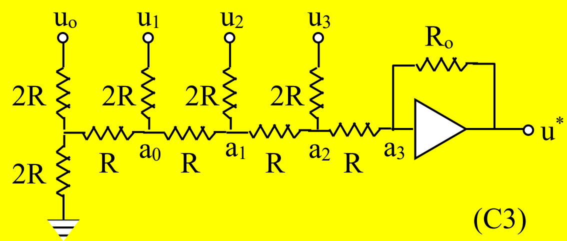
CMo-4 MODÉLISATION DES SYSTÈMES DISCRETS

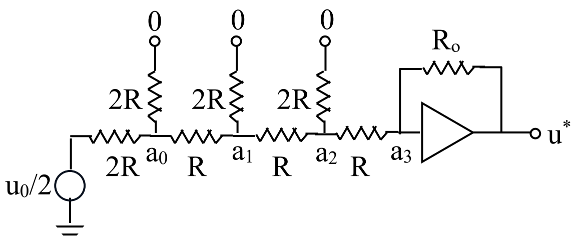
<u>EXERCICE 4-1</u>

Déterminer l'effet de chaque entrée u_i sur la sortie u^* du circuit suivant et déduire par superposition qu'il est aussi un convertisseur D/A. (Étant constitué de résistances de même valeur, il est plus commode à construire en circuit intégré).

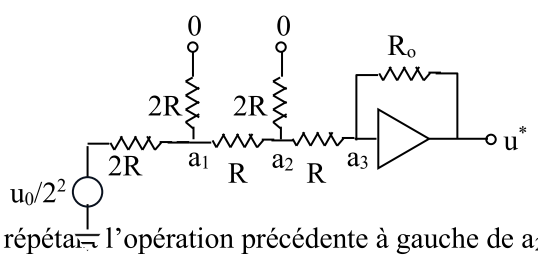


(C3)

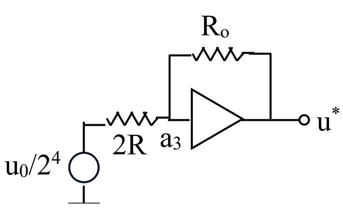
Supposons d'abord $u_0 = 1$ (E volt) et $u_i = 0\ \forall i > 0$. En appliquant Thévenin à gauche du point a_0, le circuit sera équivalent au suivant



En appliquant Thévenin à gauche du point a_1, on obtient :



En répétant l'opération précédente à gauche de a_2 puis à gauche de a_3, on obtient le circuit suivant



D'où l'effet de u_0 seul sur la sortie est

$$u^* = -(R_0E/2^5R)u_0.$$

Si $u_1 = 1$ et $u_i = 0\ \forall\neq 1$, le circuit équivalent (C2) s'obtient du circuit initial (C3) en remplaçant la partie à gauche de a_0 par une résistance 2R entre a_0 et la masse. Ceci nous ramène au circuit (C3) mais avec un étage en moins. D'où l'effet de u_1 seul est

$$u^* = -(R_0E/2^4R)u_1 = -(R_0E/2^5R)2u_1.$$

Par récurrence, l'effet de u_i seul est

$$u^* = -(R_0E/2^5R)2^iu_i.$$

Ainsi, par superposition, on a :

$$u^* = A\sum_{i=0}^{n-1}2^iu_i,\quad A = -\frac{R_0E}{2^5R}.$$

On voit bien qu'il s'agit d'un convertisseur D/A de gain A. Ce circuit a l'avantage d'être constitué par des résistances ayant toutes la même valeur.

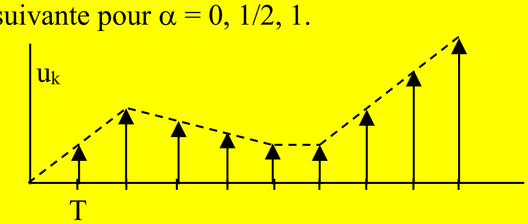
<u>EXERCICE 4-2</u>

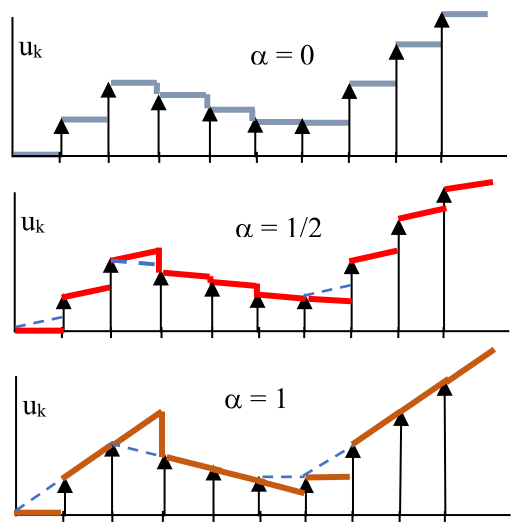
On appelle bloqueur d'ordre partiel $\alpha \in [0, 1]$ un circuit noté B_α dont la réponse à une entrée échantillonnée $u_k = u(kT)$ est donnée par

$$u_c(t) = u_k + \alpha u'_k.(t-kT) \quad \text{pour } kT \le t < (k+1)T$$

$$\text{avec}\quad u'_k = [u_k - u_{k-1}]/T.$$

Représenter la réponse $u_c(t)$ d'un bloqueur B_α à l'entrée u_k suivante pour $\alpha = 0, 1/2, 1$.





EXERCICE 4-3

Soit f(t) la fonction qui vaut sin(t) entre 0 et π et 0 ailleurs. Déterminer sa transformée Z pour T= π/6 et déduire ses valeurs aux instants kπ/6, k = 0, 1, 2, ...

f(t) est la différence entre sin(t) et sa troncation entre 0 et π. Comme 6T = π,

$$Z[f(t)] = Z[\sin(t)] - z^{-6} Z[\sin(t+\pi)]$$

Or $\sin(t+\pi) = -\sin(t)$,

$$\Rightarrow Z[f(t)] = (1+z^{-6})Z[\sin(t)] = \frac{(1+z^{-6})z\sin T}{z^2-(2\cos T)z+1}$$

$$= \frac{(1+z^{-6})z/2}{z^2-\sqrt{3}z+1} = \frac{1}{2}\frac{z^7+z}{z^8-\sqrt{3}z^7+z^6}$$

Division euclidienne

$$\begin{array}{l|l} z^7+z & z^8-\sqrt{3}z^7+z^6 \\ \hline \sqrt{3}z^6-z^5+z & z^{-1}+\sqrt{3}z^{-2}+2z^{-3}+\sqrt{3}z^{-4}+z^{-5}+0z^{-6}+0z^{-7}+\cdots \\ 2z^5-\sqrt{3}z^4+z & \\ \sqrt{3}z^4-2z^3+z & \\ z^3-\sqrt{3}z^2+z & \\ 0-0 & \\ 0 & \end{array}$$

On vérifie bien que $f_0 = 0$, $f_1 = ½$, $f_2 = (3)^{1/2}/2$, $f_3 = 1$, $f_4 = (3)^{1/2}/2$, $f_5 = ½$, $f_k = 0\ \forall k \geq 6$.

EXERCICE 4-4

Tenant compte du résultat de l'exercice 4-3, déterminer, pour T = π/6, la transformée Z de la fonction sinusoïdale redressée |sin(t)|, t ∈ [0. ∞).

