ . Le système est donc stablessi  $k > a$ .

### b) Lieu des pôles complexes de $T(s)$

Les pôles de  $T(s)$  sont les racines de  $P(s)$ . En posant  $z = s + \beta$ , le vecteur d'origine  $-\beta$  et d'extrémité  $s$ ,

$$P(s) = 0 \Leftrightarrow (z - \beta)^2 + (k - a)(z - \beta) + k\beta = 0$$

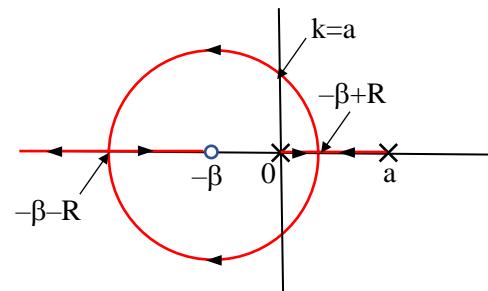
$$\Leftrightarrow z^2 - (2\beta - k + a)z + \beta^2 + a\beta = 0.$$

Or, si  $z$  est une racine complexe de ce trinôme,  $\bar{z}$  est l'autre racine et leur produit est  $\beta^2 + a\beta$ , d'où

$$z\bar{z} = |z|^2 = |s + \beta|^2 = \beta^2 + a\beta.$$

Ceci montre que les pôles complexes de  $T(s)$  son situés sur un cercle de centre  $-\beta$  et de rayon  $R = \sqrt{\beta^2 + a\beta}$ .

### Allure du lieu des racines



$\mathcal{L} \cap \mathcal{R} = (-\infty, -\beta] \cup [0, a]$ . Les pôles qui partent de 0 et a se rencontrent au point de bifurcation  $s_{b1} = -\beta + R$  puis se déplacent symétriquement sur le cercle pour se rencontrer de nouveau au point de bifurcation  $s_{b2} = -\beta - R$ . Ensuite l'un des deux pôles se dirige vers le zéro  $-\beta$  et l'autre vers l'infini. Les valeurs de k aux points de bifurcation sont :

$$k_{b1} = -\frac{1}{G(s_{b1})} = \frac{s_{b1}(a - s_{b1})}{R}$$

$$k_{b1} = -\frac{1}{G(s_{b2})} = \frac{s_{b2}(a - s_{b2})}{R}$$

### c) Paramètres de l'organe de commande

$$P(s) = s^2 + (k - a)s + k\beta$$

$$\tau = \frac{1}{\xi\omega_n} \Rightarrow \omega_n = \frac{2}{\tau}$$

$$2\xi\omega_n = k - a \Rightarrow k = \frac{2}{\tau} + a.$$

$$\omega_n^2 = k\beta \Rightarrow \beta = \frac{4}{\tau(a\tau + 2)}.$$

### EXERCICE 3-6

La sensibilité d'un pôle p aux variations du paramètre K vérifiant  $1 + KG(p) = 0$  se définit par

$$S_p^K = \frac{dp/p}{dK/K} = \frac{K}{p} \frac{dp}{dK}.$$

Expliquer pourquoi il est préférable que p ne soit pas en un point de bifurcation.

En un point de bifurcation p,  $dK/ds|_{s=p} = 0$  et  $dp/dK = \infty$  d'où p se déplace considérablement pour une petite variation du paramètre K ce qui écarte de beaucoup la réponse de celle attendue.

### EXERCICE 3-7

Soient  $G_p(s) = 1/(s^2 - 1)$  et  $G_c(s) = k(s + 1)(s + \beta)/s$  les fonctions de transfert du système commandé et de l'organe de commande.

a) Écrire le polynôme caractéristique de la boucle fermée  $T(s)$  et déterminer k et  $\beta$  pour lesquels la constante de temps et le facteur d'amortissement des pôles de  $T(s)$  sont  $\tau = 2/3$  sec et  $\xi = 3/8$ .

b) En donnant à  $\beta$  la valeur trouvée dans a), déterminer la valeur de k pour laquelle la bande

passante de la boucle fermée est  $BP = 20$  rd/s et vérifier sur l'abaque de Nichols.

c) Calculer la valeur de  $\xi$  et de  $\tau$  de la boucle fermée et représenter sa réponse temporelle.

a)  $\beta$  et  $k$  pour  $\tau = 2/3$  et  $\xi = 3/8$

$$G(s) = \frac{k(s + \beta)}{s(s - 1)}$$

$$\Rightarrow P(s) = s^2 + (k - 1)s + k\beta$$

$$\xi\omega_n = \frac{1}{\tau} = \frac{k - 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} k = 2/\tau + 1 = 4 \\ \omega_n = \frac{(4 - 1)/2}{(3/8)} = 4 \end{cases}$$

$$\omega_n^2 = 16 = k\beta \Rightarrow \beta = \frac{16}{4} = 4.$$

b) Valeur de k pour  $\omega_b = 20$  rd/s

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{k(s + 4)}{s^2 + (k - 1)s + 4k}$$

$$|T(j\omega_b)|^2 = \frac{k^2(\omega_b^2 + 16)}{(4k - \omega_b^2)^2 + (k - 1)^2\omega_b^2} = \frac{1}{2}$$

car le gain à la fréquence  $\omega_b$  est  $1/2^{1/2}$  ou  $-3$  db. En arrangeant les termes de l'équation précédente, on obtient :

$$(\omega_b^2 + 16)k^2 + 10\omega_b^2k - \omega_b^2(\omega_b^2 + 1) = 0$$

$$\text{ou } 416k^2 + 4000k - 400(401) = 0.$$

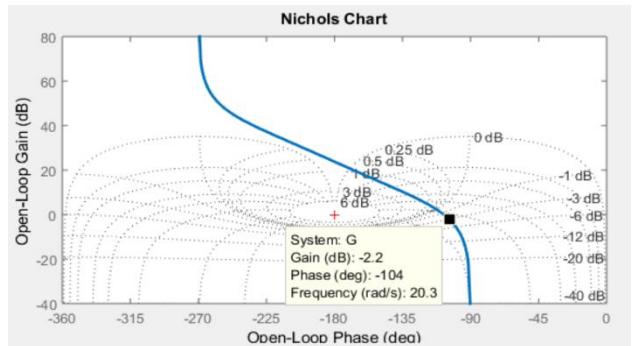
La solution positive de cette équation est  $k = 15.4$

Vérification sur l'abaque de Nichols

>> n = -4; d = [0 1];

>> G = zpk(n,d,15.4);

>> nichols(G)



On voit que la courbe de Black rencontre le niveau de gain  $-3$  db à une fréquence d'environ  $20$  rd/s.

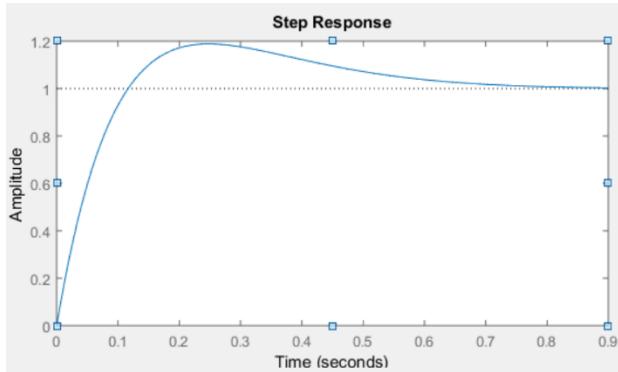
c) Calcul de  $\xi$  et de  $\tau$  pour  $k = 15.4$  et  $\beta = 4$ .

$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{k(s+4)}{s^2 + (k-1)s + 4k}$$

$$\omega_n^2 = 4(15.4) \Rightarrow \omega_n = 7.85 \text{ rd/s.}$$

$$\xi = \frac{14.4}{2(7.85)} = 0.92, \quad \tau = \frac{1}{(0.92)(7.85)} = 0.14 \text{ sec.}$$

$$T(s) = \frac{15.4s + 61.6}{s^2 + 14.4s + 61.6}$$



### EXERCICE 3-8

Le fonction de transfert de l'objet à commander est  $G_p(s) = 1/(s^2 + 2s + 25)$ .

1) Déterminer la valeur  $k_p$  de la commande P,  $G_c(s) = k_p$ , pour que la fréquence de coupure du gain asymptotique soit  $\omega_{cga} = 10 \text{ rad/sec}$ . Calculer l'erreur stationnaire de position  $e_{sp}$  et estimer la marge de phase MP.

2) Déterminer le facteur  $k_d$  de la commande PD,  $G_c(s) = k_d(s + 5)$ , afin que  $\omega_{cga}$  conserve sa valeur précédente. Calculer la nouvelle valeur de  $e_{sp}$  et estimer celle de MP.

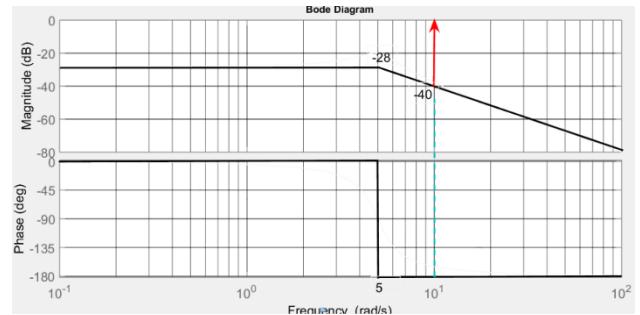
3) Pour annuler  $e_{sp}$ , on introduit un intégrateur et un autre zéro en  $-5$ . Que doit être la valeur de  $k_d$  de la commande PID,  $G_c(s) = k_d(s + 5)^2/s$ , afin de conserver la même valeur de  $\omega_{cga}$ ? Estimer MP et le dépassement maximum DM et vérifier ces résultats par Matlab.

1) Valeur de  $k_p$  pour  $\omega_{cga} = 10 \text{ rd/s}$

Pour  $k_p = 1$ , le tableau de la fonction asymptotique  $G_a(s)$  est le suivant.

Intervalle	$G_a(s)$	$ G_a _{int} \text{ db}$	$m \text{ db/dc}$	$\varphi^\circ$
$0.1 < \omega \leq 5$	$1/5$	-14	0	0
$5 < \omega \leq 100$	$1/s$	-14 → -40	-20	-90

Dans l'octave [5, 10],  $|G_a|$  décroît de 12 db, d'où  $|G_a(10j)|_{db} = -28 - 12 = -40$ . Il faut donc hausser la courbe de  $|G_a(j\omega)|$  de 40 db pour qu'il passe par 0 db à la fréquence 10 rd/s et avoir  $\omega_{cga} = 10 \text{ rd/s}$ . Ceci revient à prendre  $k_p = 10^{40/20} = 100$ .



Erreur stationnaire de position.

Type de  $k_p G_p(s)$  est  $n_0 = 0$

$$\Rightarrow e_{sp} = \frac{1}{1 + k_p G_p(0)} = \frac{1}{1 + 100 / 25} = 0.2.$$

Estimation de la marge de phase

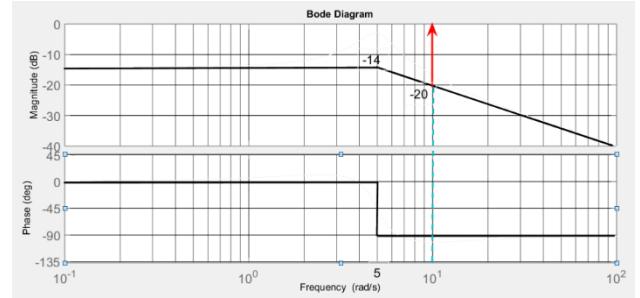
$$\begin{aligned} MP &= 180^\circ + \arg[G_p(j\omega_{cga})] \\ &= 180^\circ - \arg[(25 - \omega_{cga}^2) + 2j\omega_{cga}] \\ &= 180^\circ - \left[ 180 - \operatorname{Arctg} \frac{20}{75} \right] \approx 15^\circ \end{aligned}$$

2) Commande PD :  $k_p(s + 5)$

$$k_d G(s) = \frac{k_d(s + 5)}{s^2 + 2s + 25}$$

Tableau de  $G_a$

Intervalle	$G_a(s)$	$ G_a _{int} \text{ db}$	$m \text{ dc/dc}$	$\varphi^\circ$
$0.1 < \omega \leq 5$	$1/5$	-14	0	0
$5 < \omega \leq 100$	$1/s$	-14 → -40	-20	-90



Dans l'octave [5, 10],  $|G_a|$  décroît de 6 db, d'où  $|G_a(10j)|_{db} = -14 - 6 = -20$ . Il faut donc hausser la courbe de  $|G_a(j\omega)|$  de 20 db pour qu'il passe par 0 db

à la fréquence 10 rd/s et avoir  $\omega_{cga} = 10$  rd/s. Ceci revient à prendre  $k_d = 10^{20/20} = 10$ .

#### Erreurs stationnaires de position.

Type de  $k_d G(s)$  est  $n_0 = 0$

$$\Rightarrow e_{sp} = \frac{1}{1 + k_d G(0)} = \frac{1}{1 + 50 / 25} = 0.33.$$

#### Estimation de la marge de phase

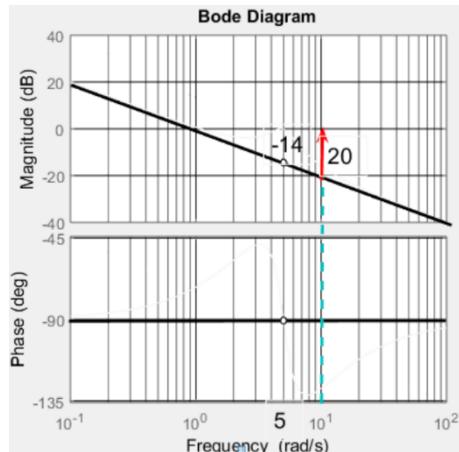
$$\begin{aligned} MP &= 180^\circ + \arg[G(j\omega_{cga})] \\ &= 180^\circ + \arg(5 + j\omega_{cga}) - \arg[(25 - \omega_{cga}^2) + 2j\omega_{cga}] \\ &= 180^\circ + \operatorname{Arctg} \frac{10}{5} - \left[ 180 - \operatorname{Arctg} \frac{20}{75} \right] \approx 78.37^\circ \end{aligned}$$

#### 3) Commande PID.

$$k_d G(s) = \frac{k_d (s + 5)^2}{s^3 + 2s^2 + 25s}$$

#### Tableau de $G_a$

Intervalle	$G_a(s)$	$ G_a _{int}$ db	$m$ dc/dc	$\phi^\circ$
$0.1 < \omega \leq 5$	$1/s$	20	-20	-90
$5 < \omega \leq 100$	$1/s$	-14 → 40	-20	-90



Dans l'octave [5, 10],  $|G_a|$  décroît de 6 db, d'où  $|G_a(10j)|_{db} = -14 - 6 = -20$ . Il faut donc hausser la courbe de  $|G_a(j\omega)|$  de 20 db pour qu'il passe par 0 db à la fréquence 10 rd/s et avoir  $\omega_{cga} = 10$  rd/s. Ceci revient à prendre  $k_d = 10^{20/20} = 10$ .

