

CMo-5 ANALYSE ET COMMANDE DES SYSTÈMES DISCRETS.

EXERCICES 5-1

Montrer que les 3 premières conditions de Jury sont nécessaires et suffisantes pour que les racines d'un polynôme de second degré $P(z)$ soient à l'intérieur du cercle unité.

Indication. Écrire $P(z)$ sous la forme :

$$a_2(z - p_1)(z - p_2), \quad a_2 > 0.$$

a) Système stable $\Rightarrow P(1) \geq 0, P(-1) \geq 0, |a_0| \leq |a_2|, |p_1| < 1, |p_2| < 1 \Rightarrow |a_0| = |a_2 p_1 p_2| < |a_2|$.

Si $p_1, p_2 \in \mathcal{R} \Rightarrow -1 < p_1, p_2 < 1$,

$$\text{et } a_2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} P(1) = a_2(1-p_1)(1-p_2) > 0, \\ P(-1) = a_2(-1-p_1)(-1-p_2) > 0. \end{cases}$$

$$\text{Si } p_1, p_2 \notin \mathcal{R} \Rightarrow p_2 = \bar{p}_1 \Rightarrow \begin{cases} 1-p_2 = \overline{1-p_1} \\ -1-p_2 = -\overline{1-p_1} \end{cases}$$

$$\text{et } a_2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} P(1) = a_2 \|1-p_1\|^2 > 0, \\ P(-1) = a_2 \|-1-p_1\|^2 > 0. \end{cases}$$

b) $P(1) \geq 0, P(-1) \geq 0, |a_0| \leq |a_2| \Rightarrow |p_1| \leq 1, |p_2| \leq 1, |a_0| = |a_2 p_1 p_2| < |a_2| \Rightarrow |p_1 p_2| < 1$. (*)

Si $p_1, p_2 \notin \mathcal{R} \Rightarrow p_2 = \bar{p}_1 \Rightarrow |p_1| = |p_2| = \sqrt{|p_1 p_2|} < 1$.

Si $p_1, p_2 \in \mathcal{R}$ et $a_2 > 0$

$$P(1) > 0 \Rightarrow \begin{cases} 1 < p_1 \text{ et } 1 < p_2 \stackrel{(*)}{\Rightarrow} |p_1 p_2| > 1 \text{ à rejeter} \\ \text{ou} \\ 1 > p_1 \text{ et } 1 > p_2. \quad (1) \end{cases}$$

$$P(-1) > 0 \Rightarrow \begin{cases} -1 > p_1 \text{ et } -1 > p_2 \stackrel{(*)}{\Rightarrow} |p_1 p_2| > 1 \text{ à rejeter} \\ \text{ou} \\ -1 < p_1 \text{ et } -1 < p_2. \quad (2) \end{cases}$$

Donc (1) et (2) $\Rightarrow -1 < p_1, p_2 < 1$.

EXERCICE 5-2

Montrer que toutes les racines de

$$P(z) = 8z^4 - 2z^2 - 2z + 1$$

sont à l'intérieur du cercle unité.

$$P(1) = 8 - 2 - 2 + 1 = 5 > 0 \quad \text{ok}$$

$$P(-1) = 8 - 2 + 2 + 1 = 9 > 0 \quad \text{ok}$$

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 & 8 & |a_4| > |a_0| & \text{ok} \\ 8 & 0 & -2 & -2 & 1 & |b_3| < |b_0| & \text{ok} \\ -63 & -2 & 14 & 16 & & & \\ 16 & 14 & -2 & -63 & & & \\ 3713 & -98 & 914 & & & & \\ 914 & -98 & 3713 & & & & |c_2| < |c_0| \quad \text{ok} \end{array}$$

Comme toutes les conditions de Jury sont satisfaites les 4 pôles sont à l'intérieur du cercle unité.

EXERCICE 5-3

Soit $G(z) = -(z+1)/[2(z^2 + 2z + 2)]$ la transmittance de la boucle ouverte d'un système de commande. En posant $e^{j\omega T} = \alpha + j\beta$ avec $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, déterminer les points d'intersection de la courbe de Nyquist $G(e^{j\omega T})$ avec l'axe des réels. Vérifier le résultat à l'aide de Matlab.

$$\begin{aligned} G(z) = G(e^{j\omega T}) &= \frac{-(1+\alpha)+j\beta}{2(z+1-j)(z+1+j)}, \quad z = \alpha + j\beta, \\ &= -\frac{[(1+\alpha)+j\beta]}{2[(\alpha+1)+j(\beta-1)][(\alpha+1)+j(\beta+1)]} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{[(1+\alpha)+j\beta]}{[(\alpha+1)^2 - (\beta^2 - 1)] + j2\beta(\alpha+1)} \quad (1) \\ &= \frac{1}{2} \frac{[(1+\alpha)+j\beta]\overline{\text{den}}}{\|\text{den}\|^2} \end{aligned}$$

$$\overline{\text{den}} = [(\alpha+1)^2 - (\beta^2 - 1)] - j2\beta(\alpha+1)$$

$$G(e^{j\omega T}) \in \mathcal{R} \Rightarrow \text{Im}[G(e^{j\omega T})] = 0$$

$$\Rightarrow -2\beta(\alpha+1)^2 + \beta[(\alpha+1)^2 - (\beta^2 - 1)] = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \pm 1 \quad (\text{car } \alpha^2 + \beta^2 = 1 \text{ ou} \\ -(\alpha+1)^2 - (\beta^2 - 1) = 0 \Rightarrow -(\alpha+1)^2 + \alpha^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \pm 1 \text{ et } \beta = 0 \quad \text{ou} \\ \alpha = -1/2 \Rightarrow \beta = \pm \sqrt{3}/2 \end{cases}$$

Donc les valeurs de G sur \mathcal{R} sont

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} G(1+0j) = -1/5 = -0.2, \\ G(-1+0j) = 0 \end{cases}$$

et $G(-1/2 + j\sqrt{3}/2)$

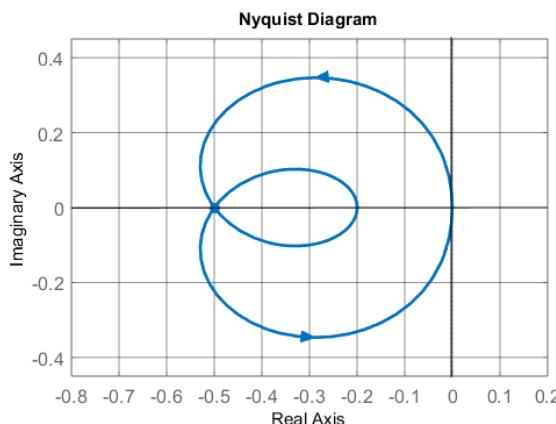
$$= -\frac{1}{2} \frac{(1/2 + j\sqrt{3}/2)}{21/4 - 3/4 + 1 + j\sqrt{3}/2} = -\frac{1}{2}$$

Les 3 points d'intersection avec \mathcal{R} sont

$$0, -0.2, -0.5.$$

Vérification

```
>> n = [-1 -1]; d = [2 4 4];
>> G = tf(n,d,1);
>> nyquist(G)
```



EXERCICE 5-4

Déterminer analytiquement la réponse $y(t)$ du système $G(s) = 1/(s + 1)$ à l'entrée $u(t) = 1(t)$ échantillonnée chaque seconde. Représenter cette réponse à l'aide de Matlab et donner l'expression d'une fonction $y_a(t)$ ayant le même échantillonnage de période $T = 1$ sec que celui de $y(t)$.