La fonction |sin(t)| est périodique dont la fonction de périodicité est celle de l'exercice 4-3. Sa période est π = 6T, d'où sa transformée est

$$Z[|\sin(t)|] = \frac{1}{2}\frac{z^7+z}{z^8-\sqrt{3}z^7+z^6}\frac{1}{1-z^{-6}}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{z(z^6+1)}{(z^6-1)(z^2-\sqrt{3}z+1)}.$$

EXERCICE 4-5

Sachant que pour T << 1, sinωT ≈ ωT et cosωT ≈ 1, montrer qu'en appliquant la formule de l'accroissement pour calculer la transformée Z de la dérivée de sinωt, on obtient la transformée Z de ωcosωt.

$$Z[\Delta(\sin\omega t)] = \frac{z-1}{z}Z(\sin\omega t)$$

$$= \frac{z-1}{z}\frac{z\sin\omega T}{z^2-(2\cos\omega T)z+1}$$

$$\approx \frac{\omega T(z-1)}{z^2-(2\cos\omega T)z+1} \approx \frac{\omega T(z-\cos\omega T)}{z^2-(2\cos\omega T)z+1}$$

$$\Rightarrow Z[(\sin\omega t)'] = \frac{Z[\Delta(\sin\omega t)]}{T} = \omega Z(\cos\omega t).$$

EXERCICE 4-6

Déterminer l'inverse de la fonction

$$f(z) = \frac{z+2}{(z-0.5)(z^2-z+0.5)}$$

a) par décomposition en fractions simples et

b) par la formule d'inversion.

c) Vérifier le résultat en déterminant les premières valeurs de f_k par division euclidienne.

a) <u>Inversion par décomposition</u>

$$\frac{f(z)}{z} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-0.5} + \frac{Cz+D}{z^2-z+0.5},$$

$$= \frac{A}{z} + \frac{B}{z-0.5} + \frac{C(z-\alpha)+[(D+C\alpha)/\beta]\beta}{z^2-z+0.5} \qquad (1)$$

avec $\alpha = 1/2$ et $\beta = \sqrt{0.5-\alpha^2} = 1/2$

$$A = z\left.\frac{f(z)}{z}\right|_{z=0} = f(0) = \frac{2}{(-0.5)(0.5)} = -8.$$

$$B = (z-0.5)\left.\frac{f(z)}{z}\right|_{z=0.5} = \frac{0.5+2}{0.5(0.25-0.5+0.5)} = 20.$$

$$C = z\left.\frac{f(z)}{z}\right|_{z\to\infty} - A - B = 0+8-20 = -12.$$

$$\frac{D}{(1-1+0.5)} = \left.\frac{f(z)}{z}\right|_{z=1} - A - \frac{B}{1-0.5} - \frac{C}{(1-1+0.5)}$$

$$= \frac{3}{0.5(0.5)} + 8 - \frac{20}{0.5} + \frac{12}{0.5}$$

$$\Rightarrow D = 6+4-20+12 = 2 \Rightarrow (D+C/2)/\beta = -8$$

$$(1) \Rightarrow f(z) = -8 + 20\frac{z}{z-0.5} + \frac{-12z(z-1/2)-8z(1/2)}{z^2-z+0.5}$$

Les formules d'inversion des fractions simples donnent

$$f_k = -8\delta(t) + 20(0.5)^k - (0.5)^{k/2}(12\cos k\varphi + 8\sin k\varphi)$$

$$\varphi = \cos^{-1}(\sigma/\rho) = \cos^{-1}(0.5/\sqrt{0.5}) = \pi/4.$$

On vérifie que $f_0 = -8+20-12 = 0$.

b) Inversion par les résidus

Les pôles de f(z) sont :

$$p_1=0.5,\ p_2=\bar{p}_3=\frac{1+\sqrt{1-2}}{2}=\frac{1+j}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{j\pi/4}.$$

$f_0=0$ et pour $k\geq 1$,

$$f_k=\sum z^{k-1}f(z)=\frac{(0.5)^k+2((0.5)^{k-1}}{(0.5^2-0.5+0.5)}+h_k+\bar{h}_k \quad (1)$$

$$h_k=\frac{p_2^k+2p_2^{k-1}}{(p_2-1/2)(p_2-\bar{p}_2)}=\frac{(e^{j\pi/4}/\sqrt{2})^k+2(e^{j\pi/4}/\sqrt{2})^{k-1}}{(j/2)j}$$

$$=\left(1/\sqrt{2}\right)^k e^{kj\pi/4}\left[-2(1+2\sqrt{2}e^{-j\pi/4})\right]$$

$$=\left(0.5\right)^{k/2} e^{kj\pi/4}(-6+4j)$$

$$\Rightarrow h_k+\bar{h}_k=2\,\mathrm{Re}(h_k)$$

$$=-\left(0.5\right)^{k/2}(12\cos k\varphi+8\sin k\varphi],\ \varphi=\pi/4.$$

Donc $\quad f_k=20(0.5)^k-(0.5)^{k/2}(12\cos k\varphi+8\sin k\varphi),\quad k\geq 1.$

Vérification

$$\begin{array}{c|c} z+2 & z^3-3/2z^2+z-1/4 \\ \hline 7/2-z^{-1}+1/4z^{-2} & z^{-2}+7/2z^{-3}+17/4z^{-4}+25/8z^{-5}+\cdots \\ 17/4z^{-1}-13/4z^{-2}+7/8z^{-3} & \\ 25/8z^{-2}-27/8z^{-3}+17/16z^{-4} & \\ \vdots & \end{array}$$

En effet, la formule obtenue ci-dessus donne :

$$f_0=0,$$

$$f_1=20/2-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(12\frac{\sqrt{2}}{2}+8\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0,$$

$$f_2=20/4-\frac{1}{2}\left(12(0)+8\right)=1,$$

$$f_3=20/8-\frac{1}{2\sqrt{2}}[12(-\sqrt{2}/2)+8(\sqrt{2}/2)]=7/2$$

$$f_4=20/16-\frac{1}{4}[12(-1)+8(0)]=17/4,$$

$$f_5=20/32-\frac{1}{4\sqrt{2}}[12(-\sqrt{2}/2)+8(-\sqrt{2}/2)]=25/8$$

etc.

EXERCICE 4-7

Déterminer la transmittance G(z) relative à

$$G(s)=\frac{s-1}{s^2(s^2+1)}$$

a) à partir de la définition,
b) en appliquant la formule de conversion.

a) G(z) à partir de la définition

$$G(s)=\frac{A_2}{s^2}+\frac{A_1}{s}+\frac{Cs+D}{s^2+1}$$

$$A_2=s^2G(s)\big|_{s=0}=-1,$$

$$A_1=\frac{d}{ds}s^2G(s)\Big|_{s=0}=\frac{s^2+1-2s(s-1)}{(s^2+1)^2}\Bigg|_{s=0}=1,$$

$$C=sG(s)\big|_{s\to\infty}-A_1=0-1=-1,$$

$$D/2=G(1)-A_2-A_1-C/2=1/2\Rightarrow D=1.$$

$$\Rightarrow g(t)=-t+1-\cos t+\sin t$$

$$\Rightarrow G(z)=Z[g(t)]$$

$$=-\frac{Tz}{(z-1)^2}+\frac{z}{z-1}-\frac{z(z-\cos T)-z\sin T}{z^2-(2\cos T)z+1}.$$

b) Par la formule de conversion

$$G(z)=\sum \mathrm{Res}G(s)\frac{z}{z-e^{sT}}$$

Les poles sont : 0, j, – j.

$$\mathrm{Res}(0)=\frac{d}{ds}\left(\frac{s-1}{s^2+1}\frac{z}{z-e^{sT}}\right)\Bigg|_{s=0}$$

$$=\frac{s^2+1-2s(s-1)}{(s^2+1)^2}\frac{z}{z-e^{sT}}+\frac{s-1}{s^2+1}\frac{z(Te^{sT})}{(z-e^{sT})^2}\Bigg|_{s=0}$$

$$=\frac{z}{z-1}-\frac{zT}{(z-1)^2}.$$

$$\mathrm{Res}(j)=\frac{s-1}{s^2(s+j)}\frac{z}{z-e^{sT}}\Bigg|_{s=j}=-\frac{z(j-1)}{2j(z-e^{jT})}$$

$$\mathrm{Res}(j)+\mathrm{Res}(-j)=\frac{z(-j+1)}{2j(z-e^{jT})}-\frac{z(j+1)}{2j(z-e^{-jT})}$$

$$=-\frac{z}{2}\left(\frac{z-e^{-jT}+z-e^{jT}}{z^2-(2\cos T)z+1}\right)+\frac{z}{2j}\left(\frac{z-e^{-jT}-z+e^{jT}}{z^2-(2\cos T)z+1}\right)$$

$$=\frac{z(z-\cos T)+z\sin T}{z^2-(2\cos T)z+1}.$$

On obtient donc la même expression que dans a).