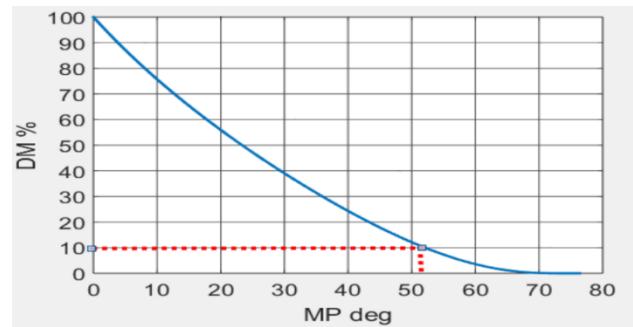
#### Estimation de la marge de phase

$$MP = 180^\circ + \arg[G(j\omega_{cga})]$$

$$\begin{aligned} &= 180^\circ + 2 \arg(5 + j\omega_{cga}) \\ &\quad - 90 - \arg[(25 - \omega_{cga}^2) + 2j\omega_{cga}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 180^\circ + 2 \operatorname{Arctg} \frac{10}{5} \\ &\quad - 90 - \left[ 180 - \operatorname{Arctg} \frac{20}{75} \right] \approx 51.8^\circ \end{aligned}$$

En approximant la boucle fermée par un système de second ordre, la relation entre la marge de phase et le dépassement maximum est donnée par la courbe suivante.

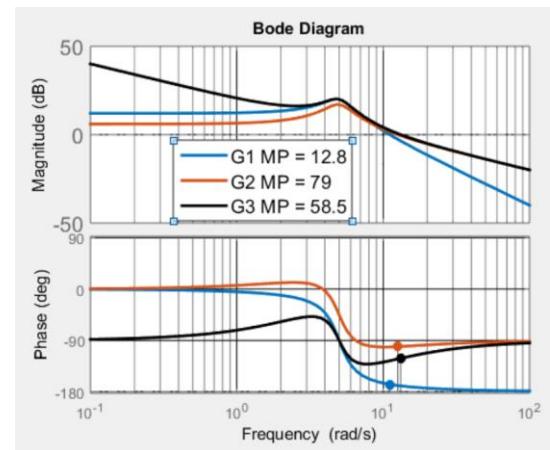


On lit sur cette courbe que pour  $MP = 51.8^\circ$  le dépassement maximum est  $DM = 10\%$ .

#### Vérification par Matlab

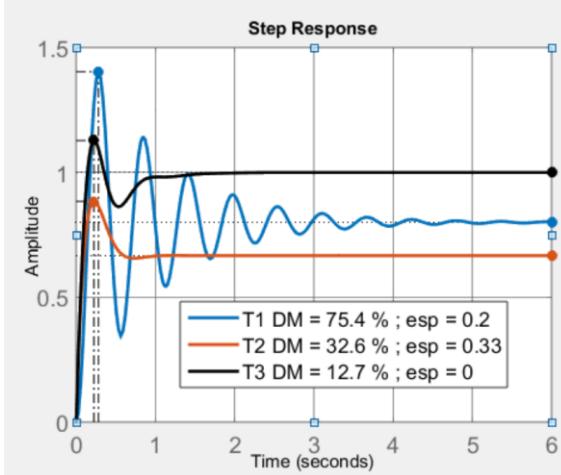
##### Stabilité

```
>> n1 = 100; d1 = [1 2 25];
>> n2 = 10*[1 5]; d2 = d1;
>> n3 = 10*[1 10 25]; d3 = [1 2 25 0];
>> G1 = tf(n1,d1);
>> G2 = tf(n2,d2);
>> G3 = tf(n3,d3);
>> bode(G1,G2,G3)
```



### Erreurs stationnaires de position et Dépassement maximum.

```
>> T1 = feedback(G1,1);
>> T2 = feedback(G2,1);
>> T3 = feedback(G3,1);
>> step(T1,T2,T3)
```



Les résultats fournis par Matlab ne sont pas loin de ceux estimés à partir des diagrammes asymptotiques de Bode.

### EXERCICE 3-9

On commande l'objet instable  $G_p(s) = 1/(s^2 - 1)$  par le compensateur  $G_c(s) = k(s + 1)/(s + a)$ .

1) Déterminer  $a$  et  $k$  pour que la constante de temps de la boucle fermée  $\tau$  et le facteur d'amortissement  $\xi$  soient égales à 0.25sec et 0.707. Déduire l'erreur stationnaire de position et la marge de phase MP.

2) Vérifier par Matlab les résultats de 1).

1)

a) Calcul de  $a$  et  $k$  pour avoir  $\tau = \frac{1}{4}$  sec et  $\xi = \frac{2^{1/2}}{2}$

$$G(s) = G_c(s)G_p(s) = \frac{k}{(s-1)(s+a)}.$$

$$P(s) = s^2 + (a-1)s + (k-a) \Rightarrow 2\xi\omega_n = a-1 \text{ et } \omega_n^2 = k-a$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{1}{\xi\omega_n} = \frac{2}{a-1} = \frac{1}{4} \Rightarrow a = 9$$

$$\Rightarrow \omega_n = \frac{a-1}{2\xi} = \frac{8}{\sqrt{2}} \Rightarrow k-a = \frac{64}{2} = 32 \Rightarrow k = 32+9 = 41.$$

c) Calcul de  $e_{sp}$

$G(s)$  de type  $n_0 = 0$

$$\Rightarrow e_{sp} = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{1+G(0)} = \frac{1}{1-41/9} = -\frac{9}{32} = -0.28.$$

### d) Calcul de MP

$$MP = \arg[G(j\omega_{cg})] + 180^\circ \text{ avec } G(s) = \frac{41}{s^2 + 8s - a}$$

$$|G(j\omega_{cg})| = 1 \Rightarrow 41^2 = (-9 - \omega_{cg}^2)^2 + 64\omega_{cg}^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 82x + 81 - 41^2 = 0, \quad x = \omega_{cg}^2.$$

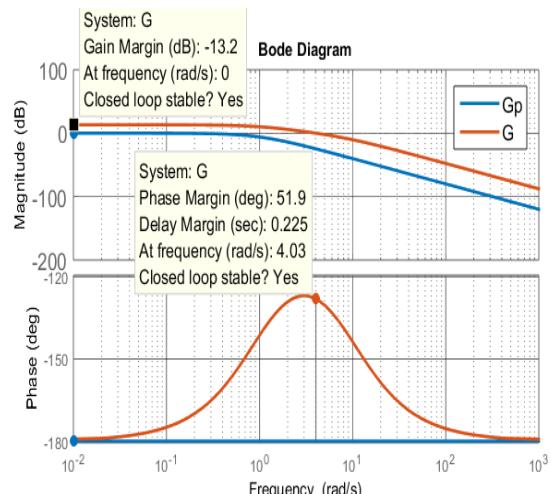
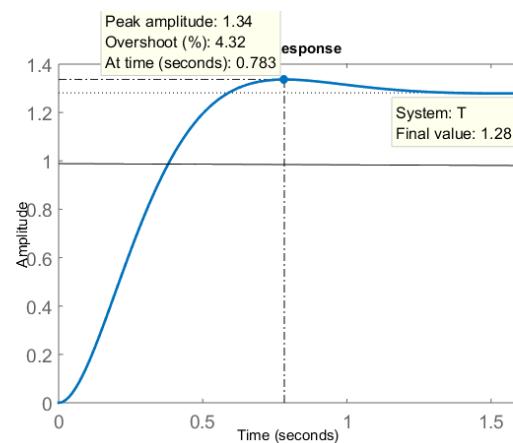
La solution positive de cette équation est  $x = 16.28$

$$\Rightarrow \omega_{cg} = 4.035.$$

$$\arg[G(j\omega_{cg})] = -[180^\circ - \tan^{-1}(4.035)] - \tan^{-1}(4.035/9)$$

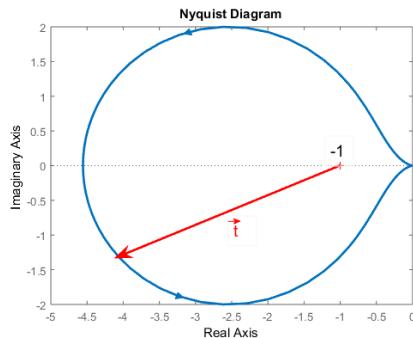
$$\Rightarrow MP = 76.081 - 24.15 \approx 52^\circ.$$

### Vérification



```
>> np = []; dp = [1 -1]; nc = -1; dc = -9;
>> Gp = zpk(np,dp,1); Gc = zpk(nc,dc,41);
>> G = Gc*Gp; T = feedback(G,1);
>> step(T)
>> bode(Gp,G)
```

Pour  $a = 9$  et  $k = 41$ , on voit bien sur la réponse temporelle que le DM = 4.3 % c.à.d.  $\xi \approx 0.707$ ,  $e_{sp} = 1.28 - 1 = 0.28$ .et sur le diagramme de Bode, on lit que MP = 52°. On lit d'autre part que MG = -13.2. Bien que cette marge est négative, le système est stable puisque à la fréquence  $\omega_{cp} = 0$  la phase est croissante. On peut s'assurer de cette stabilité par la courbe de Nyquist suivante.



Le vecteur  $t = G(j\omega) - (-1)$  effectue, quand  $\omega$  croît, un tour dans le sens des  $\omega$  croissants ( $N = 1$ ) et comme le nombre des pôles à prp de  $G$  est  $P = 1$ , le nombre de pôles de  $T$  à prp est  $Z = P - N = 0$  et le système est stable.

### EXERCICE 3-10

La fonction de transfert du système à commander par l'organe  $G_c(s) = k(s+1)/(s+a)$ , est

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}.$$

1) Montrer que le point de bifurcation  $s_b \rightarrow -1$  quand  $a \rightarrow \infty$ . Retrouver ce résultat par le lieu des racines en montrant que  $1 + (2a/3)(s_b+1)/s_b(s_b+4/3) = 0$ .

2) Pour  $a = 7$ , déterminer par le calcul le pôle  $p$  sur la bissectrice et la valeur de  $k$  correspondante.

### 1) Limite de $s_b$

$$a) G(s) = G_c(s)G_p(s) = \frac{k}{s(s+a)(s+2)} = \frac{k}{s^3 + (2+a)s^2 + 2as}$$

Un point de bifurcation  $s_b$  vérifie

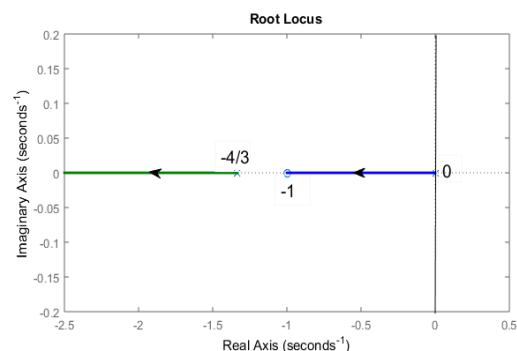
$$3s_b^2 + 2(2+a)s_b + 2a = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow s_b &= \frac{-(2+a) \pm \sqrt{(2+a)^2 - 6a}}{3} = \frac{-(2+a) \pm \sqrt{a^2 - 2a + 4}}{3} \\ &= \frac{-(2+a) \pm \sqrt{(a-1)^2 + 3}}{3} \xrightarrow{a \rightarrow \infty} \frac{-(2+a) \pm (a-1)}{3} = \begin{cases} -1 \\ -\infty \text{ à rejeter} \end{cases} \end{aligned}$$

### b) Autre méthode

$$(1) \Leftrightarrow 1 + \frac{2a + 2as_b}{3s_b^2 + 4s_b} = 1 + \frac{(2a/3)(s_b + 1)}{s_b(s_b + 4/3)} = 1 + G_b(s) = 0$$

Quand  $a$  varie  $s_b$  décrit le lieu des racines de  $1 + G_b(s)$



On voit que quand  $a \rightarrow \infty$ ,  $s_b \rightarrow -1$  ou vers  $-\infty$  (à rejeter car  $s_b$  doit être fini).

### 2) Calcul de $p$ et $k$ quand $a = 7$

$$\text{Pour } a = 7, G(s) = \frac{k}{s^3 + 9s^2 + 14s}$$

Polynôme caractéristique :  $P(s) = s^3 + 9s^2 + 14s + k$

s sur la 2<sup>me</sup> bissectrice  $\Rightarrow s = -\sigma + j\sigma$ .

$$\Rightarrow (-\sigma + j\sigma)[(-\sigma + j\sigma)^2 + 9(-\sigma + j\sigma) + 14] + k = 0$$

$$\Rightarrow (-\sigma + j\sigma)[j(-2\sigma^2 + 9\sigma) - 9\sigma + 14] + k = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\sigma^3 - 14\sigma + k = 0 \Rightarrow k = 2\sigma(7 - \sigma^2) \Rightarrow \sigma \leq \sqrt{7} \\ \sigma^2 - 9\sigma + 7 = 0 \Rightarrow \sigma = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 28}}{2} = \begin{cases} 0.86 \\ 8.14 \text{ à rejeter.} \end{cases} \end{cases}$$

$$k = 2(0.86)(7 - 0.86^2) = 10.77.$$

Les valeurs de  $\sigma$  et  $k$  obtenues par calcul sont voisines de celles lues sur le lieu des racines fourni par Matlab (exemple 3-14).

### EXERCICE 3-11

On commande le système  $G_p(s) = (s + 3)/s(s+1)$  par un compensateur AP amplifié,

$$G_c(s) = k(s + 1/\tau)/(s + a/\tau).$$

Pour que le lieu d'Evans de  $G_c(s)G_p(s)$  passe par le point  $p = -3 + j$

- 1) Quelle valeur doit avoir  $\arg[G_c(p)]$ ?
- 2) Si l'on choisit  $1/\tau = 1$ , que doit être la valeur de  $a/\tau$ ? Représenter à l'aide de Matlab le lieu des racines.
- 3) Pour quelle valeur de  $k$  le point  $p$  est un pôle de la boucle fermée? Représenter à l'aide de Matlab la réponse temporelle de cette boucle.