Expression analytique de $y(t)$

$$y(t) = \int_0^t u^*(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

$$u^*(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(\tau - kT) \quad \text{et} \quad g(t-\tau) = e^{-(t-\tau)}.$$

$$\Rightarrow y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t \delta(\tau - kT) e^{-(t-\tau)} d\tau \\ = \sum_{k=0}^{k_t} e^{-(t-kT)} = e^{-t} \frac{1 - e^{(k_t+1)T}}{1 - e^T}, \\ k_t = \max\{k | kT \leq t\}.$$

Échantillonnage de $y(t)$

La réponse impulsionnelle de G étant e^{-t} , sa transmittance est $G(z) = Z(e^{-t}) = z/(z - e^{-T})$, $T = 1$. D'où

$$y(z) = G(z)Z[1(t)] = \frac{z^2}{(z - e^{-1})(z - 1)} \\ \Rightarrow y_k = \sum \operatorname{Res} \frac{z^{k+1}}{(z - e^{-1})(z - 1)} \\ = \frac{1}{1 - e^{-1}} - \frac{e^{-(k+1)}}{1 - e^{-1}} = \frac{1}{1 - e^{-1}} \left(1 - e^{-(k+1)}\right).$$

$\{y_k\}$ est l'échantillonnage de la fonction

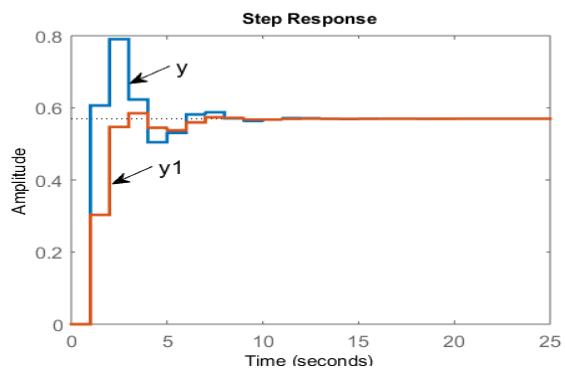
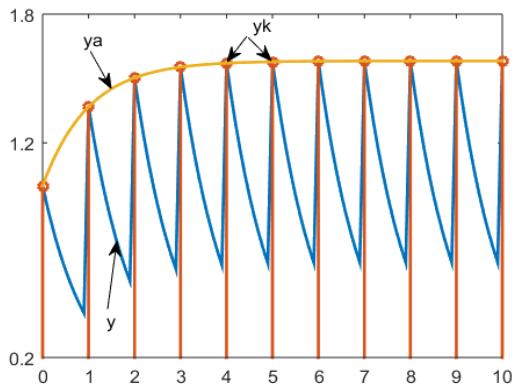
$$y_a(t) = \frac{1}{1 - \rho} (1 - \rho e^{-t}), \quad \rho = e^{-1}.$$

Représentation de $y(t)$

```
>> t=0:0.1:10;
>> n=length(t);
>> y=zeros(1,n);
>> for k=0:10
    kv = k*ones(1,n);
    y = y + exp(-t+kv).*(t>=kv);
  end
>> plot(t,y)
```

Représentation de y_k et $y_a(t)$

```
>> hold
Current plot held
>> r = exp(-1);
>> j=0:10;
>> for k = 0:10
    yk(k+1)=(1-r^(k+1))/(1-r);
  end
>> stem(j,yk)
>> ya=(1-r*exp(-t))/(1-r);
>> plot(t,ya)
```

**EXERCICE 5-5**

Soit $y(z)$ la réponse de $G(z)$ à une entrée $u(z)$ et $y_1(z)$ la réponse de $G_1(z) = zG(z)/[(\tau + 1)z - \tau]$ à la même entrée $u(z)$. Montrer que, pour $\tau > 0$, y et y_1 tendent en régime stationnaire vers la même valeur mais que $y_1(k) < y(k) \Leftrightarrow y_1(k) > y_1(k-1)$. Déduire que y_1 est plus amortie que y .

$$\begin{aligned} \text{a)} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z}{(\tau+1)z-\tau} &= 1 \\ \Rightarrow y_1(\infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{zG(z)}{(\tau+1)z-\tau} u(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} G(z)u(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} y(z) = y(\infty). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} y_1(z) &= \frac{z}{(\tau+1)z-\tau} y(z) \\ \Rightarrow (\tau+1)y_1(z) - z^{-1}\tau y_1(z) &= y(z) \\ \Rightarrow \tau(Z[y_1(k) - y_1(k-1)]) &= Z[y(k) - y_1(k)] \\ \text{Z injective} \\ \Rightarrow \tau[y_1(k) - y_1(k-1)] &= [y(k) - y_1(k)] \\ \tau > 0 \Rightarrow \\ (y(k) - y_1(k)) > 0 &\Leftrightarrow (y_1(k) - y_1(k-1)) > 0. \end{aligned}$$

Cette équivalence signifie que $y > y_1$ durant la croissance de y_1 et $y < y_1$ durant la décroissance de y_1 . Les oscillations de y_1 sont donc moins fortes que les oscillations de y . La figure suivante représente un exemple.

La figure représente les réponses indicielles de

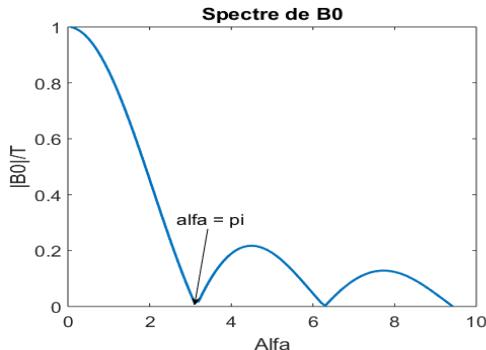
$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{ze^{-1/2}}{z^2 - 0.5e^{-1/2}z + e^{-1}} \quad \text{et} \\ G_1(z) &= \frac{z^2 e^{-1/2}}{(2z-1)(z^2 - 0.5e^{-1/2}z + e^{-1})}. \end{aligned}$$

Le pôle stable $1/2$ a amorti la réponse.

EXERCICE 5-6

Montrer que le spectre d'un bloqueur d'ordre 0 est $|B_0(j\omega)| = T|\sin \alpha|$ avec $\alpha = \omega T/2$. Représenter $|B_0(j\omega)|$ en fonction de α et montrer que ce bloqueur reconstitue assez fidèlement $f(t)$ à partir de $f^*(t)$ si $\omega_a > 6 \omega_e$, $\omega_e = 2\pi/T$, ω_a la plus grande fréquence dans $|f(j\omega)|$.

$$\begin{aligned} B_0(s) &= \frac{1-e^{-sT}}{s} \\ \Rightarrow B_0(j\omega) &= \frac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega} = \frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{j\omega e^{j\omega T/2}} \\ \Rightarrow |B_0(j\omega)| &= \left| \frac{2 \sin(\omega T/2)}{\omega} \right| = T \left| \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right|, \quad \alpha = \frac{\omega T}{2}. \end{aligned}$$



$$\omega_e > 6\omega_a \Rightarrow \frac{2\pi T}{T} > 6 \frac{\omega_a T}{2} \text{ ou } \alpha_a < \frac{\pi}{6}, \quad \alpha_a = \frac{\omega_a T}{2}.$$

$\forall \omega < \omega_a, \alpha < \alpha_a$ et $|B_0(j\omega)|$ décroissante

$$\Rightarrow |B_0(j\omega)| > T \left| \frac{\sin \pi/6}{\pi/6} \right| = 0.955T$$

et comme $T|f^*(j\omega)| = |f(j\omega)|$,

$$|f^*(j\omega)||B_0(j\omega)| > 0.955T|f^*(j\omega)| = 0.955|f(j\omega)|.$$

Ceci signifie que les harmoniques de $f(t)$ traversent B_0 en ne modifiant presque pas leurs amplitudes.