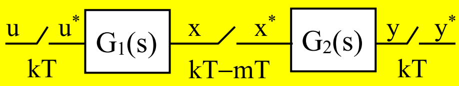
EXERCICE 4-8

Pour le système ci-dessous où

T = 1, m = 0.6, $G_1(s)$ = 1/s et $G_2(s)$ = 1/(s+1),

montrer que si l'entrée est u = δ(t), la sortie analogique est $y(t) = \sum_{k \le t-0.4} \exp[-t + (k+0.4)]$.

Représenter y(t) et calculer la transformée Z de son échantillonnage.



Pour u = δ(t), u*(t) = u(t) = δ(t) et

$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[G_1(s)] = \mathcal{L}^{-1}(1/s) = 1(t)$.

$$\Rightarrow x^*(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta[t-(k-m)]$$

Soit $g_2(t)$ la réponse de G_2 à $\delta(t)$.

$$g_2[t-(k-m)] = \begin{cases} 0 \text{ si } t < k-m \\ \exp[-t+(k-m))] \text{ si } t \ge k-m. \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(t) = \int_0^t x^*(\tau) g_2(t-\tau)d\tau$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \delta[\tau-(k-m)] g_2(t-\tau)d\tau$$

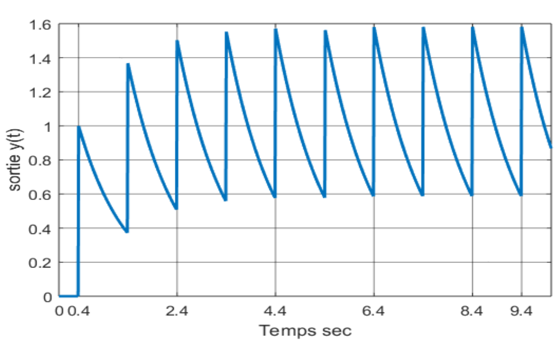
$$= \sum_{k=1}^{\infty} g_2[t-(k-m)],$$

Donc $$y(t) = \sum_{k=0}^{t-(1-m)} \exp(-t+k+1-m)$$

$$= \sum_{0 \le k \le t-0.4} g_2(-t+k+0.4).$$

Pour représenter y(t), on écrit :

```
>> t=0:0.01:10;
>> n = length(t);
>> y=zeros(1,n);
>> for k = 0:9
y=y+exp(-t+(k+0.4)*ones(1,n)).*(t>=(k+0.4)*ones(1,n));
>end
>> plot(t,y)
```



$$y(0) = y_0 = 0$$

$$y(\nu) = \sum_{k=0}^{\nu-1} \exp[-(\nu-(k+0.4))].$$

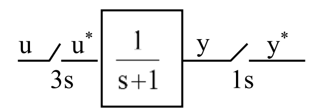
$$= \exp[-(\nu-0.4)] \sum_{k=0}^{\nu-1} e^k = \exp[-(\nu-0.4)] \frac{1-e^\nu}{1-e}.$$

$$y(z) = \frac{1}{1-e} Z\left[e^{-(\nu-0.4)} - e^{0.4}\right] = \frac{e^{0.4}}{1-e}\left(\frac{z}{z-e^{-1}} - \frac{z}{z-1}\right)$$

$$= \frac{ze^{0.4}}{1-e} \frac{e^{-1}-1}{(z-e^{-1})(z-1)} = \frac{e^{-0.6}z}{(z-e^{-1})(z-1)}.$$

EXERCICE 4-9

Écrire l'expression de la réponse analogique y(t) du système ci- contre où u est un échelon unité échantillonné chaque 3 secondes. Représenter cette fonction et calculer l'expression de y(kT), T = 1 seconde.



$$u^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-3k)$$

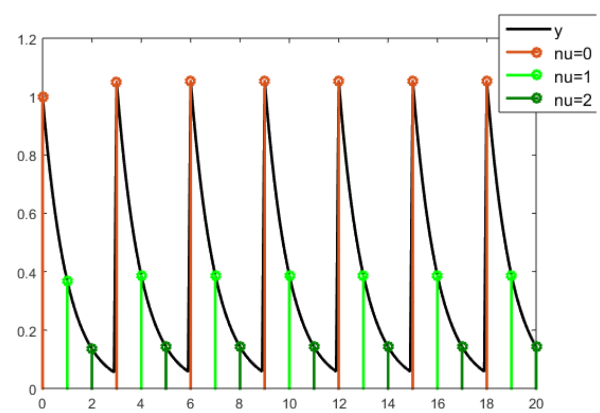
En posant $k_t = \max\{k | 3k \le t\}$,

$$y(t) = \sum_{k=0}^{k_t} e^{-(t-3k)} \quad \text{et}$$

$$y_n = \sum_{k=0}^{k_n} e^{-(n-3k)} \quad \text{avec} \quad n = 3k_n + \nu,\ \nu = 0{,}1 \text{ou} 2.$$

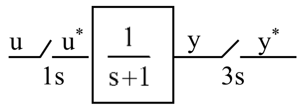
$$y_n = \sum_{k=0}^{k_n} e^{-(3k_n+\nu-3k)} = e^{-\nu} e^{-3k_n} \frac{1-e^{3(k_n+1)}}{1-e^3}$$

$$= e^{-\nu} \frac{e^{-3k_n} - e^3}{1-e^3} \quad \text{ou} \quad y_{3k_n+\nu} = e^{-\nu} \frac{1-e^{-3(k_n+1)}}{1-e^{-3}}.$$



EXERCICE 4-10

Écrire l'expression de la réponse analogique y(t) du système ci- contre où u est un échelon unité échantillonné chaque seconde. Représenter cette fonction et calculer l'expression de y(kT), T = 3 secondes.



$$u^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-k)$$

En posant $k_t = \max\{k|k\le t\}$,

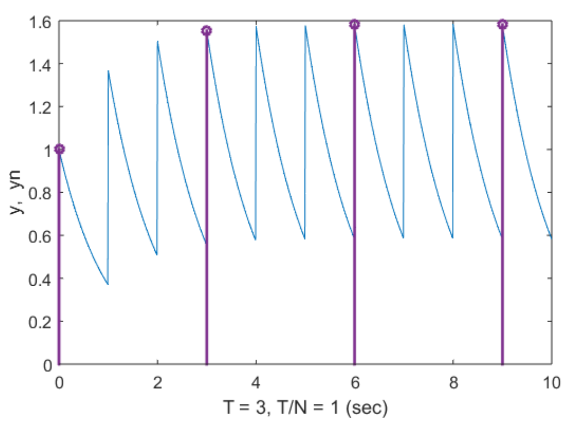
$$y(t)=\sum_{k=0}^{k_t} e^{-(t-k)} \quad \text{et}$$

$$y(3n)=\sum_{k=0}^{k_{3n}} e^{-(3n-k)},\quad k_{3n}=3n.$$

$$\Rightarrow y(3n)=e^{-3n}\frac{1-e^{3n+1}}{1-e}$$

ou pour $T=3$, la $n^{\text{ème}}$ valeur à la sortie est

$$y_n=\frac{e^{-3n}-e}{1-e}=\frac{e}{e-1}\left(1-e^{-(3n+1)}\right).$$



EXERCICE 4-11

Montrer que le résultat de l'exercice 4-10 précédent peut être obtenu par la formule

$$y(z)=\sum \mathrm{Res}\left(\frac{y(\zeta)}{\zeta}\frac{z}{z-\zeta^N}\right)$$

où $z = e^{sT}$, $\zeta = e^{sT/N}$, T = 3 sec, N = 3.