1)  $\arg[G_c(-3+j)]$

$$G(s) = G_c(s)G_p(s) = k \frac{s+1/\tau}{s+a/\tau} \cdot \frac{s+3}{s(s+1)}$$

$$p \in \mathcal{L} \Leftrightarrow \arg[G(p)] = \arg[G_c(p)] + \arg[G_p(p)] = -180^\circ$$

$$\Rightarrow \arg[G_c(p)] = -180 - \arg(p+3) + \arg(p) + \arg(p+1).$$

$$p = -3 + j$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \arg[G_c(p)] &= -180 - \arg(j) + \arg(-3+j) + \arg(-2+j) \\ &= -180 - 90 + [180 - \operatorname{tg}^{-1}(1/3)] + [180 - \operatorname{tg}^{-1}(1/2)] \\ &= 90 - 18.4349 - 26.5651 = 45^\circ \end{aligned}$$

2) Calcul de  $a$  si  $\tau = 1$

$$\arg[G_c(p)] = \arg(-2+j) - \arg[(a-3)+j] = 45^\circ$$

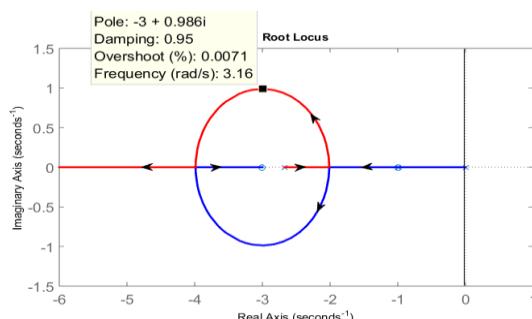
$$\begin{aligned} \Rightarrow \arg[(a-3)+j] &= [180 - \operatorname{tg}^{-1}(1/2)] - 45 \\ &= 180 - 26.5651 - 45 = 108^\circ \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1}{a-3}\right) = 108 \Rightarrow \frac{1}{a-3} = \operatorname{tg}(108) = -3.0772$$

$$\Rightarrow a = 3 - \frac{1}{3.0772} = 2.675.$$

Vérifions que le lieu des racines de  $1 + G(s)$  passe par  $p = -3 + j$ .

```
>> np=-3; dp=[0 -1];
>> nc=-1; dc=-2.675;
>> Gp=zpk(np,dp,1); Gc=zpk(nc,dc,1);
>> G=Gc*Gp;
>> rlocus(G)
```



La figure montre bien que le point  $-3 + j$  appartient au lieu.

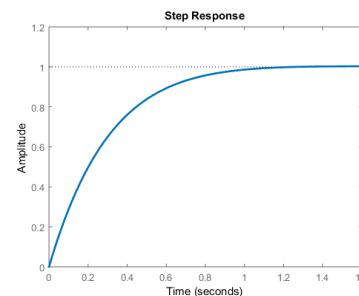
Calcul de  $k$

$$\begin{aligned} k &= \left| \frac{1}{G(p)} \right| = \left| \frac{p(p+2.675)}{p+3} \right| = \left| \frac{(-3+j)(-0.325+j)}{j} \right| \\ &= |0.025 + j(3.325)| \approx 3.325. \end{aligned}$$

Réponse temporelle

```
>> T=feedback(3.325*G,1)
```

```
>> step(T)
```



### EXERCICE 3-12

Montrer que la phase d'un compensateur RP à la fréquence  $10/\tau$  est comprise entre  $-5.7^\circ$  et  $0^\circ$ .

$$G_c(s) = b \frac{s+1/\tau}{s+b/\tau}, b < 1.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \arg[G_c(10j/\tau)] &= \arg(1+10j) - \arg(b+10j) \\ &= \operatorname{tg}^{-1}(10) - \operatorname{tg}^{-1}(10/b). \end{aligned}$$

$$\text{Or } \operatorname{tg}^{-1}(10) = 84.3^\circ \text{ et } 84.3^\circ < \operatorname{tg}^{-1}(10/b) < 90^\circ$$

$$\Rightarrow -5.7^\circ < \arg[G_c(10j/\tau)] < 0^\circ.$$

### EXERCICE 3-13

1) Montrer que le choix du polynôme  $A(s)$  n'affecte pas la commande  $u$  d'une configuration à deux paramètres.

2) Pour un objet commandé  $G_p(s) = 1/s(s-1)$  et une boucle fermée désirée  $T(s) = 8/(s^2 + 4s + 8)$  et  $A(s) = s + a$ , déterminer en fonction de  $a$  les polynômes  $N_r$ ,  $N_y$  et  $D_c$ .

3) Écrire la fonction de transfert  $H(s)$  entre une perturbation  $d$  à la sortie de  $G_p(s)$  et la réponse  $y$  et représenter à l'aide de Matlab la réponse temporelle de  $H(s)$  pour différentes valeurs de  $a$ . Conclure sur le choix de  $a$ .

4) Étudier à l'aide de Matlab l'effet de  $a$  sur la robustesse et conclure sur le choix de  $a$ .

1) Si les polynômes de la commande à deux paramètres  $N_r$ ,  $N_y$  et  $D_c$  sont tels que

$$N_r = N_0 A \text{ et } D_c + N N_y = D_0 A,$$

l'expression de la commande  $u$  sera

$$u = \frac{(N_0 A / D_c) r}{1 + N N_y / D_c} = \frac{(D N_0 A) r}{D_0 A} = \frac{(D N_0) r}{D_0}$$

qui est indépendante de  $A$ .

## 2) Détermination des polynômes de la commande

$$G_p = \frac{N}{D} = \frac{1}{s(s-1)}, \text{ pas de zéros à prp}$$

$$T = \frac{N_T}{D_T} = \frac{8}{s^2 + 4s + 8}. \text{ pas de zéros à prp et } T(0)=1,$$

stable, propre et  $n_T - m_T \geq n - m$ .

Le choix de la fonction de transfert  $T(s)$  est valable.

D'autre part

$$T = \frac{N_r N}{1 + N N_y / D D_c} \Rightarrow \frac{T}{N} = \frac{N_r}{D D_c + N N_y} = \frac{N_0}{D_0} \quad (1)$$

$$N = 1 \Rightarrow N_0 = 8 \text{ et } D_0 = s^2 + 4s + 8 \Rightarrow n_0 = 2$$

Comme  $(2n-1) - n_0 = 3 - 2 = 1$ , l'identification des dénominateurs de (1) aboutit à une solution si on remplace  $N_0/D_0$  par  $N_0 A / D_0 A$  avec  $n_A \geq 1$ . Ceci permet de choisir  $N_r$ ,  $N_y$  et  $D_c$  tels que

$$N_r = N_0 A \text{ et } D_c + N N_y = D_0 A.$$

En prenant  $A(s) = s + a$ ,  $n_c = n_y = n - 1 = 1$  et en posant

$$D_c(s) = a_1 s + a_0 \text{ et } N_y(s) = b_1 s + b_0,$$

on obtient  $N_r = 8(s + a)$  et

$$(s^2 - s)(a_1 s + a_0) + (b_1 s + b_0) = (s^2 + 4s + 8)(s + a).$$

$$\text{ou } a_1 s^3 + (-a_1 + a_0)s^2 + (b_1 - a_0)s + b_0$$

$$= s^3 + (a+4)s^2 + (4a+8)s + 8a$$

d'où

$$a_1 = 1$$

$$-1 + a_0 = a + 4 \Rightarrow a_0 = a + 5$$

$$b_1 - a - 5 = 4a + 8 \Rightarrow b_1 = 5a + 13$$

$$b_0 = 8a$$

Donc  $D_c(s) = s + (a+5)$  et  $N_y(s) = (5a+13)s+8a$ .

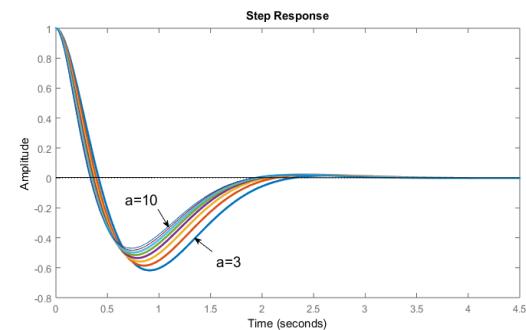
## 3) Effet de la perturbation d selon la valeur de $a$

$$H(s) = \frac{1}{1 + N_y N / D_c D} = \frac{D_c D}{D_c D + N_y N}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{s(s-1)(s+a+5)}{s(s-1)(s+a+5) + (5a+13)s+8a} \\ &= \frac{s^3 + (a+4)s^2 - (a+5)s}{s^3 + (a+4)s^2 + 4(a+2)s+8a}. \end{aligned}$$

Réponse temporelle de  $H(s)$

```
>> for a = 3:10;
>> nh = [1 a+4 -(a+5) 0];
>> dh = [1 a+4 4*(a+2) 8*a];
>> H = tf(nh,dh);
>> step(H);
>> hold on
>> end
```



La figure montre que l'effet de la perturbation diminue quand  $a$  augmente mais à partir de  $a = 10$  cet effet varie peu

## 4) Effet du choix de $a$ sur la robustesse.

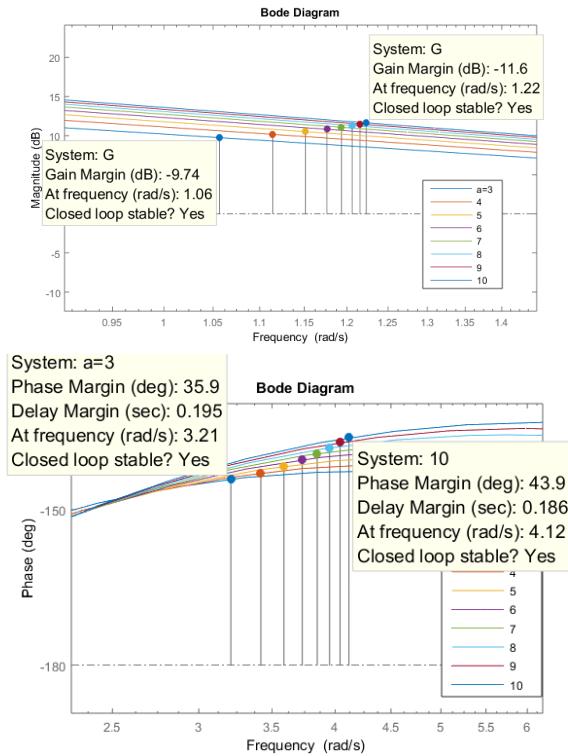
La robustesse se caractérise par les marges de gain et de phase qui s'obtiennent en représentant le diagramme de Bode de la boucle ouverte. La fonction de transfert de cette boucle est

$$G(s) = \frac{N N_y}{D D_c} = \frac{1[(5a+13)s+8a]}{s(s-1)(s+a+5)} = \frac{(5a+13)s+8a}{s^3 + (a+4)s^2 - (a+5)s}.$$

Diagrammes de Bode pour différentes valeurs de  $a$

```
>> for a = 3:10;
>> n = [5*a+13 8*a];
>> d = [1 a+4 -(a+5) 0];
>> G = tf(n,d);
>> bode(G);
>> hold on
>> end
```

En agrandissant les courbes de gain autour des fréquences de coupure de phase et les courbes de phase autour des fréquences de coupure de gain, on obtient les figures suivantes.

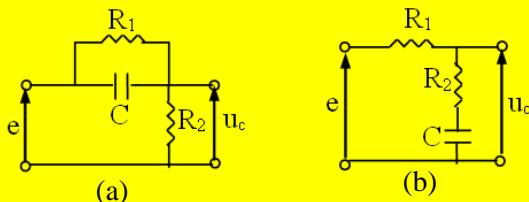


Ces figures montrent que la robustesse s'améliore quand  $a$  augmente mais à partir de  $a = 10$  la robustesse varie peu.

### AUTRES EXERCICES ET COMPLÉMENTS

#### 3-14.

- 1) Montrer que le circuit (a) réalise un compensateur AP et que le circuit (b) réalise un compensateur RP.



- 2) Soit  $G_p(s) = (s + 2)/[s(s + 1)]$  le système commandé par  $G_c(s) = k$ . Déterminer la valeur de  $k$  pour laquelle le facteur d'amortissement est  $\xi = 0.8$  et la constante de temps  $\tau = 0.5$  sec. Que vaut l'erreur stationnaire de vitesse et quelle est la position des pôles de la boucle fermée sur le lieu des racines ?
- 3) Remplacer la commande proportionnelle (P) par un compensateur RP,  $G_c(s) = k(s + 1/\tau_b)/(s + b/\tau_b)$ , et déterminer  $k$  pour avoir  $e_{sv} = 0.05$  sans modifier la position des pôles dominants. Comparer à l'aide de Matlab la réponse temporelle et la réponse à  $r(t) = t$

de la boucle fermée pour les commandes 2) et 3) ainsi que les lieux des racines correspondantes.

- 4) Par un autre compensateur RP, on élimine le zéro  $-2$  de  $G_p$  et on le remplace par un zéro  $-z$ ,  $z > 2$ . Montrer que les pôles complexes de la boucle fermée sont sur un cercle de centre  $-z$  et de rayon  $R = \sqrt{z(z-1)}$ . Déterminer  $z$  et  $k$  pour avoir en boucle fermée des pôles de constante de temps  $\tau = 0.25$  sec et de facteur d'amortissement  $\xi = 0.85$ .

#### 1) Circuits AP et RP

##### a) Circuit AP

$$\begin{aligned} u_c &= \frac{R_2}{R_2 + R_1/Cs} e = \frac{R_2(R_1Cs + 1)}{R_2(R_1Cs + 1) + R_1} e \\ &= \frac{(R_1Cs + 1)}{R_1Cs + 1 + R_1/R_2} e \\ \Rightarrow \frac{u_c(s)}{e(s)} &= \frac{s + 1/\tau}{s + a/\tau}, \quad \begin{cases} \tau = R_1C \\ a = (R_1 + R_2)/R_2 > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Interprétation

Quand  $s \rightarrow 0$ ,  $1/Cs \rightarrow \infty$  d'où tout le courant passe par  $R_1$  et  $u_c/e \rightarrow R_2/(R_1 + R_2)$ . Quand  $s \rightarrow \infty$ ,  $1/Cs \rightarrow 0$  et  $u_c/e \rightarrow 1$  (filtre passe haut).