Par contre,

$$\forall \omega > \frac{\omega_e}{2}, \alpha = \frac{\omega T}{2} > \frac{2\pi T}{T} \frac{2}{2} = \pi$$

$$\text{d'où } |B_0(j\omega)| = T \left| \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right| < \frac{T}{\pi}.$$

$$\Rightarrow |f^*(j\omega)||B_0(j\omega)| < 0.32T|f^*(j\omega)|$$

Ceci signifie que les amplitudes des harmoniques de $f^*(t)$ de fréquences $\omega > \omega_e/2$ sont très atténuees par le bloqueur surtout si la période d'échantillonnage T est petite.

EXERCICE 5-7

Montrer que les pôles et les zéros des discrétilisations de Tustin des compensateurs AP et RP et du régulateur PID sont les images des pôles et des zéros de leurs correspondants analogiques par l'inverse de la transformation de Tustin. Déterminer pour chaque discrétilisation l'expression de son préamplificateur K .

a) Discrétilisation de AP et RP

La forme analogique de ces compensateurs est

$$G_c(s) = a \frac{s+1/\tau}{s+a/\tau}.$$

En appliquant à cette forme la transformation de Tustin $s = (2/T)(z - 1)/(z + 1)$, on obtient :

$$G_d(z) = a \frac{\frac{2(z-1)}{T(z+1)} + \frac{1}{\tau}}{\frac{2(z-1)}{T(z+1)} + \frac{a}{\tau}} = a \frac{2\tau(z-1) + T(z+1)}{2\tau(z-1) + aT(z+1)}$$

$$= a \frac{(2\tau+T)z - (2\tau-T)}{(2\tau+aT)z - (2\tau-aT)} = K \frac{z-\alpha}{z-\beta}$$

$$\text{avec } \alpha = \frac{1-T/2\tau}{1+T/2\tau} \text{ et } \beta = \frac{1-aT/2\tau}{1+aT/2\tau}.$$

$$\text{et } K = a \frac{(2\tau+T)}{(2\tau+aT)} = \frac{1-\beta}{1-\alpha}.$$

Le zéro α et le pôle β de $G_d(z)$ sont respectivement les images du zéro $-1/\tau$ et du pôle $-a/\tau$ de $G_c(s)$ par la transformation inverse de Tustin

$$z = (1 + Ts/2)/(1 - Ts/2).$$

D'autre part, sachant que $z = e^{sT}$, K vérifie

$$\lim_{s \rightarrow 0} G_c(s) = \lim_{z \rightarrow 1} G_d(z) = 1.$$

b) Discrétilisation d'un PID

Ce régulateur avec son filtre est de la forme :

$$G_c(s) = k \frac{(s+a)(s+b)}{s(s+c)}.$$

En remplaçant s par sa transformée de Tustin, on obtient :

$$\begin{aligned} s+a &= \frac{2(z-1)}{T(z+1)} + a = \frac{(2+aT)z - (2-aT)}{T(z+1)} \\ &= (2+aT) \frac{z-\alpha}{T(z+1)}, \quad \alpha = \frac{1-aT/2}{1+aT/2}. \end{aligned}$$

De même

$$s+b = (2+bT) \frac{z-\beta}{T(z+1)}, \quad \beta = \frac{1-bT/2}{1+bT/2},$$

$$s+c = (2+cT) \frac{z-\gamma}{T(z+1)}, \quad \gamma = \frac{1-cT/2}{1+cT/2},$$

Donc

$$G_d(z) = K \frac{(z-\alpha)(z-\beta)}{(z-1)(z-\gamma)}$$

$$\begin{aligned} \text{avec } K &= k \frac{(1+aT/2)(1+bT/2)}{1+cT/2} \\ &= \frac{kab}{c} \frac{1-\gamma}{(1-\alpha)(1-\beta)}. \end{aligned}$$

α, β, γ et 1 sont respectivement les images de $-a, -b, -c$ et 0 par la transformation $z = (1 + Ts/2)/(z - Ts/2)$ et K vérifie

$$\lim_{s \rightarrow 0} sG_c(s) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{2(z-1)}{T(z+1)} G_d(z) = K \frac{ab}{c}.$$

EXERCICE 5-8

La fonction de transfert du système commandé est

$$G_p(s) = 16 / [s(s+2)].$$

Il est précédé d'un bloqueur B_0 et commandé par avance de phase de transmittance

$$G_c(z) = k(z-0.905)/(z-\beta)$$

avec $T = 0.05$ sec. Quelle valeur doit avoir $\arg[G_c(p)]$ pour que le lieu d'Evans passe par le point p défini par $\xi = 0.7$ et $\omega_n = 0.2\pi/T$. Déduire la valeur de β et calculer la valeur de $K = 0.02k$ pour laquelle p est un pôle de la boucle fermée. Que seront les caractéristiques de la réponse indicielle ?

Transmittance $B_0G_p(z)$

$$B_0G_p(z) = \frac{z-1}{z} Z\left(\frac{G_p(s)}{s}\right)$$

$$= \frac{z-1}{z} \sum \text{Res} \frac{16}{s^2(s+2)} \frac{z}{z-e^{sT}}$$

$$\begin{aligned} \text{Res}(0) &= -\frac{16}{(s+2)^2} \frac{z}{z-e^{sT}} - \frac{16}{(s+2)} \frac{-Tze^{sT}}{(z-e^{sT})^2} \Big|_{s=0} \\ &= -4z \frac{z-1-2T}{(z-1)^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Res}(-2) = \frac{4z}{z-e^{-2T}}.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow B_0G_p(z) &= -4 \frac{z-(1+2T)}{z-1} + \frac{4(z-1)}{z-e^{-2T}} \\ &= 4 \frac{[e^{-2T} - (1-2T)]z + [1 - (1+2T)e^{-2T}]}{(z-1)(z-e^{-2T})}. \end{aligned}$$

$T = 0.05$ sec

$$\Rightarrow B_0G_p(z) = 0.0193 \frac{z+0.9672}{(z-1)(z-0.9048)}. \quad (1)$$

On peut éviter ce long calcul en écrivant les instructions suivantes.

```
>> n = []; d = [0 -2]; k = 16;
>> Gp = zpk(n,d,k);
>> B0Gp = c2d(G,0.05)
```

B_0G_p
0.01935 (z+0.9672)

$$(z-1)(z-0.9048)$$

Sample time: 0.05 seconds

Discrete-time zero/pole/gain model.

Pôle désiré

$$p = e^{(-\sigma+j\omega_a)T}$$

avec $\sigma = \xi\omega_n = (0.7) \frac{0.2\pi}{T}$ et

$$\omega_a = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} = \frac{0.2\pi}{T} \sqrt{1-(0.7)^2} = \frac{0.2\pi}{T} (0.714)$$

$$\Rightarrow p = pe^{j\varphi},$$

$$\rho = e^{-0.2\pi(0.7)} = 0.6442 \text{ et } \varphi = 0.2\pi(0.714) = 0.4486 \text{ rad.}$$

$$p = \rho \cos \varphi + j\rho \sin \varphi = 0.5804 + j(0.2794).$$

Argument de $G_c(p)$

$$p \in \mathcal{L} \Rightarrow \arg[G(p)] = \pi, \quad G(p) = G_c(p)B_0G_p(p).$$

$$\Rightarrow \arg[G_c(p)] = \pi - \arg[B_0G_p(p)].$$

Or

$$(1) \Rightarrow \arg[B_0G_p(p)] = \arg \left[\frac{p+0.9672}{(p-1)(p-0.9048)} \right]$$

$$= \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{0.2794}{0.5804+0.9672} \right) - \left[\pi - \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{0.2794}{1-0.5804} \right) \right]$$

$$- \left[\pi - \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{0.2794}{0.9048-0.5804} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \arg[G_c(p)] = \pi - (0.1786 + 0.5875 + 0.711) = 1.6645 \text{ rad.}$$