$$y(z)=\sum \mathrm{Res}\left(\frac{y(\zeta)}{\zeta}\frac{z}{z-\zeta^N}\right),\quad z=e^{sT},\ \zeta=e^{sT/N}.$$

$$y(\zeta)=G(\zeta)u(\zeta)=\frac{\zeta}{\zeta-e^{-1}}\frac{\zeta}{\zeta-1}$$

$$\Rightarrow y(z)=\sum \mathrm{Res}\left(\frac{\zeta}{(\zeta-1)(\zeta-e^{-1})}\frac{z}{z-\zeta^N}\right)$$

$$=\frac{z}{(1-e^{-1})(z-1)}+\frac{ze^{-1}}{(e^{-1}-1)(z-e^{-3})}$$

$$=\frac{e}{e-1}\frac{z[(z-e^{-3})-e^{-1}(z-1)]}{(z-1)(z-e^{-3})}.$$

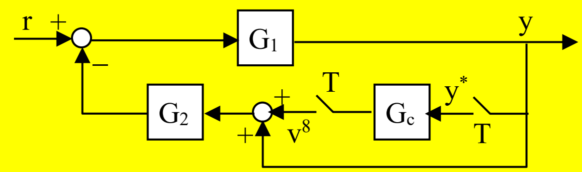
$$\Rightarrow y_n=\sum \mathrm{Res}\left(z^{n-1}y(z)\right)$$

$$=\frac{e}{e-1}\sum \mathrm{Res}\left(z^n\frac{(z-e^{-3})-e^{-1}(z-1)}{(z-1)(z-e^{-3})}\right)$$

$$=\frac{e}{e-1}\left(\frac{(1-e^{-3})}{(1-e^{-3})}+e^{-3n}\frac{e^{-1}(e^{-3}-1)}{1-e^{-3}}\right)=\frac{e}{e-1}(1-e^{-(3n+1)}).$$

EXERCICE 4-12

Déterminer en fonction de la référence r la transformée Z de la réponse y du système suivant.



$$y^*=\left(\frac{G_1}{1+G_2G_1}r\right)^*-\left(\frac{G_2G_1}{1+G_2G_1}\right)^*v^*$$

$$v^*=G_c^*y^*$$

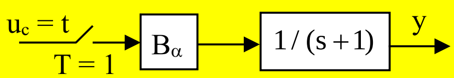
$$\Rightarrow y^*\left[1+\left(\frac{G_2G_1}{1+G_2G_1}\right)^*G_c^*\right]=\left(\frac{G_1}{1+G_2G_1}r\right)^*$$

$$\text{ou}\quad y(z)=\frac{Z\left(\frac{G_1}{1+G_2G_1}r\right)}{1+Z\left(\frac{G_2G_1}{1+G_2G_1}\right)Z(G_c)}.$$

AUTRES EXERCICES ET COMPLÉMENTS

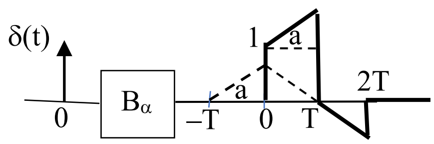
4-13. Représenter la réponse u(t) d'un bloqueur d'ordre partiel $\alpha \in [0, 1]$ (voir exercice 4-2) à une impulsion de Dirac $\delta(t)$ et déduire sa fonction de transfert $B_\alpha(s)$. Retrouver $B_0(s)$ et écrire l'expression de $B_1(s)$.

Déterminer et représenter la réponse y(t) du système suivant pour $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$.



Déduire dans chaque cas y(z) et retrouver le résultat en appliquant la formule de conversion.

Fonction de transfert de B_α



La réponse de B_α à δ(t) est

$$u(t)=\begin{cases}1+at \text{ si } 0\le t\le T\\ aT-at \text{ si } T\le t\le 2T\\ 0 \text{ ailleurs}\end{cases}$$

$$a=\frac{\alpha[u_c(0)-u_c(-1)]}{T}=\frac{\alpha}{T},\ \alpha\in[0,1].$$

$$\begin{aligned}u(t)&=(1+at)[1(t)-1(t-T)]\\&\quad+(aT-at)[1(t-T)-1(t-2T)]\\&=(1+at)+(aT-1-2at)1(t-T)\\&\quad-(aT-at)1(t-2T)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_\alpha(s)=u(s)&=\mathcal{L}(1+at)-e^{-sT}\mathcal{L}(aT+1+2at)\\&\quad+e^{-2sT}\mathcal{L}(aT+at).\\&=\left(\frac{1}{s}+\frac{a}{s^2}\right)-\left(\frac{1+aT}{s}+\frac{2a}{s^2}\right)e^{-sT}\\&\quad+\left(\frac{aT}{s}+\frac{a}{s^2}\right)e^{-2sT}\end{aligned}$$

$$\alpha=0\Rightarrow a=0\Rightarrow B_0(s)=\frac{1}{s}(1-e^{-sT})$$

$$\text{et } \alpha=1\Rightarrow a=\frac{1}{T}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow B_1(s)&=\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{Ts^2}\right)(1-2e^{-sT}+e^{-2sT})\\&=\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{Ts^2}\right)(1-e^{-sT})^2.\end{aligned}$$

Réponse continue

$$y(s)=G(s)B_\alpha(s)u^*(s),\quad G(s)=\frac{1}{s+1}.$$

$$u^*(s)=Z(t)\Big|_{z\to e^{sT}}=\frac{Tz}{(z-1)^2}\Big|_{z\to e^{sT}}=\frac{Te^{-Ts}}{(1-e^{-Ts})^2}$$

Pour $\alpha=0$, $a=0$, $T=1$,

$$\begin{aligned}y(s)=y_0(s)&=\frac{1}{s(s+1)}\frac{e^{-s}}{1-e^{-s}}=\frac{1}{s(s+1)}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-ks}\\&=\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right)\sum_{k=1}^{\infty}e^{-ks}\end{aligned}$$

et pour $\alpha = 1$, $a=1, T=1$,

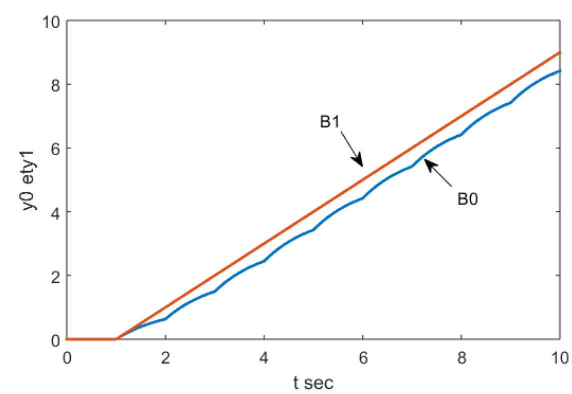
$$y(s)=y_1(s)=\left(\frac{s+1}{s^2}\right)\frac{1}{s+1}e^{-s}=\frac{1}{s^2}e^{-s}.$$

Donc, en posant $k_t=\max(k|kT\le t)$,

et en désignant par h_k la fonction h retardée de k on a :

$$y_0(t)=\sum_{k=1}^{k_t}(1-e^{-t})_k$$

$$y_1(t)=(t)_1.$$



Réponse échantillonnée

$$\begin{aligned}y_0(z)&=\sum_{n=0}^{\infty}y_0(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}(1-e^{-(n-k)})\right)z^{-n}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n-e^{-n}\left(\frac{1-e^{n+1}}{1-e}-1\right)\right)z^{-n}\\&=Z(n)-\frac{e}{1-e}\left[Z(e^{-n})-Z(1)\right]\end{aligned}$$

$$=\frac{z}{(z-1)^2}-\frac{e}{1-e}\left[\frac{z}{z-e^{-1}}-\frac{z}{z-1}\right]$$

$$=\frac{z}{(z-1)^2}-\frac{z}{(z-e^{-1})(z-1)}.$$

$$y_1(z)=z^{-1}Z(t)=\frac{1}{(z-1)^2}.$$

Application de la formule de conversion

$$y_0(z)=(B_0G)(z)u_c(z)$$

$$u_c(z)=\frac{z}{(z-1)^2} \quad \text{et}$$

$$(B_0G)(z)=\sum \mathrm{Res}(B_0G)(s)\frac{z}{z-e^s}$$

$$=\sum \mathrm{Res}\frac{1-e^{-s}}{s(s+1)}\frac{z}{z-e^s}$$

$$=\sum \mathrm{Res}\frac{1-z^{-1}}{s(s+1)}\frac{z}{z-e^s} \quad \text{car } e^{-s}=e^{-Ts}=z^{-1}$$

$$=1-\frac{z-1}{z-e^{-1}}.$$

$$\Rightarrow y_0(z)=\frac{z}{(z-1)^2}-\frac{z}{(z-e^{-1})(z-1)}.$$

$$y_1(z)=(B_1G)(z)u_c(z)$$

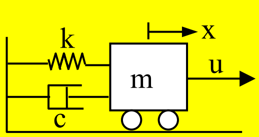
$$(B_1G)(z)=\sum \mathrm{Res}\frac{(1-z^{-1})^2}{s^2}\frac{z}{z-e^s}$$

$$=\sum \mathrm{Res}\frac{(z-1)^2}{s^2}\frac{z^{-1}}{z-e^s}$$

$$=z^{-1}(z-1)^2\left[\frac{d}{ds}\frac{1}{z-e^s}\right]_{s=0}=z^{-1}$$

$$\Rightarrow y_1(z)=\frac{1}{(z-1)^2}.$$

3-14. Une mitrailleuse peut être modélisée par le système suivant où u est un train d'impulsions d'intensité f et de période $T = 2\pi/\omega$.