##### b) Circuit RP

$$\begin{aligned} u_c &= \frac{R_2 + 1/Cs}{R_1 + R_2 + 1/Cs} e = \frac{s + 1/R_2C}{s(R_1 + R_2)/R_2 + 1/R_2C} e \\ \Rightarrow \frac{u_c(s)}{e(s)} &= b \frac{s + 1/\tau}{s + b/\tau}, \quad \begin{cases} \tau = R_2C \\ b = R_2/(R_1 + R_2) < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Interprétation

Quand  $s \rightarrow 0$ ,  $1/Cs \rightarrow \infty$ , le courant qui traverse le circuit est nul et  $u_c/e = 1$ . Quand  $s \rightarrow \infty$ ,  $1/Cs \rightarrow 0$  d'où  $u_c/e \rightarrow R_2/(R_1 + R_2) < 1$  (filtre passe bas).

#### 2) Commande de $G_p = (s + 2)/[s(s + 1)]$ par $G_c = k$ .

$$G(s) = \frac{k(s+2)}{s(s+1)} \Rightarrow P(s) = s^2 + (1+k)s + 2k.$$

Pour  $\tau = 1/2$  et  $\xi = 0.8$ , on a :

$$\xi\omega_n = 1/\tau = \frac{1+k}{2} \Rightarrow k = 4 - 1 = 3$$

$$\omega_n^2 = 2k = 6 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{6}.$$

Erreur stationnaire de vitesse

$$e_{sv} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)} = \frac{1}{2k} = \frac{1}{6} = 0.167.$$

Pôles de  $T(s)$

Ce sont les racines de

$$P(s) = s^2 + (1+3)s + 6 \Rightarrow p_{1,2} = -2 \pm j\sqrt{2}.$$

3) Obtenir par RP  $e_{sv} = 0.05$  en conservant  $p_{1,2}$

Conserver  $p_{1,2} \Leftrightarrow \arg[G_c(p_1)G_p(p_1)]$

$$= \arg[G_p(p_1)] = -180^\circ$$

Ceci sera vrai si

$$\arg(G_1(p_1)) \approx 0, \text{ où } G_1(s) = \frac{s+1/\tau_b}{s+b/\tau_b}$$

c.à.d. si  $b/\tau_b < 1/\tau_b << |R_e(p_1)| = 2$ .

Pour  $1/\tau_b = 0.2$  .  $G_1(p_1) \approx 1$

$$\text{et } G_c(s) = kG_1(s) = k \frac{s+0.2}{s+b(0.2)}.$$

La valeur de  $k$  pour laquelle  $p_{1,2} = -2 \pm j\sqrt{2}$  est

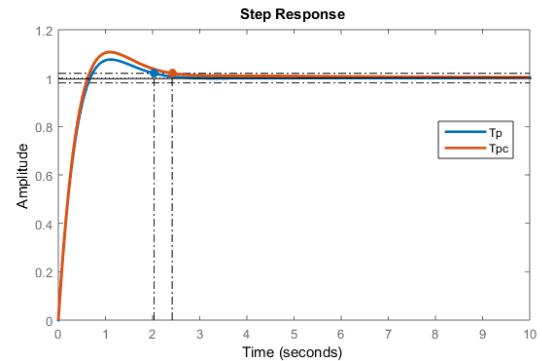
$$\begin{aligned} k &= -\frac{1}{G_1(p_1)G_p(p_1)} \approx -\frac{1}{G_p(p_1)} \\ &= -\frac{(-2+j\sqrt{2})(-1+j\sqrt{2})}{j\sqrt{2}} \Rightarrow k = -\frac{(-3j\sqrt{2})}{j\sqrt{2}} \approx 3. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow e_{sv} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G_p(s)} = \frac{b}{3(2)} = \frac{5}{100} \Rightarrow b = 0.3.$$

$$\text{Donc } G_c(s) = 3 \frac{s+0.2}{s+0.06}.$$

Réponses à un échelon

```
>> np=[-2 0 -1];
>> nc=-0.2;
>> dc=-0.06;
>> k=3;
>> Gp=zpk(np,dp,1);
>> Gc=zpk(nc,dc,k);
>> Gcp=Gc*Gp;
>> Tp=feedback(k*Gp,1);
>> Tpc=feedback(Gcp,1)
```

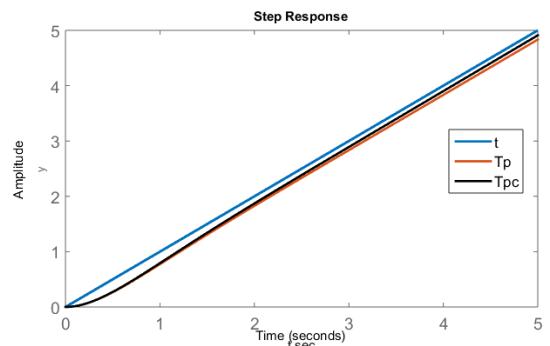


Comme les deux systèmes sont de type  $n_0 = 1$ , leur erreur stationnaire de position est  $e_{sp} = 0$ . Le régime transitoire est presque le même car les pôles dominants des deux systèmes sont confondus mais le zéro  $-0.2$  du RP a légèrement augmenté DM et son pôle  $-0.06$  a légèrement augmenté  $t_s$ .

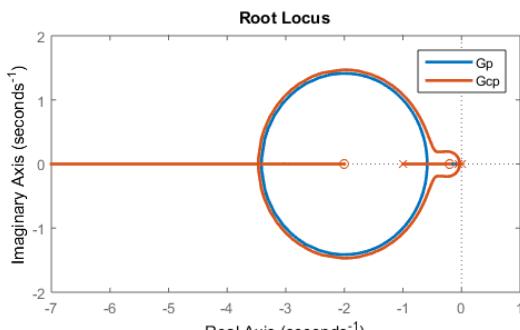
Réponse à une rampe

La réponse à  $u = t$  d'un système  $H(s)$  est  $y(s) = H(s)(1/s^2) = [H(s)/s](1/s)$ . C'est donc la réponse de  $H(s)/s$  à un échelon.

```
>> I=tf(1,[1 0]);
>> step(I)
>> hold on
>> step(Tp*I)
>> step(Tpc*I)
```



Lieux des racines



Les deux lieux sont presque confondus loin de l'origine. Mais en un point donné les erreurs stationnaires sont différentes (plus petites avec RP).

#### 4) Amélioration de la réponse par RP

##### a) Lieu des pôles complexes de la boucle fermée

On élimine le zéro  $-2$  de  $G_p$  par en donnant au pôle de RP la valeur  $-2$ . D'où

$$G_c(s) = k \frac{s+z}{s+2} \Rightarrow G(s) = G_c(s)G_p(s) = \frac{k(s+z)}{s(s+1)}$$

Polynôme caractéristique :  $P(s) = s^2 + (k+1)s + kz$ .

En posant  $v = s - (-z) = s + z$ , ce polynôme devient :

$$\begin{aligned} P(v) &= (v-z)^2 + (k+1)(v-z) + kz \\ &= v^2 + (-2z+k+1)v + z^2 - z. \end{aligned}$$

Le module des racines complexes de  $P(v)$  est constant et vaut  $|v| = |s+z| = R = \sqrt{z(z-1)}$ .

Les pôles complexes  $p$  de la boucle fermée décrivent donc le cercle  $(-z, R)$ .

On obtient  $\tau = 0.25$  sec. et  $\xi = 0.85$  si

$$\xi \omega_n = \frac{k+1}{2} = \frac{1}{\tau} = 4 \Rightarrow k = 7 \quad \text{et} \quad \omega_n = \frac{4}{0.85}$$

$$\Rightarrow kz = \omega_n^2 = \frac{16}{(0.85)^2} \Rightarrow z = \frac{16}{7(0.85)^2} = 3.16.$$

**3-15.** Supposons que la fonction de transfert du système à commander est

$$G_p(s) = (s+5)/[s(s+1)(s+2)].$$

a) Construire l'allure du lieu des racines pour une commande proportionnelle  $G_c(s) = k$  et déterminer la valeur de  $k$  à partir de laquelle la boucle fermée devient instable.

b) Déterminer un compensateur AP,

$$G_c(s) = k(s + 1/\tau_a)(s + a/\tau_a),$$

qui simplifie le pôle  $-1$  de  $G_p$  et pour lequel le temps de stabilisation et le facteur d'amortissement de la boucle fermée sont  $t_s = 4$  sec et  $\xi = 0.5$ .

##### a) Lieu des racines et stabilité critique

$$\bullet \mathcal{L} \cap \mathcal{R} = [-1, 0] \cup [-5, -2].$$

• Point de bifurcation.

$$(3s^2 + 6s + 2)(s+5) - (s^3 + 3s^2 + 2s)$$

$$= 2s^3 + 18s^2 + 30s + 10 = 0$$

La seule racine qui appartient à  $\mathcal{L}$  est  $s_b \approx -0.45$

• Asymptotes.

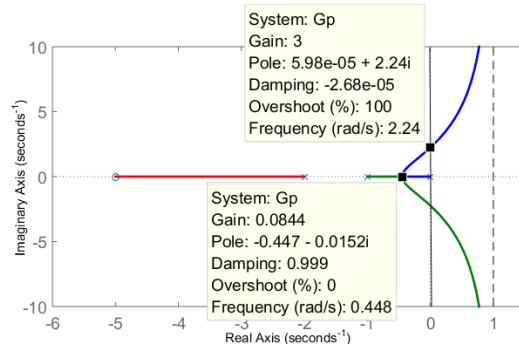
$$a = \frac{(0-1-2)-(-5)}{3-1} = 1, \quad \theta = (2k+1)\frac{\pi}{2}.$$

•  $\mathcal{L} \cap \text{Im}$  (stabilité critique).

$$P(j\omega) = 0 \Rightarrow [(s^3 + 3s^2 + 2s) + k(s+5)]_{s=j\omega} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3\omega^2 + 5k = 0 \Rightarrow k = 3\omega^2 / 5 \\ -\omega^3 + (2+k)\omega = 0 \Rightarrow \omega = \begin{cases} 0 \text{ évident} \\ 2\omega^2 / 5 = 2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{5} \quad \text{et} \quad k = 3.$$



##### b) AP pour avoir $t_s = 4$ sec et $\xi = 0.5$ en boucle fermée

$$t_s = 4\tau = 4/\sigma = 4 \Rightarrow \sigma = 1$$

$$\xi = \sigma/\omega_n = 0.5 \Rightarrow \omega_n = 2 \text{ rad/s}.$$

$$\omega_a = \sqrt{\omega_n^2 - \sigma^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}.$$

Le lieu des racines doit donc passer par

$$p_{12} = -1 \pm j\sqrt{3} = 2e^{\pm j\pi/3}.$$

Pour un AP,  $G_c(s) = k(s + 1/\tau_a)/(s + a/\tau_a)$ ,  $p_1$  vérifie

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \arg G_c(p_1) &= -180 - \arg[G_p(p_1)] \\
 &= -180 + \arg(p_1) + \arg(p_1+1) + \arg(p_1+2) - \arg(p_1+5) \\
 &= -180 + [(180 - \tan^{-1}(\sqrt{3})) + 90 + \tan^{-1}(\sqrt{3})] - \tan^{-1}(\sqrt{3}/4) \\
 \Rightarrow \arg G_c(p_1) &= -60 + 90 + 60 - 23.4 = 66.6^\circ.
 \end{aligned}$$

Choix du zéro  $1/\tau_a$  du AP

On choisit  $1/\tau_a$  voisin de l'origine pour diminuer l'effet du pôle 0 sur le régime transitoire sans éliminer ce pôle afin que l'erreur stationnaire de position reste nulle. Prenons  $1/\tau_a = 0.2$ .

Calcul de  $a/\tau_a$  et  $k$ 

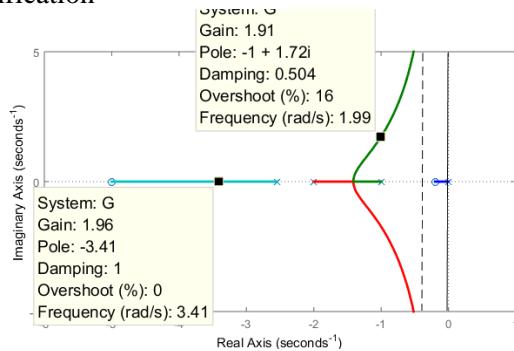
En se référant à la figure ci-contre, on a :

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{0.8} = 65.21^\circ$$

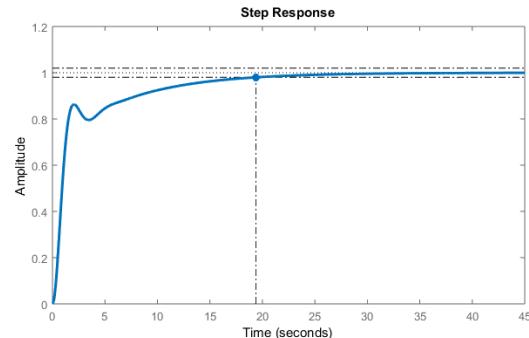
$$\beta = 180 - 66.6 - 65.21 = 48.19^\circ.$$

$$\tan \beta = \frac{\sqrt{3}}{a/\tau_a - 1} = 1.12 \Rightarrow a/\tau_a = 1 + \frac{\sqrt{3}}{1.12} = 2.55.$$

$$\begin{aligned}
 k &= \frac{1}{|G_c(p_1)G_p(p_1)|} = \frac{|p_1 + a/\tau_a||p_1||p_1 + 1||p_1 + 2|}{|p_1 + 1/\tau_a||p_1 + 5|} \\
 &= \left[ \frac{(1.55^2 + 3)(4)(3)(4)}{(0.8^2 + 3)(16 + 3)} \right]^{1/2} = 1.94
 \end{aligned}$$

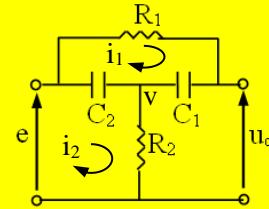
Vérification

On voit que le nouveau système est stable  $\forall k$  et que le lieu passe par les pôles dominants désirés. Mais le pôle non dominant, n'étant pas suffisamment éloigné vers la gauche des dominants, son effet ajouté à l'effet du pôle entre le zéro  $-0.2$  et le pôle 0 ralentit la réponse comme le montre la figure suivante.



**3-16.** Montrer que la fonction de transfert du circuit en pont T suivant est de la forme

$$G_c(s) = (s^2 + 2\sigma_1 s + \omega_n^2) / (s^2 + 2\sigma_2 s + \omega_n^2) \quad \sigma_1 < \sigma_2$$



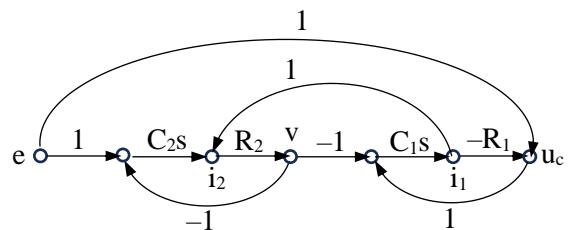
a) La fonction de transfert du système à commander est  $G_p(s) = 20 / [(s+1)(s^2 + 0.4s + 4)]$ .