Plus facilement, ce résultat peut être obtenu en écrivant

```
>> p = 0.6442*exp(j*0.4486);
>> z = -0.9672; p2 = 0.9048;
>> aGc = pi-phase((p-z)/((p-1)*(p-p2)))
aGc = 1.6644
```

Calcul de β

$$\arg[G_c(p)] = \arg(p - 0.905) - \arg(p - \beta) = 1.6645$$

$$\Rightarrow \tan[\arg(p - \beta)] = \frac{0.2794}{0.5804 - \beta}$$

$$= \tan(-1.6645 - 0.711) = 0.9621$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{0.9621(0.5804) - 0.2794}{0.9621} = 0.29.$$

Calcul de K

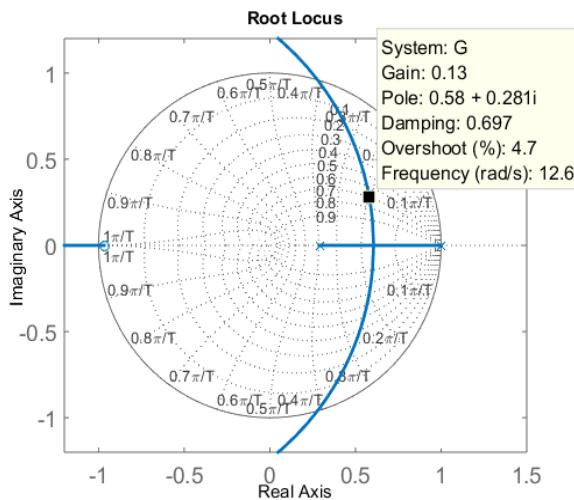
$$K = -\frac{1}{G_c B_0 G_p(p)} = -\frac{(p - \beta)(p - 1)(p - 0.9048)}{(p - 0.9048)(p + 0.9672)}$$

$$= -\frac{[(0.5804 - 0.29) + j(0.2794)][(0.5804 - 1) + j(0.2794)]}{[(0.5804 - 0.9672) + j(0.2794)]}$$

$$= 0.1292 \approx 0.13$$

Vérification

Le lieu d'Evans de $G_c(z)Z[B_0G_p(s)]$ est représenté sur la figure suivante où l'on voit que $p = 0.58 + 0.28j$ est effectivement sur ce lieu et qu'il est à l'intersection des courbes $\xi = 0.7$ et $\omega_n = 0.2\pi/T$.

Caractéristiques

- Constante de temps
 $\tau = 1/\xi\omega_n = 0.05/[(0.7)(0.2\pi)] = 0.1137$ sec.

- Fréquence des oscillations

$$\omega_a = \omega_n(1 - \xi^2)^{1/2} = 8.9724 \text{ rd/sec.}$$

$$\text{Période des oscillations } T_a = 2\pi/\omega_a = 0.7003 \text{ sec.}$$

- Temps de stabilisation
 $t_s = 4.6\tau = 4.6(0.1137) = 0.523$ sec
- Nombre des oscillations
 $n = t_s/T_a = 0.523/0.7003 = 0.747$

EXERCICE 5-9

Soit

$$G_p(s) = \frac{(s + 2)}{(s - 1)(s^2 + 0.4s + 2)}$$

la fonction de transfert du système commandé. Choisissons $T = 0.1$ sec et une commande PD de transmittance $G_d(z) = k(z - 0.819)$. À l'aide de Matlab, a) représenter le lieu d'Evans et déterminer la valeur de $K = 0.0054k$ du point de bifurcation.

b) Tracer pour cette valeur de K la réponse indicielle de la boucle fermée et lire sur cette courbe ses caractéristiques.

Transmittance de la chaîne directe

```
>> n = [1 2]; d = [1 -0.6 1.6 -2];
>> Gp = tf(n,d);
>> Gpz = c2d(Gp,0.1);
>> Gcz = zpk(0.819,[],1,0.1); % K = 1.
>> Gz = Gcz*Gpz
```

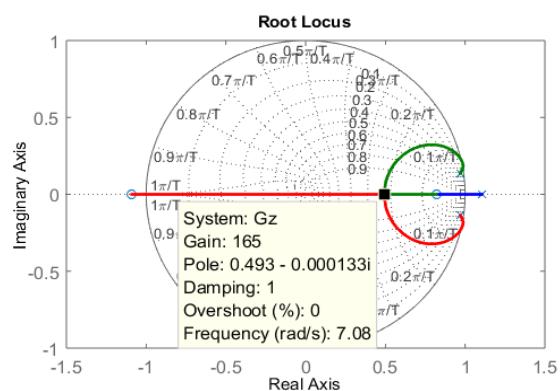
$G_z =$

$$0.005433 (z - 0.819) (z - 0.8187) (z + 1.09)$$

$$(z - 1.105) (z^2 - 1.941z + 0.9608)$$

Sample time: 0.1 seconds

Discrete-time zero/pole/gain model.

Lieu d'Evans et point de bifurcation

À l'aide de la souris, on lit que le point de bifurcation 0.493 s obtient pour K = 165.

Matlab la validité de cette commande pour une période d'échantillonnage T = 1 ms et T = 10 ms.

Réponse de la boucle fermée

```
>> T = feedback(165*Gz,1)
```

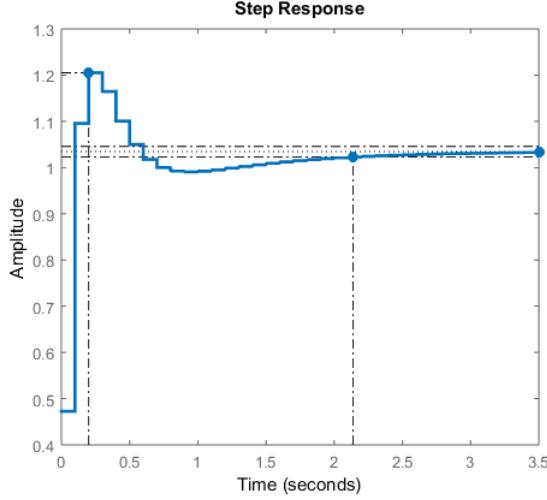
```
T =
0.4727 (z+1.09) (z-0.819) (z-0.8187)
```

```
-----
```

```
(z-0.8781) (z^2 - 0.9871z + 0.2441)
```

Sample time: 0.1 seconds

Discrete-time zero/pole/gain model.



Caractéristiques (fournies par Matlab)

Temps de montée : $t_m = 0.07$ sec

Dépassement maximum : DM = 16.5 %

Temps de stabilisation : $t_s = 2.14$ sec

Valeur limite : L = 1.03.