En posant $c = 2m\sigma$ et $k = m(\sigma^2 + \omega^2)$ et sachant qu'à l'instant initial le système est inerte, déterminer la position x(t) de m en un instant $t > 0$ et représenter x(t).

Fonction de transfert du système

$$m\ddot{x}=u-c\dot{x}-kx$$

$$\Rightarrow G(s)=\frac{x(s)}{u(s)}=\frac{1}{ms^2+cs+k}$$

$$=\frac{1}{ms^2+2m\sigma s+m(\sigma^2+\omega^2)}$$

$$=\frac{1/m}{s^2+2\sigma s+\omega_n^2}, \quad \omega_n^2=\sigma^2+\omega^2.$$

Réponse au train d'impulsions

$$x(s)=G(s)u(s)$$

$$u(t)=f\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)\Rightarrow u(s)=f\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nTs}$$

$$\Rightarrow x(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{f/m}{s^2+2\sigma s+\omega_n^2}e^{-nTs}\right)$$

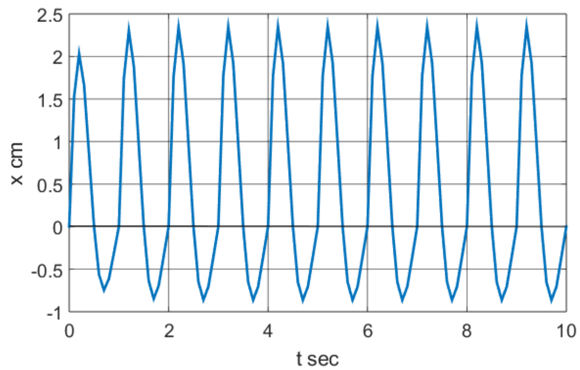
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{f/m}{(s+\sigma)^2+\omega^2}e^{-nTs}\right) \quad \text{car } \omega^2=\omega_n^2-\sigma^2.$$

$$x(t)=\frac{f}{m\omega}\sum_{n=0}^{\infty}\left[e^{-\sigma t}\sin\omega t\right]_{nT}$$

h_r désigne une fonction h retardée de r.

Représentation de x(t)

```
>> m = 10; f = 200; T = 1; sg = 2;
>> wn2 = (2*pi)^2 + sg^2;
>> t = 0:0.1:10;
>> n = length(t);
>> x = zeros(1,n);
>> for k = 0:10
>> a = f/(m*(2*pi));
>> kv = k*ones(1,n);
>> xt = (a*exp(-sg*(t-kv))).*sin(2*pi*(t-kv));
>> x = x + xt.*(t>=kv);
>> end
>> plot(t,x)
```



4-15. Pour calculer $S_n^p = \sum_{k=1}^{n} k^p, p \in \mathcal{N}$, on remarque que $S_n^p - S_{n-1}^p = n^p$. Écrire l'expression de $Z(S_n^p)$ en fonction de $Z(n^p)$ et donner une relation liant $Z(S_n^p)$ à $Z(S_n^{p-1})$ et sa dérivée. Que vaut $Z(S_n^0)$? Déduire S_n^p pour p = 1 et p = 2.

$$S_n^p - S_{n-1}^p = n^p \Rightarrow Z(S_n^p) - z^{-1}Z(S_n^p) = Z(n^p)$$

$$\Rightarrow Z(S_n^p) = \frac{z}{z-1} Z(n^p). \quad (1)$$

D'autre part,

$$Z(n^p) = z \sum_{n=0}^{\infty} n^{p-1} n z^{-n-1} = -z \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} n^{p-1} z^{-n}$$

$$= -z \frac{d}{dz} Z(n^{p-1})$$

$$(1) \Rightarrow Z(S_n^p) = -\frac{z^2}{(z-1)} \frac{d}{dz} Z(n^{p-1})$$

$$= -\frac{z^2}{(z-1)} \frac{d}{dz}\left[\frac{z-1}{z} Z(S_n^{p-1})\right]$$

$$= -\frac{z^2}{(z-1)}\left[\frac{1}{z^2} Z(S_n^{p-1}) + \frac{z-1}{z}\frac{d}{dz} Z(S_n^{p-1})\right]$$

$$\Rightarrow Z(S_n^p) = -\frac{1}{(z-1)} Z(S_n^{p-1}) - z\frac{d}{dz} Z(S_n^{p-1}) \quad (2)$$

$$\text{avec} \quad Z(S_n^0) = Z\left(\sum_{k=1}^{n} 1\right) = Z(n) = \frac{z}{(z-1)^2}. \quad (3)$$

Calcul de $1+\cdots+n$ et $1^2+\cdots+n^2$.

D'après (2) et (3),

$$Z(S_n^1) = -\frac{1}{(z-1)} Z(S_n^0) - z\frac{d}{dz} Z(S_n^0)$$

$$= -\frac{z}{(z-1)^3} + \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} = \frac{z^2}{(z-1)^3} \quad (4)$$

$$\Rightarrow S_n^1 = \sum \mathrm{Res}[z^{n-1} Z(S_n^1)] = \sum \mathrm{Res} \frac{z^{n+1}}{(z-1)^3}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{dz^2} z^{n+1}\right)_{z=1} = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{attendu.}$$

$$Z(S_n^2) = -\frac{1}{(z-1)} Z(S^1) - z\frac{d}{dz} Z(S_n^1)$$

$$(4) \Rightarrow Z(S_n^2) = -\frac{z^2}{(z-1)^4} - z\frac{2z(z-1) - 3z^2}{(z-1)^4}$$

$$= -\frac{z^2}{(z-1)^4} + \frac{z^2(z+2)}{(z-1)^4} = \frac{z^2(z+1)}{(z-1)^4}$$

$$\Rightarrow S_n^2 = \sum \mathrm{Res} \frac{z^{n+1}(z+1)}{(z-1)^4} = \frac{1}{3!}\left[\frac{d^3}{dz^3} z^{n+1}(z+1)\right]_{z=1}$$

$$= \frac{(n+1)n(2n+1)}{6}.$$

Vérification

Pour n = 4, $1+2^2+3^2+4^2 = 30 = (5)(4)(9)/6$
Pour n = 5, $1+2^2+3^2+4^2+5^2 = 55 = (6)(5)(11)/6$.

4-16. La réponse impulsionnelle d'un système est la suite périodique (0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 ....). Déterminer sa transmittance puis retrouver sa réponse impulsionnelle par décomposition et par la formule d'inversion.