Déterminer la valeur de  $k$  d'une commande proportionnelle,  $G_c(s) = k$ , pour que la fréquence de coupure du gain soit  $\omega_{cg} = 4$  rad/sec. En représentant la courbe de Bode de  $G(s) = kG_p(s)$ , déduire que le système est instable. Peut-on le stabiliser avec un compensateur à avance de phase AP avec une marge de phase MP > 30° sans diminuer  $\omega_{cg}$  (la bande passante) ?

b) Employer un pont T pour remplacer les pôles complexes de  $G_p$  par les pôles réels  $-\omega_n/4$  et  $-4\omega_n$  puis ajouter en série avec ce pont un compensateur AP qui stabilise le système obtenu avec une marge de phase MP = 45°.

a) Fonction de transfert du pont T

Les équations de ce circuit liant  $u_c$  à  $e$  sont représentées pr le graphe suivant.



Ce graphe comporte 3 boucles  $B_1 = R_2 C_2 S$ ,  $B_2 = R_2 C_1 S$  et  $B_3 = R_1 C_1 S$ .  $B_1$  et  $B_3$  sont disjointes mais  $B_2$  les touche. D'autre part deux chemins lient  $e$  à  $u_c$ :  $Ch_1 = 1$  et  $Ch_2 = R_1 R_2 C_1 C_2 S^2$ .  $C_1$  touche  $B_3$  et  $C_2$  touche les trois boucles. Donc

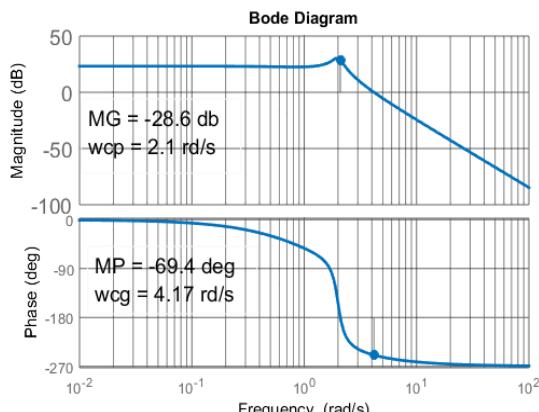
$$\begin{aligned} \frac{u_c}{e} &= \frac{(1+B_1+B_2)+R_1 R_2 C_1 C_2 S^2}{\Delta} \\ \Delta &= 1 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1) S + R_1 R_2 C_1 C_2 S^2 \\ \Rightarrow \frac{u_c}{e} &= \frac{s^2 + 2\sigma_1 s + \omega_n^2}{s^2 + 2\sigma_2 s + \omega_n^2} \\ 2\sigma_1 &= 1/R_2 C_2 + 1/R_1 C_2 \\ \omega_n^2 &= 1/R_1 R_2 C_1 C_2 \\ 2\sigma_2 &= 1/R_2 C_2 + 1/R_1 C_1 + 1/R_1 C_2. \end{aligned}$$

### a) Commande P

Valeur de  $k$  pour avoir  $\omega_{cg} = 4$  rad/s

$$|kG_p(j\omega_{cg})| = 1 \Rightarrow k = \frac{|4j+1|(4-18)+0.4j(4)|}{20}$$

$$k = \frac{\sqrt{17} \cdot \sqrt{14^2 + 1.6^2}}{20} = 2.9.$$



Ce diagramme montre que la fréquence de coupure de gain est la voulue,  $\omega_{cg} = 4$  rad/sec mais le système est instable ayant une marge de phase  $MG \approx -30$  dB et une marge de phase  $MP \approx -70^\circ$ . Pour stabiliser le système avec une marge de phase  $MP > 30^\circ$ , le compensateur AP doit ajouter en une fréquence supérieure à  $\omega_{cg}$  un angle au moins égal à  $70 + 30 = 100^\circ$ . Ceci est impossible puisque l'angle maximum que ce compensateur peut ajouter est  $90^\circ$ . Cette difficulté provient de la décroissance rapide de la phase autour de  $\omega_n = 2$  rad/sec. Cette décroissance est

due au terme de second degré de faible facteur d'amortissement  $\xi = 0.4/2\omega_n = 0.1$  au dénominateur de  $G_p$ .

### b) Commande T + AP

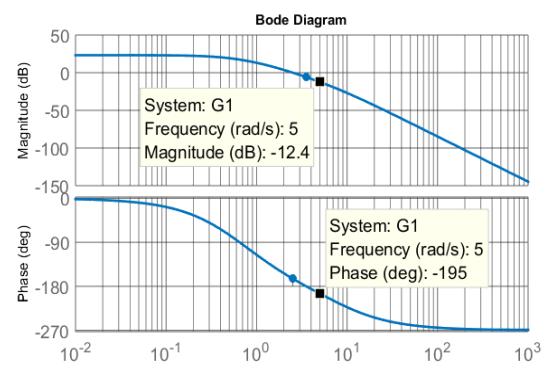
Le pont T élimine les pôles complexes de  $G_p$  et les remplace par les pôles réels  $-\omega_n/4$  et  $4\omega_n$  si les valeurs de ses paramètres sont

$$\omega_n = 2, \quad 2\sigma_1 = 0.4 \quad \text{et} \quad 2\sigma_2 = 1/2 + 8 = 17/2.$$

Avec ce pont, la chute de la phase de  $-180^\circ$  à la fréquence  $\omega_n = 2$  rad/s est remplacée par deux chutes chacune de  $-90^\circ$  aux fréquences  $1/2$  rad/s et 8 rad/s. Ceci adoucit la décroissance de la phase comme le montre le diagramme de Bode de

$$G_1(s) = \frac{2.9(20)}{(s+0.5)(s+1)(s+8)}.$$

On voit sur ce diagramme que le pont T a stabilisé le système mais avec des faibles marges et il a diminué la fréquence de coupure de gain de 4 rad/s à environ



2.5 rad/s. Un compensateur AP augmente à la fois la phase et la fréquence de coupure de gain. Si nous choisissons cette dernière égale à  $\omega_{cgn} = 5$  rad/s, on lit sur le diagramme que AP doit hausser la courbe de gain en cette fréquence de 12.4 db c.à.d. multiplier  $G_1$  par  $10^{12.4/20}$ . D'autre part, pour maximiser la marge de phase, il faut que la fréquence  $\omega_m$  de phase maximum  $\phi_m$  de AP soit égale à  $\omega_{cgn}$ . Comme en  $\omega_{cgn}$  la phase de  $G_1$  est  $-195^\circ$ , la marge de phase sera  $MP = -195 + \phi_m - (-180) = \phi_m - 15^\circ$ . Nous savons que pour un compensateur AP, dont la fonction de transfert est  $G_a(s) = a(s+1/\tau_a)/(s + a/\tau_a)$ , on a :

$$|G(j\omega_m)| = \sqrt{a}, \quad \omega_m = \frac{\sqrt{a}}{\tau_a}, \quad \sin \phi_m = \frac{a-1}{a+1}.$$

Par conséquent,

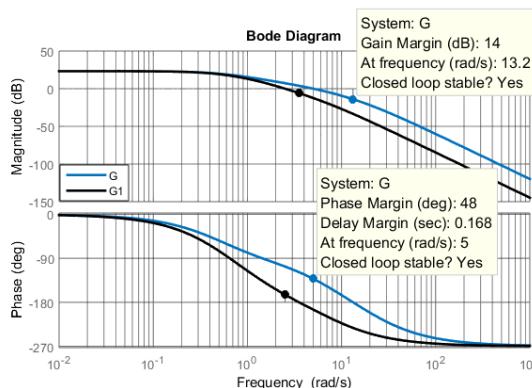
$$a = (10^{12.4/20})^2 = 17.38,$$

$$1/\tau_a = \omega_m / \sqrt{a} = 5 / \sqrt{17.38} = 1.2. \quad a/\tau_a = 20.84$$

$$\sin \varphi_m = \frac{16.38}{18.38} \Rightarrow \varphi_m \approx 63^\circ \Rightarrow MP = 63 - 15 = 48^\circ.$$

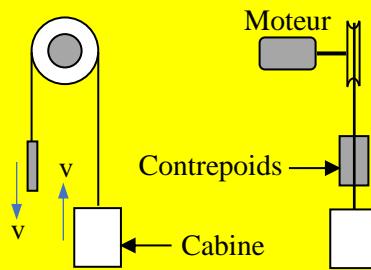
L'exigence  $MP > 45^\circ$  est satisfaite.

Pour vérifier ces résultats, montrer l'effet de AP et lire la nouvelle marge de gain, représentons dans le même plan les diagrammes de Bode de  $G_1$  et de  $G = G_a G_1$



On voit que Matlab donne les mêmes résultats obtenus par calcul et que la nouvelle marge de gain est MG = 14 db.

**3-17.** La figure suivante montre de face et de côté un ascenseur entraîné par un moteur cc commandé par son courant i d'induit dont l'inductance est négligeable et la résistance est R. Le facteur de couple k ( $\Gamma_m = ki$ ) est égal au facteur de la force contre électromotrice ( $e_b = k\Omega$ ). Le contrepoids et la cabine ont la même masse M, le rayon de la poulie est r, le facteur de frottement sur l'axe moteur est c et on néglige l'inertie du rotor et de la poulie.



- 1) Montrer que la fonction de transfert entre la tension u appliquée à l'induit et la vitesse v de la cabine est de la forme  $G(s) = v_L/(ts + 1)$ .
- 2) En remplaçant les paramètres par leurs valeurs et en multipliant par les gains de l'actionneur et du capteur, on obtient

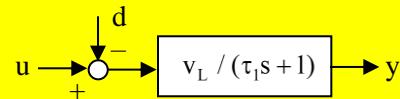
$$G_p(s) = y(s)/u_c(s) = 1/(s + 2)$$

où y est la tension représentant v à la sortie du capteur et  $u_c$  est la tension de commande appliquée à l'actionneur. Sachant que le gain C du capteur est 1 volt/(m/s), que vaut la vitesse limite  $v_L$  de la cabine quand  $u_c = 1$  volt et en combien de temps cette vitesse sera atteinte ?

- 3) On désire que la fonction de transfert du système soit  $T(s) = y(s)/r(s) = 4/(s + 4)$ . Déterminer la fonction de transfert de l'organe de commande

- a)  $G_{cl}(s)$  en boucle ouverte (sans signal de retour)
- b)  $G_c(s)$  en boucle fermée (avec retour unitaire).

- 4) Tenant compte de la variation de la masse m des passagers, la masse de la cabine est en fait  $M + m$  au lieu de M. Montrer que le système se représente par le schéma suivant



où la constante de temps  $\tau_1$  et la perturbation d dépendent de m selon les relations

$$d = mgrR / k, \quad \tau_1 = [(2M + m)r^2R] / (k^2 + Rc).$$

- 5) Montrer que si  $m = 2M$ , la fonction de transfert du système commandé  $G_p(s)$  devient  $1/[2(s+1)]$ . Admettons que la perturbation sera  $d = 2$  et que les organes de commande  $G_{cl}(s)$  en boucle ouverte et  $G_c(s)$  en boucle fermée restent les mêmes que ceux obtenus dans 3). Écrire les transformées de Laplace de la réponse y en boucle ouverte et en boucle fermée. Représenter ces réponses par Matlab et conclure

### 1) Fonction de transfert sans passagers.

Soient  $T_1$  et  $T_2$  les tensions de la corde des deux côtés de la poulie,  $T_1$  est appliquée à la cabine et  $-T_1$  à la poulie et  $-T_2$  est appliquée au contrepoids et  $T_2$  à la poulie. En supposant que la corde est inélastique, les vitesses de la cabine et du contrepoids sont égales mais l'une est ascendante et l'autre est descendante. Les équations du système sont donc les suivantes.

$$\text{Mouvement de la cabine : } M \frac{dv}{dt} = T_1 - Mg \quad (1)$$

$$\text{Mouvement du contrepoids : } M \frac{dv}{dt} = Mg - T_2$$

$$\Rightarrow 2M \frac{dv}{dt} = T_1 - T_2.$$

Le moment qui résiste à la rotation du moteur est

$$\Gamma_c = -(T_1 - T_2)r = -2Mr \frac{dv}{dt} \quad (2)$$

L'inertie du rotor avec la poulie étant négligeable et tenant compte du frottement  $-C\Omega$ ,

$$\Gamma_m + \Gamma_c - c\Omega = 0 \Rightarrow \Gamma_m = 2Mr \frac{dv}{dt} + c\Omega \quad (3)$$

où  $\Gamma_m = ki$ . Or, en négligeant l'inductance de l'induit et sachant que sa force contre-électromotrice est  $e_b = k\Omega$ , on a :  $i = (u - k\Omega)/R$

Comme  $v = r\Omega$ , (3) devient

$$k \frac{u - kv/r}{R} = 2Mr \frac{dv}{dt} + cv/r$$

$$\text{ou } \frac{ku}{R} = 2Mr \frac{dv}{dt} + \left( \frac{k^2}{R} + c \right) \frac{v}{r} \quad (4)$$

La fonction de transfert s'obtient par transformée de Laplace de l'équation précédente en supposant que le système est initialement inerte ( $v(0) = 0$ ).

$$\text{En posant } \tau = \frac{2Mr^2 R}{k^2 + Rc} \text{ et } v_L = \frac{kr}{k^2 + Rc}, \quad (5)$$

$$\text{on déduit que } G(s) = \frac{v(s)}{u(s)} = \frac{v_L}{\tau s + 1}.$$

2) Vitesse limite et temps de stabilisation

$$G_p(s) = \frac{1}{s+2} = \frac{0.5}{0.5s+1} \Rightarrow \begin{cases} y_L = 0.5 \text{ Volt} \\ \tau_p = 0.5 \text{ sec} \end{cases}$$

$$\Rightarrow t_s = 4\tau_p = 2 \text{ sec} \text{ et } v_L = y_L / C = 1 \text{ m/s.}$$

3) Commande pour que  $T(s) = 4/(s + 4)$ .

a) En boucle ouverte

$$T(s) = G_{cl}(s)G_p(s) \Rightarrow G_{cl}(s) \frac{1}{s+2} = \frac{4}{s+4}$$

$$\Rightarrow G_{cl}(s) = \frac{4(s+2)}{s+4} \quad (\text{AP}).$$

b) En boucle fermée

$$T = \frac{G_{c2}G_p}{1+G_{c2}G_p} \Rightarrow G_{c2}G_p(1-T) = T$$

$$\Rightarrow G_{c2} = \frac{T}{G_p(1-T)} \Rightarrow G_{c2} = \frac{4(s+2)}{s}. \quad (\text{PI})$$

4) Fonction de transfert avec passagers.