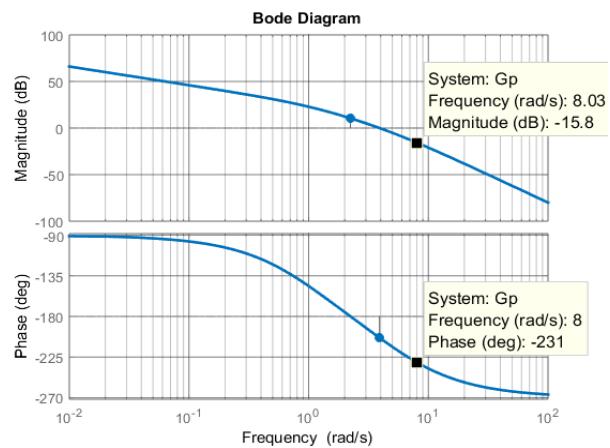
EXERCICE 5-10

Soit

$$G_p(s) = \frac{100}{s(s+1)(s+5)}$$

La fonction de transfert du système à commander. On désire une boucle fermée à bande passante $\omega_b > 8$ rd/s et de des marges de stabilité MG > 8 db et MP > 40°. Discréter directement une commande analogique de $G_p(s)$ pour commander $B_0 G_p(z)$ sans passer par la transformation homographique. Vérifier à l'aide de

Pour une commande proportionnelle $k_p = 1$, la courbe de Bode de la chaîne directe $k_p G_p(s)$ montre que le système sera instable avec MG = -10.5 db à la fréquence $\omega_{cp} = 2.24$ rd/s et MP = -23.7° à la fréquence $\omega_{cg} = 3.91$ rd/s. Pour obtenir une bande passante $\omega_b > 8$ rd/s, le diagramme montre qu'il faut hausser la courbe de gain d'environ 16 db à la fréquence 8 rd/s.



Nous savons qu'à la fréquence ω_m où sa phase est maximum, un compensateur AP,

$$G_{ap}(s) = a(s+1/t)/(s+a/t),$$

augmente le gain de $a^{1/2}$ et la phase de $\varphi_m = \arcsin[(a-1)/(a+1)]$. Pour obtenir une nouvelle fréquence de coupure de gain égale à 8 rd/s et maximiser MP, on prend $\omega_m = 8$ rd/s et on donne au paramètre a une valeur telle que $20\log_{10}(a^{1/2}) = 16$ db. D'où

$$a = 39.81^{16/10} = 39.81,$$

$$\varphi_m = \arcsin \frac{a-1}{a+1} \approx 72^\circ,$$

$$\text{et } \omega_m = \sqrt{a}/\tau \Rightarrow 1/\tau = 1.27.$$

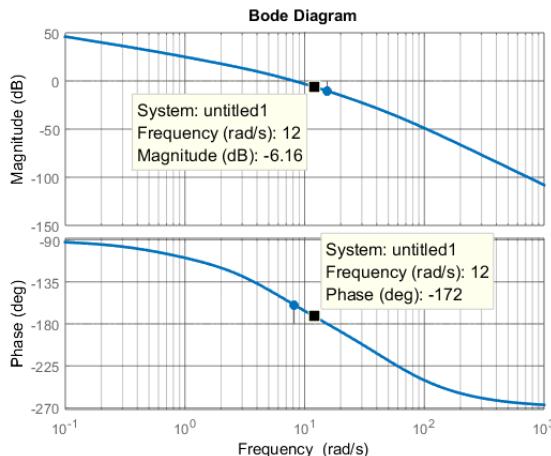
Ainsi,

$$G_{ap}(s) = 39.81 \frac{s+1.27}{s+39.81(1.27)} = 39.81 \frac{s+1.27}{s+50.56}.$$

Mais, on lit sur le diagramme précédent que $\arg[G_p(j8)] = -231^\circ$, d'où, avec le compensateur AP, la marge de phase devient

$$MP = -231 + 72 + 180 = 21^\circ$$

ce qui n'est pas suffisant. Il faut encore augmenter la phase en ajoutant un compensateur PD avec filtre ou un autre AP, $G_{ap1}(s) = a_1(s+1/\tau_1)/(s+a/\tau_1)$.



Sur le nouveau diagramme de Bode de $G_{ap}G_p$ on lit, qu'à la fréquence 12 rd/s, la phase vaut -172° et le gain vaut -6.16 db. Avec $G_{ap1}(s)$ la nouvelle fréquence de coupure de phase sera $\omega_{m1} = 12$ rd/s si

$$a_1 = 10^{6.16/10} = 4.13$$

$$\Rightarrow \varphi_{m1} = \arcsin \frac{a_1 - 1}{a_1 + 1} = 37.6^\circ$$

$$\text{et } 1/\tau_1 = \frac{\omega_{m1}}{\sqrt{a_1}} = \frac{12}{\sqrt{4.13}} = 5.9.$$

$$\text{Donc } G_{ap1}(s) = 4.13 \frac{s+5.9}{s+24.37}$$

Avec ce deuxième compensateur la marge de phase devient :

$$MP = -172 + 37.6 + 180 = 45.6^\circ$$

ce qui est satisfaisant. Il reste à vérifier s'il en est de même de la marge de gain MG. Le calcul manuel de ce gain est assez long. En posant $G_c(s) = G_{ap}G_{ap1}(s)$ et $G(s) = G_pG_c(s)$, la fonction de transfert de la boucle ouverte, on détermine d'abord la fréquence de coupure de phase ω_{cp} qui vérifie $\text{Im}[G(j\omega_{cp})] = 0$ puis on calcule $MG = -20\log_{10}|G(j\omega_{cp})|$. Il est plus simple d'employer la fonction « margin » ;

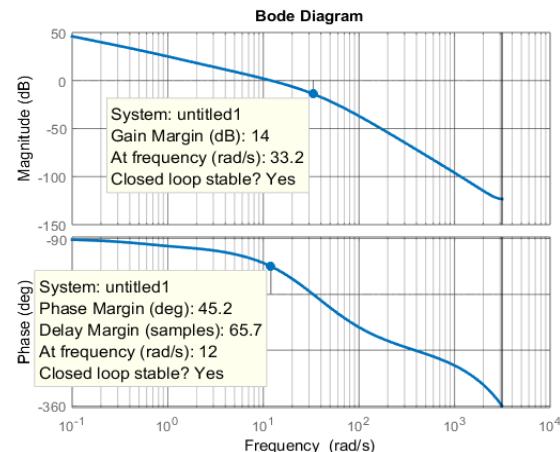
```
>> np = []; dp = [0 -1 -5]; kp = 100;
>> Gp = zpk(np,dp,kp);
```

```
>> a=39.81; ito=1.27; a1=4.13; ito1=5.9;
>> Gap = zpk(-ito,-a*ito,a);
>> Gap1 = zpk(-ito1,-a1*ito1,a1);
>> Gc = Gap*Gap1;
>> G = Gc*Gp;
>> [MG,MP]=margin(G)
MG = 5.2015 (absolue) MP = 45.5748°
>> MG = 20*log10(MG)
MG = 14.3225 db
```

Les exigences sur la bande passante $\omega_b > 8$ et sur les marges de stabilité MG > 8 db et MP > 40° sont donc satisfaites.

Voyons maintenant si ces exigences sont aussi satisfaites quand on commande le système $B_0G_p(z)$ par la discréétisation de $G_c(s)$ avec une période d'échantillonnage. T = 0.001 sec.

```
>> Gpz=c2d(Gp,0.001);
>> Gcz=c2d(Gc,0.001,'tustin');
>> bode(Gcz*Gpz)
```



On voit que les marges de stabilité et la bande passante sont presque les mêmes qu'en analogique. Nous attirons cependant l'attention que pour une plus grande période d'échantillonnage (par exemple T = 0.01 sec) les résultats peuvent être complètement différents et dans ce cas il devient impératif de concevoir l'organe de commande en se basant sur la transformation homographique $G_{pv}(v)$ de $B_0G_p(z)$.

EXERCICE 5-11

Pour T = 10 ms et

$$G_p(s) = \frac{20(s+0.5)}{s(s+1)(s+5)}$$

déterminer par pseudo-continuité un organe de commande discret pour lequel $\omega_b > 15 \text{ rd/s}$, MG > 15 db et MP > 60°. Valider le résultat ?

Commande proportionnelle, $G_c(s) = k_p$.