Transmittance

$$G(z) = \frac{y(z)}{Z[\delta(t)]} = g(z)$$

Posons $h(z) = z^{-2}(1+z^{-1})$

et $h_r = h$ retardée de r périodes

$$g(z) = h(z) + h_4(z) + h_8(z) + h_{12}(z) + \cdots$$

$$= h(z)(1 + z^{-4} + z^{-8} + z^{-12} + \cdots)$$

$$= z^{-2}(1+z^{-1})\frac{1}{1-z^{-4}} = \frac{z(z+1)}{z^4 - 1}.$$

Inversion par décomposition

$$\frac{G(z)}{z}=\frac{1}{(z-1)(z^2+1)}$$

$$=\frac{A}{z-1}+\frac{Bz+C}{z^2+1}$$

$$=\frac{(A+B)z^2+(C-B)z+(A-C)}{(z-1)(z^2+1)}$$

$$\Rightarrow A+B=0,\quad C-B=0,\ A-C=1.$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{2},\quad B=-\frac{1}{2},\quad C=-\frac{1}{2}$$

$$G(z)=\frac{1}{2}\left[\frac{z}{z-1}-\frac{z+1}{z^2+1}\right]$$

$$\Rightarrow g_n=\frac{1}{2}\left[1-\cos n\frac{\pi}{2}-\sin n\frac{\pi}{2}\right].$$

Par la formule d'inversion

$$g(z)=\frac{z(z+1)}{z^4-1}$$

$$\Rightarrow g_n=\sum \mathrm{Res}\left[z^{n-1}g(z)\right]=\sum \mathrm{Res}\left[\frac{z^n(z+1)}{z^4-1}\right]$$

$$=\sum \mathrm{Res}\left[\frac{z^n}{(z-1)(z^2+1)}\right]\ \text{en } 1,\ j \text{ et } -j$$

$$=\left.\frac{z^n}{(z^2+1)}\right|_{z=1}+\left.\frac{z^n}{(z-1)(z-j)}\right|_{z=-j}+\left.\frac{z^n}{(z-1)(z+j)}\right|_{z=j}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{e^{-jn\frac{\pi}{2}}}{2j(j+1)}+\frac{e^{jn\frac{\pi}{2}}}{2j(j-1)}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2j}\left[\frac{j(e^{jn\frac{\pi}{2}}+e^{-jn\frac{\pi}{2}})+(e^{jn\frac{\pi}{2}}-e^{-jn\frac{\pi}{2}})}{-2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[1-\cos n\frac{\pi}{2}-\sin n\frac{\pi}{2}\right].$$

Vérification

$g_0 = (1–1–0)/2 = 0$, $g_1 = (1–0–1)/2 = 0$,
$g_2 = (1+1–0)/2 = 1$, $g_3 = (1–0+1)/2 = 1$,
$g_4 = (1–1–0)/2 = 0$, …

4-17. Soit u_k la somme d'argent retirée ($u_k < 0$) ou déposée ($u_k \geq 0$) à la banque au début d'un mois k. En posant $\beta = 1 + \alpha$ où α (< 1) est l'intérêt mensuel, écrire l'expression de la transmittance liant la suite u_k à la suite des valeurs y_k du capital au début des mois. Si l'on dépose 2000$ chaque 3 mois en retirant 1000$ au début de chacun des autres mois, comment varie le capital ?

Soit y_k le capital au début du mois k juste avant d'effectuer une nouvelle transaction. On suppose que $y_0 = 0$.

Transmittance

$$y_k=\beta(y_{k-1}+u_{k-1})\Rightarrow y_k-\beta y_{k-1}=\beta u_{k-1}$$

$$\Rightarrow Z(y_k)-\beta z^{-1}Z(y_k)=\beta z^{-1}Z(u_k)$$

$$\Rightarrow G(z)=\frac{y(z)}{u(z)}=\frac{\beta z^{-1}}{1-\beta z^{-1}}=\frac{\beta}{z-\beta}.$$

Variation du capital

La suite des transactions (en milliers) est
$u=\{2,-1,-1,2,-1,-1,2,-1,-1,\ldots\}$.

Posons $u^0(z)=2-1z^{-1}-1z^{-2}=\dfrac{2z^2-z-1}{z^2}$

la fonction de périodicité de u dont la période est 3. On a :

$$u(z)=Zu^0\frac{1}{1-z^{-3}}=\frac{2z^2-z-1}{z^2(1-z^{-3})}=\frac{z(2z^2-z-1)}{(1-z^{-3})}$$

$$=\frac{z(2z+1)(z-1)}{(z-1)(z^2+z+1)}=\frac{z(2z+1)}{(z-p)(z-\bar{p})},$$

$$\text{avec}\quad p=-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{j\frac{2\pi}{3}}.$$

$$\Rightarrow y(z)=\frac{\beta z(2z+1)}{(z-\beta)(z-p)(z-\bar{p})}$$

$$\Rightarrow y_n=\beta\sum \mathrm{Res}\frac{z^n(2z+1)}{(z-\beta)(z-p)(z-\bar{p})}$$

$$=\beta\left[\begin{array}{c}\dfrac{\beta^n(2\beta+1)}{(\beta-p)(\beta-\bar{p})}-\dfrac{p^n(2p+1)}{(\beta-p)(p-\bar{p})}\\ +\dfrac{\bar{p}^n(2\bar{p}+1)}{(\beta-\bar{p})(p-\bar{p})}\end{array}\right]$$

$$=\frac{A}{j\sqrt{3}}\left[\begin{array}{c}\beta^n(2\beta+1)j\sqrt{3}-p^n(2p+1)(\beta-\bar{p})\\ +\bar{p}^n(2\bar{p}+1)(\beta-p)\end{array}\right]$$

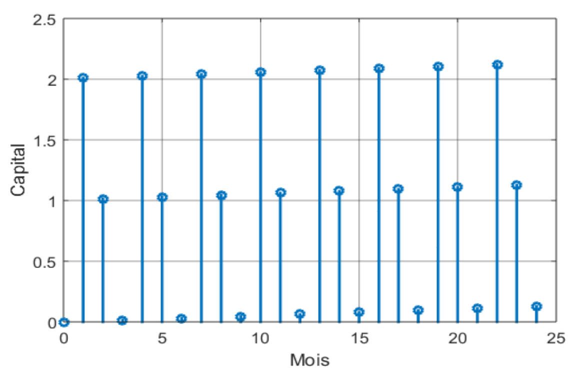
avec $A=\dfrac{\beta}{(\beta-p)(\beta-\bar{p})}=\beta/(\beta^2+\beta+1)$

et comme $(2p+1)(\beta-\bar{p})=j\sqrt{3}(\beta-\bar{p})$,

$$y_n=A\left[\beta^n(2\beta+1)-(\beta p^n-p^{n-1})-(\beta\bar{p}^n-\bar{p}^{n-1})\right]$$

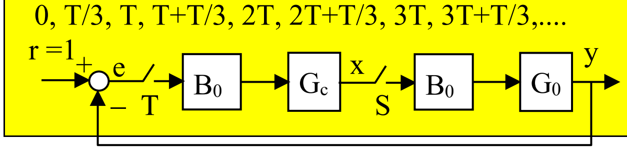
$$=A\left[\beta^n(2\beta+1)-2\beta\cos n\frac{2\pi}{3}+2\cos(n-1)\frac{2\pi}{3}\right]$$

```
>> bg = 1.005;        % ag = 0.5%.
>> A = bg/(bg^2+bg+1);
>> for n = 1:25
      B = (2*bg+1)*bg^(n-1);
      C1 =  -2*bg*cos((n-1)*(2*pi/3));
      C2 = 2*cos((n-2)*(2*pi/3));
   y(n) = A*(B + C1 + C2);
   end
>> stem(0:24,y)
```



4-18. Pour le système ci-dessous où T = 1, $G_c(s)$ = 1/s et $G_0(s)$ = 1/(s+1), déterminer y(z) pour chacun des cas suivants :

1) S est un échantillonneur de période T.
2) S est un échantillonneur de période T/3.
3) S échantillonne aux instants
 0, T/3, T, T+T/3, 2T, 2T+T/3, 3T, 3T+T/3,....