En ajoutant à la masse de la cabine la masse des passagers, les équations de 1) deviennent les suivantes.

$$Mv^{mt} \text{ cabine : } (M+m) \frac{dv}{dt} = T_1 - Mg - mg$$

$$Mv^{mt} \text{ contrepoids : } M \frac{dv}{dt} = Mg - T_2$$

$$\Rightarrow (2M+m) \frac{dv}{dt} + mg = T_1 - T_2.$$

$$\Rightarrow \Gamma_c = -(T_1 - T_2)r = -(2M+m)r \frac{dv}{dt} - mgr$$

$$\Gamma_m + \Gamma_c - c\Omega = 0 \Rightarrow \Gamma_m = (2M+m)r \frac{dv}{dt} + mgr + c\Omega$$

$$\Rightarrow k \frac{u - kv/r}{R} = (2M+m)r \frac{dv}{dt} + mgr + cv/r$$

$$\text{ou } \frac{ku}{R} - mgr = (2M+m)r \frac{dv}{dt} + \left( \frac{k^2}{R} + c \right) v$$

$$\frac{kr}{(k^2 + Rc)} \left( u - \frac{mgrR}{k} \right) = \frac{(2M+m)r^2 R}{k^2 + Rc} \frac{dv}{dt} + v$$

$$\Rightarrow v(s) = \frac{v_L}{\tau_l s + 1} (u - d)$$

$$\text{où } \tau_l = \frac{(2M+m)r^2 R}{k^2 + Rc}, d = \frac{mgrR}{k} \text{ et } v_L = \frac{kr}{k^2 + Rc} \quad (6)$$

### 5) Comparaison entre boucle ouverte et fermée

Pour  $m = 2M$ , de (5) et (6) on déduit que  $\tau_l = 2\tau$  mais  $v_L$  est la même. D'après 2),  $G_p(s)$  devient  $0.5/(1s+1) = 1/[2(s+1)]$ . Les relations entre la réponse  $y$ , la référence  $r$  et le perturbation  $d$  sont les suivantes.

En boucle ouverte  $y = G_{cl}G_p r - G_p d$

Pour  $r = 1(t)$  et  $d = 2(t)$

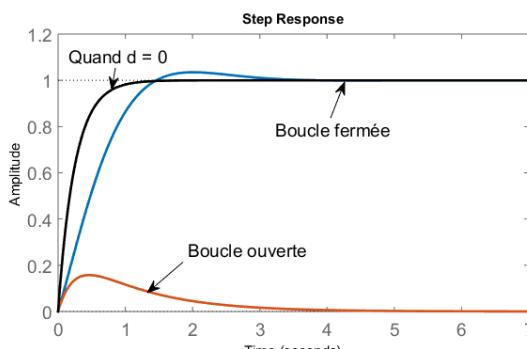
$$y(s) = \frac{2(s+2)}{(s+4)(s+1)} \frac{1}{s} - \frac{1}{2(s+1)} \frac{2}{s}.$$

$$= \frac{2(s+2)-(s+4)}{(s+4)(s+1)s} = \frac{1}{(s+4)(s+1)}$$

$$\text{En boucle fermée } y = \frac{G_c G_p}{1+G_c G_p} r - \frac{G_p}{1+G_c G_p} d$$

$$= \frac{\frac{2(s+2)}{(s+1)s}}{1+\frac{2(s+2)}{(s+1)s}} \frac{1}{s} - \frac{\frac{1}{2(s+1)}}{1+\frac{2(s+2)}{(s+1)s}} \frac{2}{s}$$

$$= \frac{2(s+2)}{(s^2+3s+4)s} - \frac{1}{(s^2+3s+4)} = \frac{s+4}{(s^2+3s+4)s}$$



Sans la présence de passagers les boucles ouverte et fermée entraînent la cabine de la même manière. En boucle ouverte, le mouvement de la cabine est très affecté par le poids des passagers tandis qu'en boucle fermée l'effet de ce poids disparait au bout d'un certain temps.

**3-18.** Soit le processus  $G_p(s) = 1/(s - 1)$ .

- Que doit être l'organe de commande en boucle fermée à retour unitaire  $G_c(s)$  afin que la fonction de transfert entre la référence  $r$  et la réponse  $y$  soit  $T(s) = 1/(s + 1)$ ? Est-ce que ce système de commande sera intérieurement stable?
- Que doit être  $G_c(s)$  s'il est placé dans la chaîne de retour au lieu de la chaîne directe? Le système de commande sera-t-il intérieurement stable?

a)  $G_c(s)$  en boucle unitaire

$$T(s) = \frac{G_c(s)/(s-1)}{1+G_c(s)/(s-1)} = \frac{G_c(s)}{s-1+G_c(s)} = \frac{1}{s+1}$$

$$\Rightarrow G_c(s)(s+1) = s-1 + G_c(s) \Rightarrow G_c(s) = \frac{s-1}{s}$$

La sensibilité sans simplifier  $G_c G_p$  est

$$S = \frac{1}{1+G_c G_p} = \frac{1}{1+\frac{s-1}{s}(s-1)} = \frac{s(s-1)}{(s-1)(s+1)} = \frac{s}{s+1} \text{ instable.}$$

$\Rightarrow$  la boucle n'est pas intérieurement stable. En effet

$$\frac{y(s)}{d_u(s)} = SG_p = \frac{s}{(s+1)(s-1)}, \text{ instable.}$$

b) Boucle de retour  $G_c(s)$

$$T(s) = \frac{1/(s-1)}{1+G_c(s)/(s-1)} = \frac{1}{s-1+G_c(s)} = \frac{1}{s+1} \Rightarrow G_c(s) = 2$$

La sensibilité sans simplifier  $G_c G_p$  est

$$S = \frac{1}{1+G_c G_p} = \frac{1}{1+\frac{2}{s+1}} = \frac{s-1}{s+1} \text{ stable.}$$

$\Rightarrow$  la boucle est intérieurement stable. En effet

$$\frac{y(s)}{d_u(s)} = SG_p = \frac{1}{(s+1)}, \text{ stable.}$$

**3-19.** Le système  $G_p(s) = 1/s(s+2)$  est commandé par un organe  $G_c(s)$  avec retour unitaire.

- Si  $G_c(s) = k$  (de type P), déterminer  $k$  pour que le taux d'amortissement  $\xi$  de ce système soit égal à 0.5. Calculer, pour cette valeur de  $k$ , l'erreur stationnaire de vitesse  $e_{sv}$  et la constante de temps  $\tau$ .
- Déterminer un compensateur AP amplifié ( $G_c = k(s+1/\tau_a)/(s+a/\tau_a)$ ) de sorte que  $\xi$  conserve sa valeur précédente mais que la constante de temps  $\tau$  soit divisée par 2. Que devient  $e_{sv}$ ?
- Déterminer un compensateur AP amplifié tel que  $e_{sv} = 0.05$  et la marge de phase supérieure à  $40^\circ$  à la fréquence  $\omega_{cg} = 10$  rad/sec.
- Déterminer un compensateur RP amplifié tel que  $e_{sv} = 0.05$ ,  $\tau = 1$  sec et  $\xi = 0.5$ .
- Déterminer un organe de commande PID pour lequel la boucle fermée est de second ordre ayant une  $e_{sv} = 0$ ,  $\tau = 0.5$  sec et  $\xi = (1/2)^{1/2}$ .

1)  $\xi = 0.5$  par commande P

$$G(s) = G_c(s)G_p(s) = \frac{k}{s(s+2)} \Rightarrow P(s) = s^2 + 2s + k$$

$$2\xi\omega_n = 2 \text{ et } \omega_n^2 = k. \quad \xi = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4}k = 1 \Rightarrow k = 4.$$

$$e_{sv} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)} = \frac{1}{4/2} = 0.5.$$

$$\tau = \frac{1}{\xi\omega_n} = \frac{2}{\sqrt{k}} = 1 \text{ sec.}$$

2)  $\xi = 0.5$  et  $\tau = 0.5$  sec par AP

$$\sigma = 1/\tau = 2 \quad \text{et}$$

$$\xi\omega_n = \sigma \Rightarrow \omega_n / 2 = 2 \Rightarrow \omega_n = 4$$

$$\Rightarrow \omega_a^2 = \omega_n^2 - \sigma^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow \omega_a = 2\sqrt{3}$$

Pôles dominants désirés :  $p_{12} = -\sigma \pm j\omega_a = -2 \pm 2j\sqrt{3}$

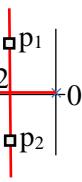
Ces pôles sont sur la verticale  $-\sigma = -2$ .

Le lieu sera cette verticale en supprimant le pôle  $-2$  de  $G_p$  et en le remplaçant par le pôle  $-4$  de  $G_c$ , c.à.d. en prenant  $G_c = kG_a$ ,  $G_a(s) = (s + 2)/(s + 4)$ . En effet, le point de rencontre des asymptotes sera  $a = (-4 - 0)/2 = -2$  et leurs inclinaisons seront  $\pm \pi/2$  comme le montre la figure ci-contre.

D'autre part,

$$k = 1/|G_a(p_1)G_p(p_1)| = |p_1||p_1 + 4| = 4(4) = 16$$

$$\text{et } e_{sv} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} skG_a(s)G_p(s)} = \frac{1}{16(2/4)(1/2)} = \frac{1}{4} = 0.25.$$



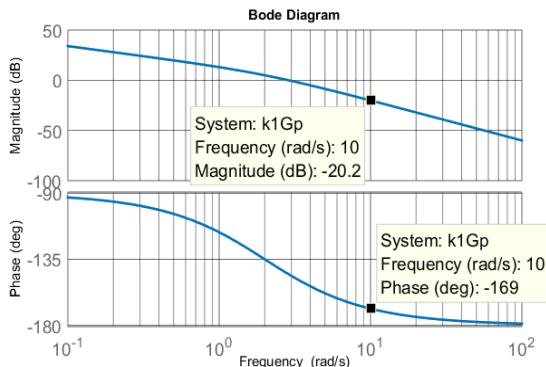
3)  $e_{sv} = 0.05$  et  $MP > 40$  par AP

$$e_{sv} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} skG_a(s)G_p(s)}, \quad G_a(s) = \frac{s+1/\tau_a}{s+a/\tau_a}$$

$$\Rightarrow e_{sv} = \frac{1}{k_1(2)} = 0.05, \quad k_1 = k/a \Rightarrow k_1 = 10.$$

Le diagramme de Bode de  $k_1G_p$  montre que pour que la marge de phase soit supérieure à  $40^\circ$  à la fréquence de coupure de gain  $\omega_{cg} = 10$  rad/s, il faut hausser la courbe de gain de  $20.2$  db et augmenter la phase en  $\omega_{cg}$  de plus que  $-180 + 40 - (-169) = 29^\circ$ . Ceci peut se réaliser par un compensateur à avance de phase AP de paramètres

$\omega_m = 10$  rad/s,  $a = 10^{20.2/10}$  et  $1/\tau_a = \omega_m/a^{1/2}$  à condition que  $\sin\varphi_m = (a - 1)/(a + 1) > \sin(29)$ .



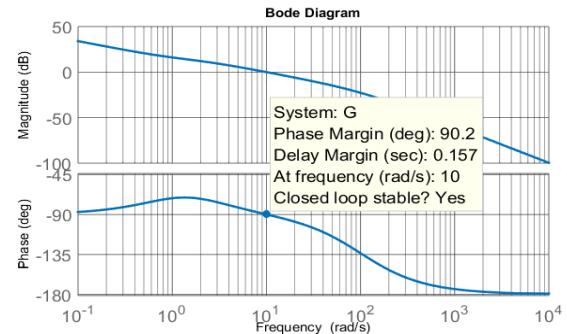
On déduit que

$a \approx 105$ ,  $1/\tau_a = 0.98 \Rightarrow a/\tau_a = 103$ ,  $k = k_1a = 1050$  et on vérifie que  $\varphi_m = \arcsin(104/106) \approx 79^\circ > 29^\circ$  d'où  $MP = -169 + 79 - (-180) = 90^\circ$ .

$$\text{Ainsi } G_c(s) = 1050 \frac{s+0.98}{s+103}.$$

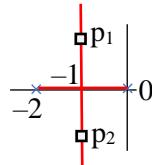
Le diagramme de Bode de  $G_cG_p$  vérifie les calculs

précédents et montre la grande robustesse du système.



4)  $e_{sv} = 0.05$ ,  $\tau = 1$  sec et  $\xi = 0.5$  par RP.

Le lieu des racines quand la boucle ouverte est  $kG_p$  est représenté ci-contre.

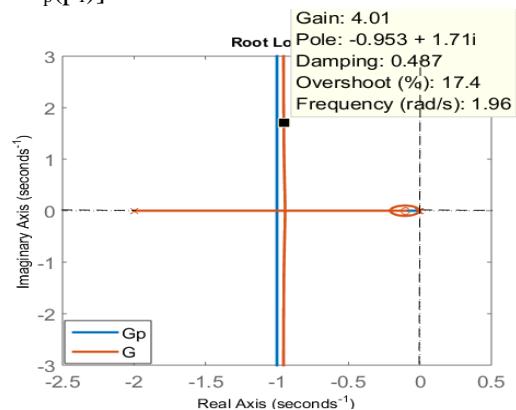


Comme  $\sigma = 1/\tau = 1$ , les pôles désirés  $p_{12}$  sont sur ce lieu et comme  $\xi = \sigma/\omega_n = 0.5$ , on a  $\omega_n = 2$  rad/s et  $\omega_a = (4 - 1)^{1/2} = 3^{1/2}$ .  $\Rightarrow p_{12} = -1 \pm j3^{1/2}$ . On obtient ces pôles quand

$$k = \frac{1}{|G_p(p_1)|} = |p_1||p_1 + 2| = 2(2) = 4.$$

$$\Rightarrow e_{sv} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} skG_p(s)} = \frac{1}{4(1/2)} = 0.5 < 0.05.$$

Remplaçons la commande P par une commande RP,  $G_c(s) = kG_b(s)$  avec  $G_b(s) = (s + 1/\tau_b)/(s + 0.1/\tau_\beta)$  tel que aux points  $s$  éloignés de l'origine  $G_b(s) \approx 1$ . Sous cette condition, qui sera satisfaite si  $1/\tau_b = 0.1$  et  $0.1/\tau_\beta = 0.01$ ,  $G_c(s)G_p(s) \approx kG_p(s)$  sauf au voisinage de l'origine. Par conséquent, le lieu des racines ne se modifie presque pas en  $p_{12}$  (fig. ci-dessous) mais, au lieu de  $1/[kG_p(p_1)] = 0.5$ , on a maintenant  $e_{sv} = 1/[10kG_p(p_1)] = 0.05$ .