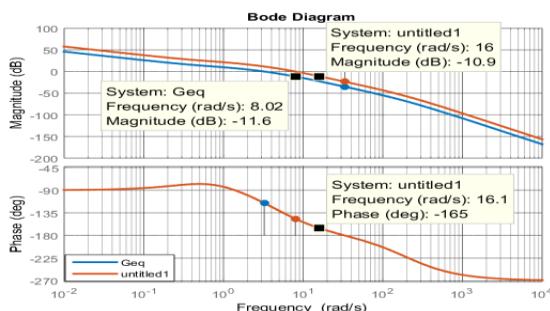
Le fonction de transfert du système équivalent est $G_{eq}(s) = H(s)G_p(s)$, $H(s) = (2/T)/(s+2/T) = 200/(s+200)$. Pour $k_p = 1$, le diagramme de Bode de G_{eq} montre que le système est stable mais sa fréquence de coupure de gain est très petite, $\omega_{cg} = 3.24 \text{ rd/s}$, et la réponse sera donc très lente. La figure suivante montre que le gain de G_{eq} à la fréquence 8.02 rd/s est -11.6 db d'où, en prenant $k_p = 10^{(11.6/20)} = 3.802$, la fréquence de coupure de gain devient 8.02 rd/s mais les marges de stabilité diminuent. Pour améliorer la stabilité et augmenter en même temps ω_{cg} , une solution consiste à introduire en série avec k_p un compensateur AP, $G_{ap}(s) = a(s+1/t)/(s+a/t)$. Sur le diagramme de $k_p G_{eq}$ on lit que le gain à 16 rd/s est -10.9 db et la phase est -165°. Nous savons que ce compensateur augmente le gain de $a^{1/2}$ et la phase de $\varphi_\mu = \arcsin[(a-1)/(a+1)]$ à la fréquence $\omega_m = a^{1/2}/\tau$. En prenant $\omega_m = 16 \text{ rd/s}$ et $a^{1/2} = 10.9 \text{ db}$, le compensateur AP de paramètres

$$a = 10^{(10.9/10)} = 12.3,$$

$$1/\tau = \omega_m / \sqrt{a} = 4.56,$$

élargit ω_{cg} à 16 rd/s et augmente la phase de $\varphi_m = \arcsin(11.3/13.3) = 58.17^\circ$. Comme à 16 rd/s la phase de $k_p G_{eq}$ est -165°, la marge de phase de $k_p G_{ap} G_{eq}$ sera

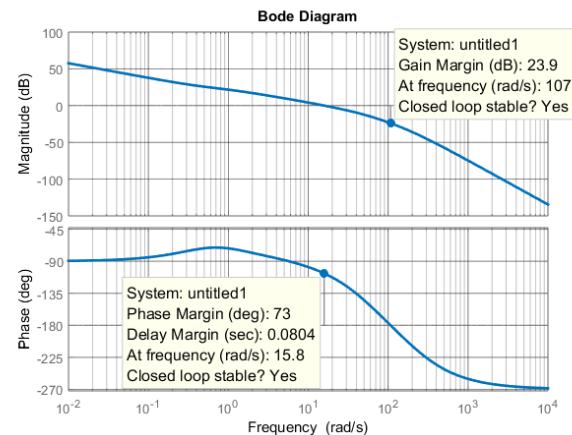
$$MP = -165 + 58 + 180 = 73^\circ.$$



L'organe de commande de G_{eq} qui produit une bande passante $\omega_b > 15 \text{ rd/s}$ et une marge de phase MP > 60° est donc

$$G_c^*(s) = k_p G_{ap}(s) = 12.3 \frac{s+4.56}{s+56.12}.$$

Le diagramme de Bode de $G_c^* G_{eq}$ montre que la marge de gain est MG = 23.9 > 15 db. Toutes les exigences sont ainsi satisfaites.



Enfin, la transmittance de l'organe de commande numérique de $B_0 G_p$ s'obtient en remplaçant s par son approximation de Tustin $(2/T)(z - 1)/(z + 1)$ dans $G_c^*(s)$

```
>> Gc = c2d(Gca,0.01,'tustin')      (Gca=G_c^*)
.Gc =
37.358 (z-0.9554)
-----
(z-0.5618)
```

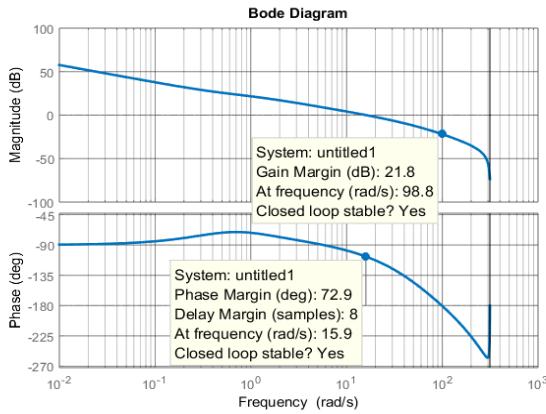
Les résultats précédents sont valables si les pôles dominants de la boucle fermée $T(s)$ sont à l'intérieur du rectangle $[Re = -1/10T = \pm 10, Im = \pm 6/10T = \pm 60]$. Or

```
>> T = feedback(Gca*Geq,1);
>> pole(T)
ans =
1.0e+02 *
-2.0608 + 0.0000i
-0.2555 + 0.1761i
-0.2555 - 0.1761i
-0.0445 + 0.0000i
-0.0048 + 0.0000i
```

Comme les pôles dominants -4.45 et -0.45 sont à l'intérieur du rectangle et les 3 autres pôles sont non dominants étant éloignés de l'axe des imaginaires de plus de 5 fois des dominants, les résultats obtenus ci-dessus sont valables.

Pour terminer, vérifions que la commande numérique $G_c(z)$ satisfait effectivement les exigences imposées.

```
>> B0Gp = c2d(Gp,0.01);
>> bode(Gc*B0Gp)
```



EXERCICE 5-12

Pour une période d'échantillonnage $T = 0.1$ sec, déterminer par la méthode deductive la transmittance $G_c(z)$ qui commande $G_p(s) = 1/(s+1)(s+5)$ de sorte que le temps de stabilisation et le dépassement maximum de la réponse indicielle de ce système soient d'environ 5sec et 2%.

La transmittance du système commandé précédé d'un bloqueur est $G_p(z) = Z[B_0G_p(s)]$.

```
>> np = []; dp = [-1 -5];
>> Gp = zpk(np,dp,1);
>> Gpz = c2d(Gp,0.1)      %(Gpz = Gp(z))
```

$$G_{pz} = \frac{0.0041172}{(z-0.9048)(z-0.6065)}$$

Sample time: 0.1 seconds

Discrete-time zero/pole/gain model.