1) <u>Période de S = T</u>

$y(z)=Z(B_0G_0)x(z),\quad x(z)=Z(B_0G_c)e(z)$

et $\quad e(z)=Z[r(t)-y(t)]=r(z)-y(z)$

$$\Rightarrow y(z)=\frac{Z(B_0G_0)Z(B_0G_c)}{1+Z(B_0G_0)Z(B_0G_c)}r(z).\quad (1)$$

Or,

$$Z(B_0G_c)=(1-z^{-1})Z\left(\frac{G_c(s)}{s}\right)=(1-z^{-1})Z\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

$$=(1-z^{-1})Z(t)=(1-z^{-1})\frac{Tz}{(z-1)^2}=\frac{1}{z-1}.$$

$$Z(B_0G_0)=(1-z^{-1})Z\left(\frac{1}{s(s+1)}\right)$$

$$=(1-z^{-1})Z\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right)=(1-z^{-1})\left(\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-T}}\right)$$

$$=1-\frac{z-1}{z-e^{-1}}=\frac{1-e^{-1}}{z-e^{-1}}.$$

$$(1)\Rightarrow y(z)=\frac{\dfrac{1}{z-1}\cdot\dfrac{1-e^{-1}}{z-e^{-1}}}{1+\dfrac{1}{z-1}\cdot\dfrac{1-e^{-1}}{z-e^{-1}}}\,\frac{z}{z-1}$$

$$=\frac{(1-e^{-1})z}{(z-1)[z^2-(1+e^{-1})z+1]}$$

$$\frac{y(z)}{z}=\frac{A}{z-1}+\frac{Bz+C}{z^2-(1+e^{-1})z+1}$$

$$=\frac{1}{z-1}-\frac{z-e^{-1}}{z^2-(1+e^{-1})z+1}.$$

En posant $1+e^{-1}=2\cos\omega$,

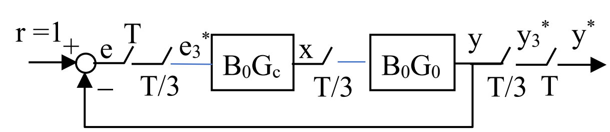
$$\frac{y(z)}{z}=\frac{1}{z-1}-\frac{z-\cos\omega+\cos\omega-e^{-1}}{z^2-2\cos\omega z+1}$$

$$\Rightarrow y_k=1-\cos k\omega-\frac{\cos\omega-e^{-1}}{\sin\omega}\sin k\omega.$$

Cette réponse oscille en permanence autour de 1.

2) <u>Période de S = T/3</u>

Sachant que deux échantillonneurs en série l'un lent et l'autre rapide sont équivalents à l'échantillonneur lent, on peut remplacer le système par le suivant.



$$y(z)=\sum \mathrm{Res}\left(\frac{y(\zeta)}{\zeta}\,\frac{z}{z-\zeta^3}\right),\quad z=e^{sT},\zeta=e^{sT/3}.$$

$$y(\zeta)=\left[(B_0G_0)(\zeta)\right]\left[(B_0G_c)(\zeta)\right]e(\zeta),$$

Comme $e(\zeta)=e(z)$,

$$\begin{aligned}y(\zeta)&=(1-\zeta^{-1})^2 Z_3\left(\frac{1}{s(s+1)}\right)Z_3\left(\frac{1}{s^2}\right)e(z)\\&=(1-\zeta^{-1})^2 Z_3\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1)}\right)Z_3\left(\frac{1}{s^2}\right)e(z)\\&=(1-\zeta^{-1})^2\left(\frac{\zeta}{\zeta-1}-\frac{\zeta}{\zeta-e^{-1/3}}\right)\left(\frac{(1/3)\zeta}{(\zeta-1)^2}\right)e(z)\\&=\frac{(1-e^{-1/3})/3}{(\zeta-1)(\zeta-e^{-1/3})}e(z)\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}y(z)&=\sum \mathrm{Res}\left(\frac{(1-e^{-1/3})/3}{\zeta(\zeta-1)(\zeta-e^{-1/3})}\,\frac{z}{z-\zeta^3}\right)e(z)\\&=\frac{z(1-e^{-1/3})}{3}\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{ze^{-1/3}}+\dfrac{1}{(1-e^{-1/3})(z-1)}\\-\dfrac{1}{e^{-1/3}(1-e^{-1/3})(z-e^{-1})}\end{array}\right]e(z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\;]&=\frac{(1-e^{-1/3})(z-1)(z-e^{-1})+ze^{-1/3}(z-e^{-1})-z(z-1)}{ze^{-1/3}(1-e^{-1/3})(z-1)(z-e^{-1})}\\&=\frac{[-(1-e^{-1/3})(1+e^{-1})-e^{-4/3}+1]z+e^{-1}(1-e^{-1/3})}{ze^{-1/3}(1-e^{-1/3})(z-1)(z-e^{-1})}\\&=\frac{e^{-1/3}(1-e^{-2/3})z+e^{-1}(1-e^{-1/3})}{ze^{-1/3}(1-e^{-1/3})(z-1)(z-e^{-1})}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow y(z)\;=\frac{(1-e^{-1/3})}{3}\,\frac{(1+e^{-1/3})z+e^{-2/3}}{(z-1)(z-e^{-1})}[r(z)-y(z)]$$

On pose $K=\dfrac{(1-e^{-2/3})}{3},\quad a=\dfrac{e^{-2/3}}{1+e^{-1/3}}.$

$$\begin{aligned}\Rightarrow y(z)&=\frac{K[(z+a]}{(z-1)(z-e^{-1})+K(z+a)}\left(\frac{z}{z-1}\right)\\&=\frac{Kz(z+a)}{[z^2-(1+e^{-1}-K)z+(Ka+e^{-1})](z-1)}\end{aligned}$$

$$\frac{y(z)}{z}=\frac{A}{z-1}+\frac{Bz+C}{z^2-(2e^{-\sigma}\cos\omega)z+e^{-2\sigma}}$$

avec $e^{-2\sigma}=Ka+e^{-1}=\dfrac{e^{-2/3}(1+2e^{-1/3})}{3}$

$$\Rightarrow \sigma=-\mathrm{Ln}[e^{-2/3}(1+2e^{-1/3})/6]=1.57$$

et $2e^{-\sigma}\cos\omega=1+e^{-1}-K=\dfrac{3e^{-1}+e^{-2/3}+2}{3}=1.2$

$$\Rightarrow \cos\omega=\frac{1.2}{2\sqrt{e^{-2/3}(1+2e^{-1/3})/3}}=0.93$$

Enfin

$$A=1,\quad B=-1,\quad C=\frac{3}{e^{1/3}+2}=0.88$$

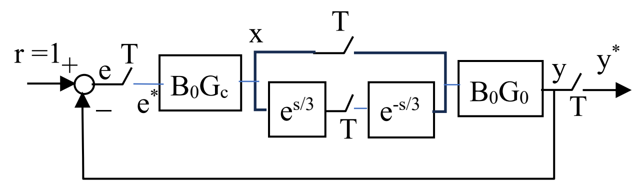
$$\Rightarrow y(z)=\frac{z}{z-1}-\frac{z(z-e^{-\sigma}\cos\omega)-[C-e^{-\sigma}\cos\omega]z}{z^2-(2e^{-\sigma}\cos\omega)z+e^{-2\sigma}}$$

$$\Rightarrow y_k=1-e^{-\sigma k}\left(\cos k\omega-\frac{C-e^{-\sigma}\cos\omega}{e^{-\sigma}\sin\omega}\sin k\omega\right).$$

C'est une suite oscillatoire amortie qui tend vers 1.

3) <u>$S = kT + \varepsilon T/3$, $\varepsilon = (1-(-1)^k)/2$</u>

L'échantillonneur S est équivalent à deux échantillonneurs en parallèle de période T = 1 dont l'un est précédé d'une avance de 1/3 et suivi d'un retard de 1/3.