5)  $e_{sv} = 0$ ,  $\tau = 0.5$  sec et  $\xi = (1/2)^{1/2}$  par PID

$e_{sv} = 0$  si la boucle ouverte est de type  $n_0 = 2$  comportant un pôle double à l'origine. On maintient donc le pôle 0 de  $G_p$  et on lui ajoute le pôle 0 de  $G_c(s) = k(s + a)(s + b)/s$ . D'autre part, le système sera d'ordre 2 en éliminant le pôle -2 de  $G_p$  par un zéro de  $G_c$ . La fonction de transfert de l'organe de commande et la fonction de transfert de la boucle ouverte seront

$$G_c(s) = k \frac{(s+2)(s+b)}{s} \text{ et } G(s) = \frac{k(s+b)}{s^2}.$$

On obtient le polynôme caractéristique

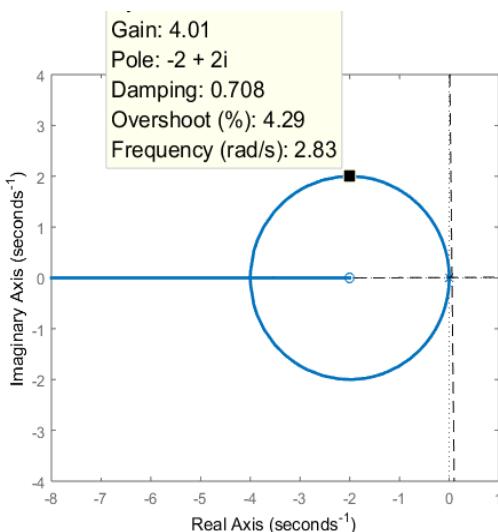
$$P(s) = s^2 + ks + kb.$$

$$\text{D'où } \sigma = k/2 = 1/\tau = 2 \Rightarrow k = 4$$

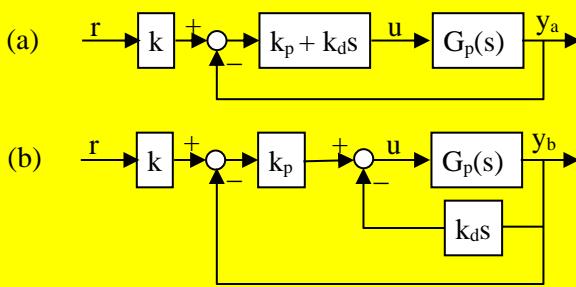
$$\text{et } \sigma^2 = \xi^2 \omega_n^2 \Rightarrow 4 = (1/2)kb \Rightarrow b = 2.$$

$$\text{Ainsi } G_c(s) = \frac{4(s+2)^2}{s^2}.$$

La figure montre le pôle  $p_1$  sur le lieu des racines de  $P(s)$  quand  $k$  varie de 0 à l'infini.



3-20. Un système  $G_p(s)$  est commandé par l'une des configurations (a) et (b) suivantes où  $k$ ,  $k_p (> 0)$  et  $k_d (> 0)$  sont des constantes.



1) Montrer que les deux systèmes ont les mêmes pôles, la même erreur stationnaire de position  $e_{sp}$  mais un zéro de (a) n'apparaît pas dans (b).

2) Montrer que  $y_a = y_b + (k_d/k_p)\dot{y}_b$  et déduire que  $y_b$  est plus amortie que  $y_a$ .

3) Déterminer en fonction de  $G(0)$  la valeur de  $k$  qui annule  $e_{sp}$ .

4) Pour  $G_p(s) = 1/(s^2 + 1)$ ,  $k_p = 12$ ,  $k_d = 4$  et  $e_{sp} = 0$ , comparer les réponses temporelles et fréquentielles des structures (a) et (b).

1) Comparaison entre les structures (a) et (b).

$$y_a(s) = \frac{kG_a(s)}{1+G_a(s)}r(s), \quad G_a(s) = (k_p + k_d s)G_p(s)$$

$$P_a(s) = D_p(s) + (k_p + k_d s)N_p(s), \quad G_p(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)}$$

$$e_a(s) = r(s) - y_a(s) = \left(1 - \frac{kG_a(s)}{1+G_a(s)}\right)r(s)$$

$$e_{asp} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(1 - \frac{kG_a(s)}{1+G_a(s)}\right) \frac{1}{s} = 1 - \frac{kk_p G_p(0)}{1+k_p G_p(0)}.$$

D'autre part

$$y_b(s) = \frac{kG_b(s)}{1+G_b(s)}r(s),$$

$$G_b(s) = \frac{k_p G_p(s)}{1+k_d s G_p(s)} = \frac{k_p N_p(s)}{D_p(s) + k_d s N_p(s)}$$

$$P_b(s) = D_p(s) + (k_p + k_d s)N_p(s) = P_a(s) \quad (*)$$

$\Rightarrow$  (a) et (b) ont les mêmes pôles.

$$e_b(s) = r(s) - y_b(s) = \left(1 - \frac{kG_b(s)}{1+G_b(s)}\right)r(s)$$

$$= \left(1 - \frac{kk_p G_p(s)}{1+k_d s G_p(s) + k_p G_p(s)}\right)r(s) = H(s)r(s)$$

$$e_{bsp} = \lim_{s \rightarrow 0} s H(s) \frac{1}{s} = 1 - \frac{kk_p G_p(0)}{1+k_p G_p(0)} = e_{asp}. \quad (1)$$

Mais

$$T_a(s) = k \frac{G_a(s)}{1+G_a(s)} = k \frac{(k_p + k_d s)N_p(s)}{P_a(s)}. \quad (2)$$

$$T_b(s) = k \frac{G_b(s)}{1+G_b(s)} = k \frac{k_p N_p(s)}{P_b(s)} = k \frac{k_p N_p(s)}{P_a(s)}, \quad (3)$$

Le zéro  $-k_p/k_d$  de  $T_a$  n'est pas un zéro de  $T_b$ .

## 2) Comparaison des amortissements.

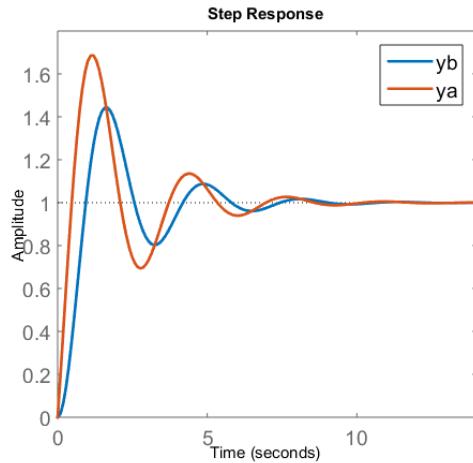
$$(2) \Rightarrow y_a = T_a r = k \left( \frac{k_p N_p}{P_a} r + \frac{k_d}{k_p} s \frac{k_p N_p}{P_a} r \right)$$

$$(3) \Rightarrow y_a = T_b r + \frac{k_d}{k_p} s (T_b r) = y_b + \frac{k_d}{k_p} \dot{y}_b.$$

On déduit de cette équation que

$$\begin{cases} y_a > y_b \text{ si } \dot{y}_b / dt > 0 \text{ (y}_b \nearrow\text{)} \\ y_a = y_b \text{ si } \dot{y}_b / dt = 0 \text{ (sur un extr/mum de y}_b\text{)} \\ y_a < y_b \text{ si } \dot{y}_b / dt < 0 \text{ (y}_b \searrow\text{).} \end{cases}$$

La figure suivante donne un exemple où les relations précédentes sont vérifiées et montre bien que  $y_b$  est plus amortie que  $y_a$ .

3) Valeur de  $k$  qui annule  $e_{sp}$ 

Soit  $r'$  la sortie de l'amplificateur  $k$  et  $T' = y/r'$ . On a :

$$k = \frac{r'}{r} = \frac{r' y}{y r} = \frac{1}{T' r}$$

$$e_{sp} = 0 \Leftrightarrow \lim_{s \rightarrow 0} \frac{y(s)}{r(s)} = 1 \Rightarrow k = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{T'(s)} = \frac{1}{T'(0)}$$

$$\Rightarrow k = \frac{1 + k_p G_p(0)}{k_p G_p(0)}.$$

## 4) Comparaison entre les réponses temporelles et fréquentielles

$$N_p = 1, D_p = s^2 + 1, k_p = 12, k_d = 4, k = \frac{1 + k_p}{k_p} = 13/12$$

et nous savons de 1) que

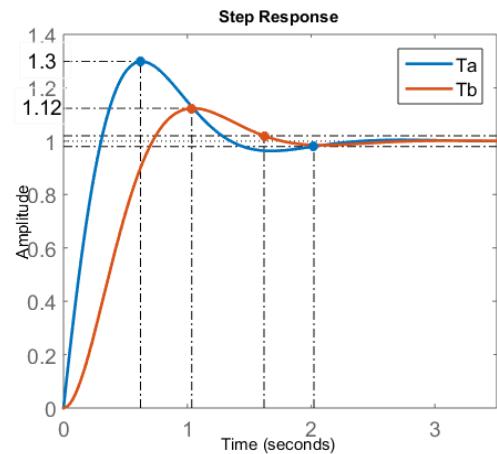
$$G_a(s) = (k_p + k_d s) \frac{N_p(s)}{D_p(s)} = \frac{4s + 12}{s^2 + 1}.$$

$$G_b(s) = \frac{k_p N_p(s)}{D_p(s) + k_d s N_p(s)} = \frac{12}{s^2 + 4s + 1}.$$

```
>> na = [4 12]; da = [1 0 1];
>> nb = 12; db = [1 4 1]; k = 13/12;
>> Ga = tf(na,da); Gb = tf(nb,db);
>> Ta = k*feedback(Ga,1);
>> Tb = k*feedback(Gb,1);
```

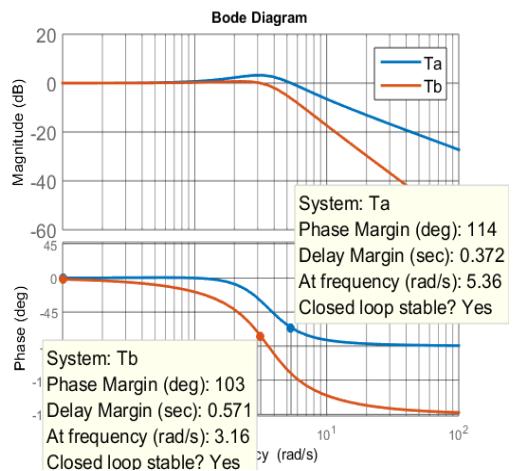
## Réponses temporelles

```
>> step(Ta,Tb)
```



## Réponses fréquentielles

```
>> bode(Ta,Tb)
```



Les deux structures ont des robustesses voisines mais comme  $\omega_{cga} > \omega_{cgb}$ , (a) est plus rapide que (b) et comme  $M_{ra} > M_{rb}$ , (a) est plus oscillatoire que (b).

**3-21.** Soit un procédé  $G_p(s) = 1/(s^2 - 4)$ .

1) Déterminer les coefficients d'un organe de commande de la forme  $G_c(s) = (b_1s + b_0)/(a_1s + a_0)$  tel que  $-2 \pm 2j$  et  $-8$  soient les pôles de la boucle fermée à retour unitaire  $T(s)$ . Que sera l'erreur stationnaire de position  $e_{sp}$  ?

2) Déterminer les coefficients de  $G_c(s) = (b_2s^2 + b_1s + b_0)/(a_2s^2 + a_1s + a_0)$  qui annule  $e_{sp}$  et place les pôles de  $T(s)$  en  $-2 \pm 2j$ ,  $-8$  et  $-8$ .

3) Vérifier que le lieu d'Evans de  $kG_c(s)G_p(s)$  passe par les pôles de 2) pour  $k = 1$ .

$$1) \underline{G_c(s) = (b_1s + b_0)/(a_1s + a_0)}$$

Polynôme caractéristique

$$P(s) = (a_1s + a_0)(s^2 - 4) + (b_1s + b_0)$$

$$= a_1s^3 + a_0s^2 + (b_1 - 4a_1)s + (b_0 - 4a_0).$$

Pôles désirés :  $p_1 = -2 + 2j$ ,  $p_2 = -2 - 2j$ ,  $p_3 = -8$ .

Coefficients de  $G_c$

$$a_1 = 1,$$

$$a_0 = -(p_1 + p_2 + p_3) = -(-4 - 8) = 12,$$

$$b_1 - 4a_1 = p_1p_2 + p_3(p_1 + p_2) = 8 - 8(-4) = 20 \Rightarrow b_1 = 16,$$

$$b_0 - 4a_0 = -p_1p_2p_3 = -8(-8) = 64 \Rightarrow b_0 = 64 - 48 = 16.$$

Erreur stationnaire de position

$$e_{sp} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G_c G_p} = \frac{1}{1 - b_0/a_0} = \frac{1}{1 - 16/12} = -3.$$

$$2) \underline{G_c(s) = (b_2s^2 + b_1s + b_0)/(a_2s^2 + a_1s + a_0)}$$

$$e_{sp} = 0 \Rightarrow G_c G_p \text{ de type } n_0 = 1 \Rightarrow a_0 = 0.$$

Polynôme caractéristique

$$P(s) = (a_2s^2 + a_1s)(s^2 - 4) + (b_2s^2 + b_1s + b_0)$$

$$= a_2s^4 + a_1s^3 + (b_2 - 4a_2)s^2 + (b_1 - 4a_1)s + b_0.$$

Pôles désirés :

$$p_1 = -2 + 2j, p_2 = -2 - 2j, p_3 = -8, p_4 = -8.$$

Coefficients de  $G_c$

$$a_2 = 1,$$

$$a_1 = -(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = -(-4 - 16) = 20,$$

$$b_2 - 4a_2 = p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_3p_4$$

$$= p_1p_2 + (p_3 + p_4)(p_1 + p_2) + p_3p_4$$

$$= 8 - 16(-4) + 64 = 136 \Rightarrow b_2 = 140$$

$$b_1 - 4a_1 = -(p_1p_2p_3 + p_1p_2p_4 + p_1p_3p_4 + p_2p_3p_4)$$

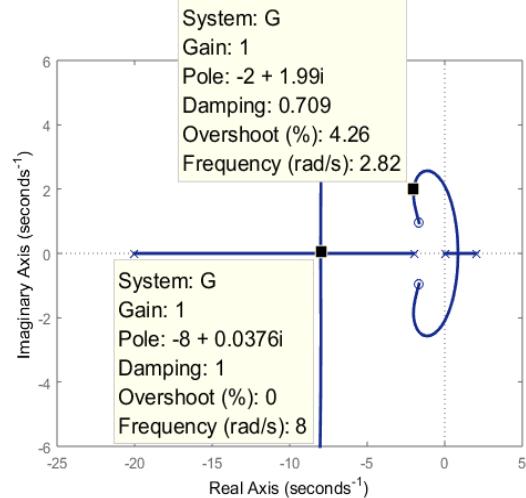
$$= -p_1p_2(p_3 + p_4) - (p_1 + p_2)p_3p_4$$

$$= -8(-16) - (-4)64 = 384 \Rightarrow b_1 = 464$$

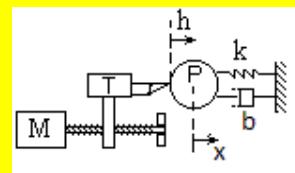
$$b_0 = p_1p_2p_3p_4 = 8(64) = 512.$$

$$\Rightarrow G_c(s) = \frac{140s^2 + 464s + 512}{s^2 + 20s}$$

### 3) Vérification



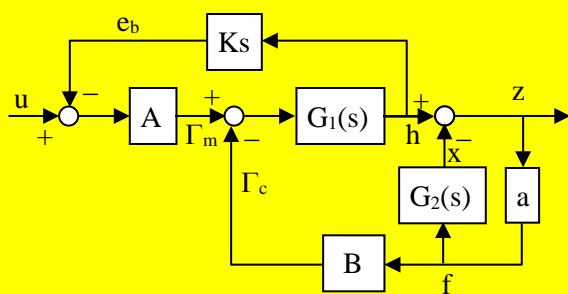
**3-22.** La figure suivante représente un système d'usinage d'une pièce P montée sur un tour. Au repos, l'outil de coupe est juste en contact avec la pièce à l'extrémité de son diamètre horizontal.