La transmittance $G_p(z)$ ne possède ni de zéros ni de pôles à l'extérieur du cercle unité d'où les zéros de la transmittance $T(z)$ peuvent être choisis d'une manière complètement arbitraire. L'excès des degrés de $G_p(z)$ étant 2, le plus simple est de choisir $T(z)$ de la forme

$$T(z) = k \frac{1}{(z-p_1)(z-p_2)}. \quad (1)$$

L'erreur stationnaire de position s'annule si

$$\lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) T(z) \frac{z}{z-1} = 1 \Rightarrow T(1) = 1.$$

$$\Rightarrow k = (1-p_1)(1-p_2).$$

D'autre part, la réponse indicielle de T sera oscillatoire amortie de temps de stabilisation $t_s = 5$ sec et de dépassement maximum DM de 2 %, si ses pôles sont conjugués de constante de temps $\tau = 1/\sigma \approx 1$ sec et de fréquence ω_a telle que $\exp(-\sigma\pi/\omega_a) = 0.02$. D'où

$$\omega_a = -\frac{\sigma\pi}{\ln(0.02)} = 0.8 \text{ rd/s}, \quad p_1 = \bar{p}_2 = \rho e^{j\varphi}$$

avec $\rho = e^{-T/\tau} = 0.9048$ et $\varphi = \omega_a T = 0.08 \text{ rd}$.

ou

$$p_1 = 0.9048[\cos(0.08) + j\sin(0.08)] \\ = 0.9019 + 0.0723j.$$

Donc, en remplaçant p_1 , p_2 et k par leurs valeurs dans (1), on obtient :

```
>> k = (1-p1)*(1-p2)
>> T = zpk([], [p1 p2], k, 0.1)
```

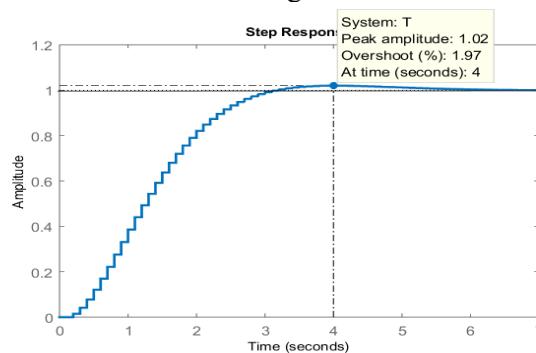
$$T = \\ 0.014851$$

$$(z^2 - 1.804z + 0.8187)$$

Sample time: 0.1 seconds

Discrete-time zero/pole/gain model.

La figure suivante montre que la réponse indicielle de T est conforme avec les exigences.



Il suffit maintenant d'appliquer la formule

$$G_c(z) = \frac{T(z)}{[1-T(z)]G_{pz}(z)}$$

pour obtenir la transmittance de l'organe de commande en écrivant :

```
>> Gc = (T/(1-T))/Gpz
```

$$G_c = \\ 3.6071 (z-0.9048) (z-0.6065)$$

$$(z-1) (z-0.8038) (z+0.8189)$$

Sample time: 0.1 seconds

Discrete-time zero/pole/gain model.

Remarquer que G_c élimine les pôles et le zéro de G_{pz} et les remplace par un pôle 1 pour annuler l'erreur stationnaire de position et par d'autres pôles et zéros afin de satisfaire les autres exigences.

EXERCICE 5-13

Le système à commander étant

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)},$$

déterminer la loi de commande qui annule l'erreur stationnaire de position à partir de l'instant 3sec. sachant que la période d'échantillonnage est $T = 1\text{sec}$. Déterminer et représenter le signal de commande bloqué $u^*(t)$, la réponse analogique $y(t)$ et son échantillonnage $y^*(t)$.

La transmittance de l'objet commandé étant $G_{pz}(z) = B_0 G_p(z)$, on écrit :

```
>> Gp = tf(1,[1 3 2 0]);
>> Gpz = c2d(Gp,1)
```

$$G_{pz} = \\ 0.08405 z^2 + 0.1704 z + 0.01887$$

$$z^3 - 1.503 z^2 + 0.553 z - 0.04979$$

Sample time: 1 seconds

Discrete-time transfer function

L'équation récurrente entre $u^*(kT)$ et $y^*(kT)$ est alors $y_k + a_2 y_{k-1} + a_1 y_{k-2} + a_0 y_{k-3} = b_2 u_{k-1} + b_1 u_{k-2} + b_0 u_{k-3}$ où $a_2 = -1.503$, $a_1 = 0.553$, $a_0 = -0.04979$, $b_2 = 0.08405$, $b_1 = 0.1704$, $b_0 = 0.01887$.

Il s'agit de déterminer l'organe de commande qui satisfait les exigences : $y_k = 1 \forall k \geq 3$ et $u_k = u_L = c^{te} \forall k \geq 3$. Sachant que $y_k = 0 \forall k \leq 0$ et $u_k = 0 \forall k \leq -1$, il ne reste que 5 inconnues y_1 , y_2 , u_0 , u_1 et u_2 . La forme matricielle des 5 premières équations récurrentes est

$Mx = b$ avec

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -b_2 \\ 1 & a_2 & 0 & -b_2 & -b_1 \\ a_2 & a_1 & -b_2 & -b_1 & -b_0 \\ a_1 & a_0 & -b_1 & -b_0 & 0 \\ a_0 & 0 & -b_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1 \\ u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ b_2 u_L - (1+a_2) \\ (b_2 + b_1) u_L - (1+a_2 + a_1) \end{pmatrix}$$

Pour $k \geq 6$ l'équation récurrente s'écrit :

$$1 + a_2 + a_1 + a_0 = (b_2 + b_1 + b_0) u_L$$

$$\Rightarrow u_L = \frac{1 + a_2 + a_1 + a_0}{b_2 + b_1 + b_0} = \frac{1}{G_{pz}(1)} \approx 0$$

D'où

```
>> b=[0 0 -1 -(1+a2) -(1+a2+a1)]'
```

$b =$

$$0$$

$$0$$

$$-1.0000$$

$$0.5032$$

$$-0.0498$$

```
>> x = inv(M)*b
```

$x =$

$$0.9310 = y_2$$

$$0.3075 = y_1$$

$$0.1821 = u_2$$

$$-1.8411 = u_1$$

$$3.6587 = u_0$$

Sachant que $r(z) = Z[1(t)] = z/(z-1)$, la transmittance de la boucle fermée est

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{y(z)}{r(z)} = \frac{y_1 z^{-1} + y_2 z^{-2} + z^{-3}[z/(z-1)]}{z/(z-1)} \\ &= \frac{(z-1)(y_1 z + y_2) + 1}{z^3} = \frac{y_1 z^2 + (y_2 - y_1)z + (1 - y_2)}{z^3}. \end{aligned}$$

On écrit :

```
>> nT = [x(2) (x(1)-x(2)) 1-x(1)];
>> dT = [1 0 0 0];
>> T = tf(nT,dT,1)
```

$$T = \frac{0.3075 z^2 + 0.6234 z + 0.06904}{z^3}$$

Sample time: 1 seconds
Discrete-time transfer function.

La transmittance de l'organe de commande s'obtient en appliquant la formule

$$G_{cz}(z) = \frac{T(z)}{[1-T(z)]G_{pz}(z)}.$$

```
>> Gcz = (T/(1-T))/Gpz;
>> Gcz=zpk(Gcz);
```

On obtient après simplification

$$G_{cz} = \frac{3.6589 (z-0.3679) (z-0.1353)}{(z+0.5717) (z+0.1208)}$$

Sample time: 1 seconds
Discrete-time zero/pole/gain model.

L'entrée du système commandé $G_p(s)$ a pour expression

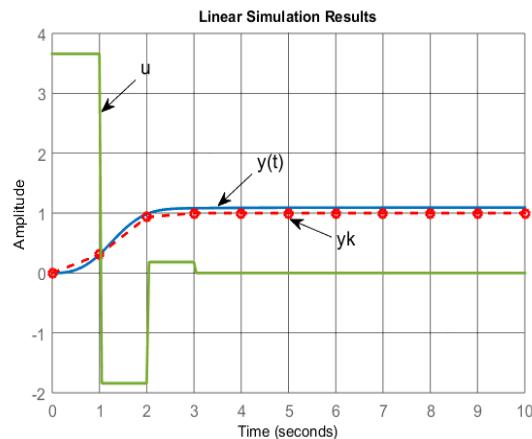
$$\begin{aligned} u(t) &= u_0[1(t)-1(t-1)] \\ &\quad + u_1[1(t-1)-1(t-2)] \\ &\quad + u_2[1(t-2)-1(t-3)] + u_L[1(t-3)]. \end{aligned}$$

La fonction « lsim » produit la réponse d'un système linéaire à une entrée u . On écrit :

```
>> t = 0:0.05:10;
>> u = [x(5) x(4) x(3)];
```

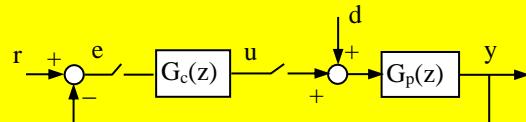
```
>> u = u(1)*(t<=1)+u(2)*(1<t&t<=2)+u(3)*(2<t&t<=3);
>> plot(t,u,'lineWidth'2)
>> hold
Current plot held
>> lsim(Gp,u,t)
>> yk = step(T);
>> plot(0:10,yk)
```

Remarque. Comme les calculs numériques précédents comportent des erreurs par arrondissement après le 4^{ème} chiffre, on constate une petite différence entre $y(t)$ et ses échantillons obtenus à partir de la transmittance numérique T de la boucle fermée.