$$y(z)=\left[\begin{array}{l}Z(B_0G_c)Z(B_0G_0)\\+Z(B_0G_ce^{s/3})Z(B_0G_0e^{-s/3})\end{array}\right]e(z)$$

$$\begin{aligned}Z(B_0G_c)Z(B_0G_0)&=(1-z^{-1})^2Z\left(\frac{1}{s^2}\right)Z\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right)\\&=\left(\frac{z-1}{z}\right)^2\left(\frac{z}{(1-z)^2}\right)\left(\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-1}}\right)\\&=\frac{1-e^{-1}}{(z-1)(z-e^{-1})}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Z(B_0G_ce^{s/3})&=Z(B_0G_ce^{(1-2/3)s})\\&=z(1-z^{-1})Z(G_ce^{(1-2/3)s})\\&=(z-1)Z_{1/3}\left(\frac{G_c(s)}{s}\right)\end{aligned}$$

$$=(z-1)\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{s^2}\,\frac{e^{s/3}}{z-e^s}\right)$$

$$=(z-1)\left[\frac{(e^{s/3}/3)(z-e^s)+e^s e^{s/3}}{(z-e^s)^2}\right]_{s=0}$$

$$=(z-1)\frac{(1/3)(z-1)+1}{(z-1)^2}=\frac{z+2}{3(z-1)}.$$

$$Z(B_0G_0e^{-s/3})=(1-z^{-1})Z_{2/3}\left(\frac{1}{s(s+1)}\right)$$

$$=\frac{z-1}{z}\mathrm{Res}\left(\frac{1}{s(s+1)}\,\frac{e^{2s/3}}{z-e^s}\right)$$

$$=\frac{z-1}{z}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{e^{-2/3}}{z-e^{-1}}\right)=K\frac{z-a}{z(z-e^{-1})},$$

$$K=1-e^{-2/3},\quad a=(e^{-2/3}-e^{-1})/K.$$

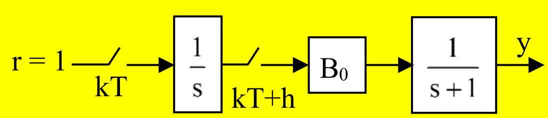
Donc

$$y(z)=\left[\frac{1-e^{-1}}{(z-1)(z-e^{-1})}+\frac{z+2}{3(z-1)}.K\frac{z-a}{z(z-e^{-1})}\right]e(z)$$

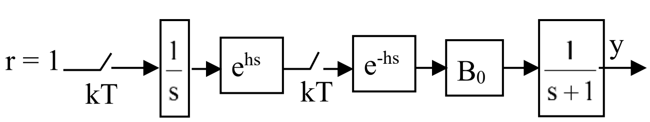
$$=\frac{3z(1-e^{-1})+K(z+2)(z-a)}{3z(z-1)(z-e^{-1})}[r(z)-y(z)]$$

$$\Rightarrow y(z)=\frac{3z(1-e^{-1})+K(z+2)(z-a)}{3z(z-1)(z-e^{-1})+3z(1-e^{-1})+K(z+2)(z-a)}$$

4-19. Déterminer et représenter la réponse y_k du système suivant pour h = 0 et h = 0.2 avec T = 1.



L'échantillonneur aux instants kT + h peut être remplacé par un échantillonneur de période T précédé d'une avance h et suivi d'un retard h.



Si $h=0$,

$$y(z)=(1-z^{-1})Z\left(\frac{1}{s(s+1)}\right)Z\left(\frac{1}{s}\right)r(z)$$

$$=Z\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right)Z(1)=\left(\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-1}}\right)\frac{z}{(z-1)}$$

$$=(1-e^{-1})\frac{z^2}{(z-1)^2(z-e^{-1})}.$$

$$\Rightarrow y_k=(1-e^{-1})\sum\mathrm{Res}\frac{z^{k+1}}{(z-1)^2(z-e^{-1})}$$

$$\mathrm{res}(1)=\frac{d}{dz}\frac{z^{k+1}}{z-e^{-1}}\bigg|_{z=1}$$

$$=\frac{(k+1)z^k(z-e^{-1})-z^{k+1}}{(z-e^{-1})^2}\bigg|_{z=1}$$

$$=\frac{(k+1)(1-e^{-1})-1}{(1-e^{-1})^2}.$$

$$\mathrm{res}(e^{-1})=\frac{e^{-(k+1)}}{(1-e^{-1})^2}$$

$$\Rightarrow y_k=\frac{(k+1)(1-e^{-1})-(1-e^{-(k+1)})}{2(1-e^{-1})}.$$

Si $h=0.2$,

$$y(z)=(1-z^{-1})Z\left(\frac{e^{-hs}}{s(s+1)}\right)Z\left(\frac{e^{hs}}{s}\right)r(z)$$

$$=Z_{1-h}\left(\frac{1}{s(s+1)}\right)zZ_h\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$=z\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{s(s+1)}\,\frac{e^{(1-h)s}}{z-e^s}\right)\mathrm{Res}\left(\frac{1}{s}\,\frac{e^{hs}}{z-e^s}\right)$$

$$=z\left(\frac{1}{z-1}-\frac{e^{-(1-h)}}{z-e^{-1}}\right)\left(\frac{1}{z-1}\right)$$

$$=\frac{z[(1-e^{-0.8})z-e^{-1}(1-e^{0.2})}{(z-1)^2(z-e^{-1})}$$

$$\Rightarrow y_k = \sum \mathrm{Res}\,\frac{z^k(az-b)}{(z-1)^2(z-e^{-1})},$$

$$a=(1-e^{-0.8}),\quad b=e^{-1}(1-e^{0.2}).$$

$$\mathrm{res}(1)=\frac{d}{dz}\left.\frac{z^k(az-b)}{z-e^{-1}}\right|_{z=1}$$

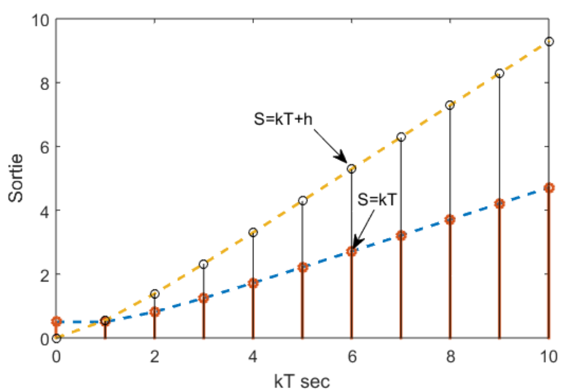
$$=\left.\frac{[a(k+1)z^k-bkz^{k-1}](z-e^{-1})-z^k(az-b)}{(z-e^{-1})^2}\right|_{z=1}$$

$$=\frac{[(a-b)k+a](1-e^{-1})-(a-b)}{(1-e^{-1})^2}$$

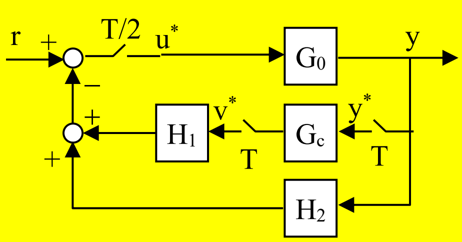
$$\mathrm{res}(e^{-1})=\frac{e^{-k}(ae^{-1}-b)}{(1-e^{-1})^2}$$

Donc

$$y_k=\frac{[(a-b)k+a](1-e^{-1})-(a-b)+e^{-k}(ae^{-1}-b)}{(1-e^{-1})^2}$$



4-20. Déterminer la transmittance Zy/Zr du système suivant



$$y^*=G_0^*u^*$$

$$u^*=r^*-H_1^*v^*-(H_2G_0)^*u^*$$

$$\Rightarrow u^*=\frac{r^*-H_1^*v^*}{1+(H_2G_0)^*}$$

$$v^*=G_c^*y^*$$

$$y^*=G_0^*\left(r^*-H_1^*G_c^*y^*-(H_2G_0)^*\frac{r^*-H_1^*G_c^*y^*}{1+(H_2G_0)^*}\right)$$

$$\Rightarrow y^*=\frac{G_0^*-\dfrac{(H_2G_0)^*}{1+(H_2G_0)^*}}{1+G_0^*H_1^*G_c^*-\dfrac{(H_2G_0)^*H_1^*G_c^*}{1+(H_2G_0)^*}}\,r^*$$

$$=\frac{G_0^*+(G_0^*-1)(H_2G_0)^*}{[1+(H_2G_0)^*](1+G_0^*H_1^*G_c^*)-(H_2G_0)^*H_1^*G_c^*}\,r^*.$$

Donc

$$\frac{y(z)}{r(z)}=\frac{Z(G_0)+[Z(G_0)-1]Z(H_2G_0)}{[1+Z(H_2G_0)][1+\frac{1}{2}Z(G_0)Z(G_c)]-\frac{1}{2}Z(H_2G_0)Z(G_c)}$$

NB

$$Z(G_c)=Z\left(1+\frac{2}{s}\right)=Z\big(\delta(t)+2.1(t)\big)=1+2\frac{z}{z-1}$$

$$=\frac{3z-1}{z-1}.$$