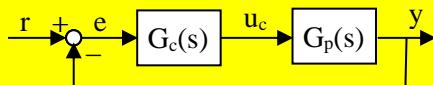
Pour l'enfoncer dans la pièce, on déplace le porte-outil T à l'aide d'un moteur cc commandé par son induit et d'une vis sans fin de pas p. Sous l'action de ce déplacement  $h$ , l'outil s'enfonce de  $z$  dans la pièce et fléchit celle-ci de  $x$ . Pour décrire les variations de  $x$ , on modélise la pièce par une masse  $m$  liée à un ressort de rigidité  $k$  et à un amortisseur de facteur  $b$ . On admet que l'enfoncement  $z$  de l'outil dans la pièce nécessite une force  $f = az$ . D'autre part, le moment d'inertie de l'axe moteur (rotor et vis) est  $J$ , le facteur de frottement sur cet axe est  $c$  et la masse du porte-outil est négligeable. L'induit du moteur a une résistance  $R$  et une inductance négligeable. Le facteur

de la tension contre-électromotrice est égal au facteur du couple  $k_a$  ( $\Gamma_m = k_a i$ ,  $e_b = k_a \Omega$ ).

1) Le schéma-bloc suivant montre comment l'enfoncement  $z$  est lié à la tension  $u$  appliquée au moteur. Écrire en fonction des paramètres du système les expressions des constantes  $K$ ,  $A$ ,  $B$  et des fonctions de transfert  $G_1$  et  $G_2$ . Déduire la fonction de transfert  $G(s) = z(s)/u(s)$ .



L'enfoncement  $z$  est mesuré en tout instant par un capteur piézoélectrique placé derrière l'outil et le signal de mesure  $y$  est ramené à un organe de commande  $G_c(s)$  suivi d'un organe d'action. L'ensemble est équivalent au schéma suivant où  $G_p(s)$  regroupe l'organe d'action, le système commandé et l'organe de mesure.



On suppose qu'en remplaçant les paramètres par leurs valeurs, on obtient :

$$G_p(s) = \frac{s^2 + 2s + 26}{(s+1)(s+3)(s^2 + 4s + 8)}.$$

2) Si  $G_c(s) = k_p$ , représenter à l'aide de Matlab le lieu d'Evans et déterminer a) les valeurs de  $k_p$  pour lesquels le système sera stable, b) la valeur  $k_{pb}$  de  $k_p$  pour laquelle la constante de temps est minimum et c) les valeurs de  $k_p$  pour lesquelles l'erreur stationnaire de position est inférieure à 0.1 et le système est stable.

3) Écrire l'expression de  $G_c(s)$  qui élimine les zéros et les pôles complexes de  $G_p(s)$ , remplace le pôle  $-3$  par un zéro en  $-3$  et produit une réponse temporelle de la boucle fermée d'erreur stationnaire de position nulle et de constante de temps 0.2 sec.

4) Éliminer de nouveau les pôles et les zéros complexes de  $G_p(s)$  puis déterminer les polynômes  $N_r$ ,  $D_c$  et  $N_y$  d'une commande à deux paramètres qui

produit aussi une réponse temporelle du système globale de  $e_{sp} = 0$  et de  $\tau = 0.2$  sec.

5) Comparer à l'aide de Matlab la réponse temporelle de la fonction de transfert  $T(s)$  avec celle de la fonction de transfert  $T2(s)$  déduite de 4).

### 1) Expressions des blocs de l'objet commandé.

#### • Expression de $K$

$$e_b = k_a \Omega,$$

$\Omega$  étant la vitesse angulaire du rotor et de la vis.

Or, un tour de la vis déplace le porte-outil d'un pas  $p$ .

$\Rightarrow \Omega/2\pi$  tours par sec. le déplace de  $\Omega p/2\pi = dh/dt$  mm/s

$$\Rightarrow e_b(t) = k_a \frac{2\pi}{p} \frac{dh}{dt} \Rightarrow e_b(s) = Ksh, \quad K = k_a \frac{2\pi}{p}.$$

#### • Expression de $A$

$$\Gamma_m = k_a i_a = k_a \frac{u - e_b}{R} \Rightarrow A = \frac{k_a}{R}.$$

#### • Expression de $B$

$\Gamma_c \Omega =$  puissance fournie par la vis au porte-outil.

$f \cdot dh/dt =$  puissance fournie par le porte-outil à la pièce.

Masse porte-outil négligeable  $\Rightarrow \Gamma_c \Omega = f \cdot dh/dt$

$$\Rightarrow \Gamma_c \Omega = f \cdot \Omega p / 2\pi \Rightarrow \Gamma_c = Bf, \quad B = p / 2\pi.$$

#### • Expression de $G_1(s)$

$$J \frac{d\Omega}{dt} + c\Omega = \Gamma_m - \Gamma_c, \quad \Omega = \frac{2\pi}{p} \frac{dh}{dt}.$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{p} \left( J \frac{d^2h}{dt^2} + c \frac{dh}{dt} \right) = \Gamma_m - \Gamma_c$$

$$\Rightarrow h(s) = G_1(s)(\Gamma_m - \Gamma_c), \quad G_1(s) = \frac{p/2\pi}{s(Js + c)}.$$

#### • Expression de $G_2(s)$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = f \Rightarrow x(s) = G_2(s)f(s),$$

$$G_2(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k}.$$

Fonction de transfert  $z(s)/u(s)$ .

Le schéma-bloc liant  $u$  à  $z$  a un chemin de gain  $C = AG_1$  et 3 boucles,

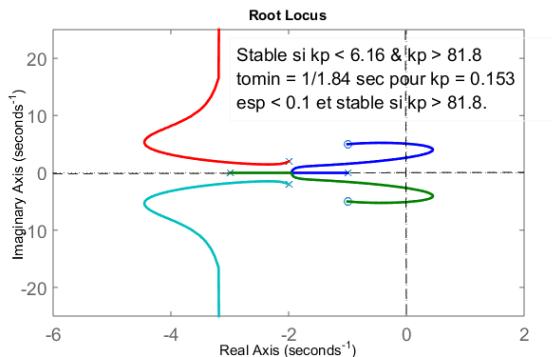
$$B_1 = -AKsG_1, B_2 = -aBG_1 \text{ et } B_3 = -aG_2.$$

Le chemin touche les 3 boucles.

$B_1$  ne touche pas  $B_3$ .

$$\Rightarrow \frac{z}{u} = \frac{C}{1 + B_1 + B_2 + B_3 + B_1 B_3}.$$

## 2) Valeurs particulières de $k_p$



- Le système est stable si les points de  $\mathcal{L}$  correspondants à  $k_p$  sont tous à gauche de l'axe des imaginaires. À l'aide du curseur, on lit que  $k_p$  stabilise le système si  $k_p < 6.16$  ou  $k_p > 81.8$ .
- Le minimum de la constante de temps est  $\tau_{\min} = 1/\max(\min\sigma_i)$  où  $-\sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , sont les parties réelles des points de  $\mathcal{L}$  correspondants à  $k_p$ . Ce lieu montre que  $\max(\min\sigma_i) = -s_b = -1.84$ , le point de bifurcation qui s'obtient pour  $k_p = k_{pb} = 0.154$ .
- D'autre part, on a  $e_{sp} = \frac{1}{1+k_p G_p(0)} = \frac{1}{1+26k_p/24} \leq \frac{1}{10}$  et  $\frac{26k_p}{24} \geq 9 \Rightarrow k_p \geq 8.31$ .

Mais pour  $6.16 < k_p < 81.8$ , le système est instable. Donc  $e_{sp} < 0.1$ ssi  $k_p > 81.8$ .

## 3) Boucle ouverte sans pôles ou zéros complexes. $e_{sp} = 0$ et $\tau = 0.2$ sec.

Un pont T élimine les pôles et les zéros complexes et un PID simplifie un pôle, le remplace par un zéro et annule  $e_{sp}$ . D'où

$$G_c(s) = k_p \underbrace{\frac{(s+3)^2}{s}}_{\text{PID}} \underbrace{\frac{s^2 + 4s + 8}{s^2 + 2s + 26}}_{\text{Pont T}}$$

La fonction de transfert de la boucle ouverte devient :

$$G(s) = G_c(s)G_p(s) = k_p \frac{s+3}{s(s+1)}$$

et celle de la boucle fermée est

$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{k_p(s+3)}{s^2 + (1+k_p)s + 3k_p}.$$

$$\Rightarrow \tau = 2/(1+k_p) = 1/5 \Rightarrow k_p = 9.$$

## 4) Commande à deux paramètres.

Soit  $G_{ps} = 1/[(s+1)(s+3)]$  l'objet commandé  $G_p$  précédé par le pont T qui élimine ses pôles et ses zéros complexes. On pose  $G_{ps} = N/D$ ,  $m = d^oN = 0$ ,  $n = d^oD = 2$ .

Ajoutons en série avec le pont T une commande à deux paramètres de sorte que la fonction de transfert de la boucle fermée soit de la forme

$$T2(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}. \quad 0 < \xi < 1, \omega_n > 0.$$

$T2 = N_T/D_T$ ,  $m_T = d^oN_T = 0$  et  $n_T = d^oD_T = 2$ . Ce choix est valable car,

- $T2$  est stable.
- Pas de zéros à prp dans  $G_p$ . (stabilité asymptotique).
- $n_T - m_T = n - m$ . (système complètement propre).
- $T2(0) = 1$  ( $e_{sp} = 0$ ).

D'abord  $\tau = 0.2 \Rightarrow 2\xi\omega_n = 10$

et si  $\xi = \sqrt{2}/2$ ,  $\omega_n^2 = 50$ .

D'autre part,

$$T2(s) = \frac{N_r N / D_c D}{1 + N_y N / D_c D} = \frac{N_r N}{D_c D + N_y N}$$

$$\Rightarrow \frac{T2(s)}{N(s)} = \frac{N_r}{D_c D + N_y N}$$

$$= \frac{50}{(s^2 + 10s + 50)(1)} = \frac{N_0}{D_0}. \quad (1)$$

Les coefficients des polynômes inconnus de la commande,  $N_r$ ,  $D_c$  et  $N_y$  s'obtiennent en identifiant les numérateurs et les dénominateurs de l'équation précédente. Cette identification aboutit à une solution

si  $d^o D_c = n_c \geq n - 1$  et  $d^o D_0 = n_0 \geq 2n - 1$ .

On prend  $n_c = n_y = 2 - 1 = 1$  c.à.d.

$$D_c(s) = a_1 s + a_0 \quad \text{et} \quad N_y(s) = b_1 s + b_0.$$

Mais comme  $n_0 = 2 < 2(2) - 1 = 3$ , on remplace  $N_0$  par

$N_0 A(s)$  et  $D_0$  par  $D_0 A(s)$  avec  $d^o A = 3 - 2 = 1$ .  $A(s)$  est un polynôme quelconque de degré 1 mais, pour diminuer son effet, on place sa racine loin vers la gauche des pôles de  $D_0$ . Prenons  $A(s) = s + 10$ .

L'équation (1) se vérifie si

$$N_r = \omega_n^2 A(s) = 50(s + 10) \text{ et}$$

$$D_c D + N_y N = D_0 A(s)$$

$$\Rightarrow (a_1 s + a_0)(s + 1)(s + 3) + (b_1 s + b_0)(1) \\ = (s^2 + 10s + 50)(s + 10)$$

ou

$$a_1 s^3 + (4a_1 + a_0)s^2 + (3a_1 + 4a_0 + b_1)s + (3a_0 + b_0) \\ = s^3 + 20s^2 + 150s + 500$$

ou sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 20 \\ 150 \\ 500 \end{pmatrix}$$

dont la solution est :  $a_1 = 1$ ,  $a_0 = 16$ ,  $b_1 = 83$ ,  $b_0 = 452$ .

Ainsi,  $D_c = s + 16$  et  $N_y = 83s + 452$ .

##### 5) Comparaison entre PID et 2 paramètres.

```
>> nps = 1; dps = [1 4 3];
>> Gps = tf(nps,dps);
>> nc1 = [-3 -3]; dc1 = 0;
>> Gc1 = zpk(nc1,dc1,9);
>> G1 = Gc1*Gps;
>> ncr = -10; dcr = [];
>> Nr = zpk(ncr,dcr,50);
>> ncd = 1; dcd = [1 16];
>> iDc = tf(ncd,dcd);
>> ncy =[83 452]; dcy = 1;
>> Ny = tf(ncy,dcy);
>> G2 = iDc*Gps;
>> T1 = feedback(G1,1);
>> T2 = Nr*feedback(G2,Ny);
>> step(T1)
>> hold
Current plot held
```

>> step(T2)