AUTRES EXERCICES ET COMPLÉMENTS

5-14. Le système suivant a deux entrées, la référence r et la perturbation d et deux sorties, la réponse y et la commande u .



1) Écrire les 4 transmittances entre chacune des entrées et chacune des sorties.

On dit qu'un système de commande est *intérieurement stable* si tous les signaux qui le traversent restent bornés quand ses entrées sont bornées.

Soient

$$G_p(z) = \frac{z-a}{(z-b)(z-c)} \quad \text{et} \quad G_c(z) = k \frac{(z-b)(z-c)}{(z-1)(z-a)},$$

2) Si $|a| > 1$, montrer que, pour $0 < k \leq 1$. $T_r(z) = y(z)/r(z)$ est stable sans que la boucle fermée soit intérieurement instable.

3) Si $|a| < 1$, sous quelles conditions la boucle fermée est intérieurement stable ?

1) Tableau des transmittances entrées/sorties

	y	u
r	$\frac{G_c G_p}{1+G_c G_p}$	$\frac{G_c}{1+G_p G_c}$
d	$\frac{G_p}{1+G_p G_c}$	$\frac{-G_c G_p}{1+G_p G_c}$

2) Stabilité externe, instabilité interne

$$G_p G_c = \frac{k}{z-1} \Rightarrow T_{yr} = \frac{y}{r} = \frac{\frac{k}{z-1}}{1 + \frac{k}{z-1}} = \frac{k}{z-(1-k)}$$

$$0 < k \leq 1 \Rightarrow |p| = |1-k| < 1 \Rightarrow T_{yr} \text{ stable.}$$

Le système est extérieurement stable.

$$T_{ur} = \frac{u}{r} = \frac{(z-b)(z-c)}{1 + \frac{k}{z-1}} = \frac{(z-b)(z-c)}{(z-a)[z-(1-k)]}$$

$$|a| > 1 \Rightarrow T_{ur} \text{ instable.}$$

Le système n'est pas intérieurement stable, u diverge vers l'infini $\forall r \neq 0$.

3) Stabilité interne quand $|a| < 1$

Nous avons vu que T_{yr} et T_{ud} sont stables si $0 < k \leq 2$

et T_{ur} est stable quand $|a| < 1$ et $|1 - k| < 1 \Leftrightarrow 0 < k < 2$.

D'autre part,

$$T_{yd} = \frac{\frac{z-a}{(z-b)(z-c)}}{1 + \frac{k}{z-1}} = \frac{(z-a)(z-1)}{(z-b)(z-c)[z-(1-k)]}.$$

Ainsi la boucle fermée sera intérieurement stable si
 $-1 < a, b, c < 1$ et $0 < k \leq 2$.

5-15. Considérons pour le procédé

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s-1)}$$

la commande analogique à avance de phase

$$G_c(s) = k \frac{s+2}{s+10}.$$

1) Construire le lieu d'Evans de $G(s) = G_c(s)G_p(s)$ et déterminer la valeur k_1 de k pour laquelle la constante de temps de la boucle fermée est minimum.

Dans la suite, on prendra $k = k_1$.

2) À l'aide de Matlab, représenter le diagramme de Bode de $G(j\omega)$ et lire les valeurs des marges de gain et de phase et des fréquences correspondantes.

3) Pour commander $G_p(s)$ numériquement, on le précède par un bloqueur B_0 et on adopte la loi de commande définie par

$$G_{cl}(z) = G_c \left(\frac{2(z-1)}{T(z+1)} \right)$$

qui est donc déduite de $G_c(s)$ en remplaçant s par son approximation de Tustin. En posant $G_1(z) = G_{cl}(z)(B_0 G_p)(z)$, construire à l'aide de Matlab le diagramme de Bode de $G_1(e^{j\omega T})$ pour $T = 0.1$ sec. et comparer les marges de gain et de phase avec celles de $G(j\omega)$. Donner une explication à la *distorsion (warping)* de $G_1(e^{j\omega T})$ par rapport à $G(j\omega)$.

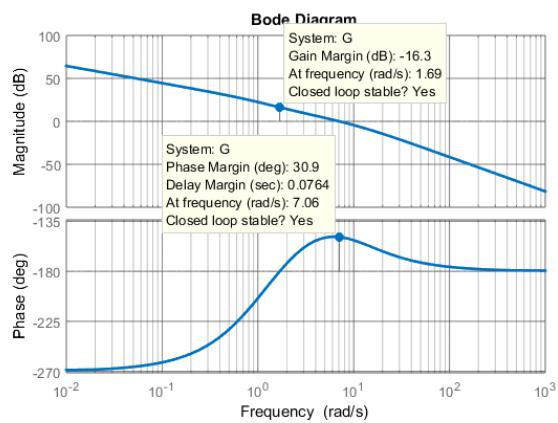
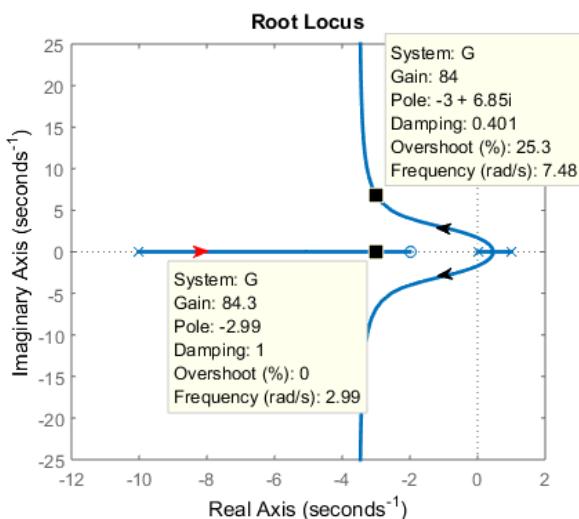
4) Par la méthode pseudo-continue, déterminer pour le même système et la même période d'échantillonnage, $T = 0.1$ sec, une commande numérique PD. Examiner la distorsion fréquentielle entre ce système et le système analogique équivalent.

1) Lieu des racines et constante de temps minimum

$$G(s) = G_c(s)G_p(s) = k \frac{s+2}{s(s-1)(s+10)}.$$

Lieu des racines

```
>> n = -2; d = [0 1 -10]; k = 1.;  
>> G = zpk(n,d,k);  
>> rlocus(G)
```



La constante de temps τ est minimum quand les 3 pôles sont situés sur la même verticale $\text{Re} = -\sigma_m$ sinon l'un des pôles se rapproche de l'axe des imaginaires et τ augmente. Par conséquent, τ est minimum quand la valeur k_1 de k est telle que la somme des pôles de la boucle fermée est égale à $-3\sigma_m$ et que $-\sigma_m$ est un pôle de cette boucle dont le polynôme caractéristique est

$$P(s) = s^3 + 9s^2 + (k-10)s + 2k = 0.$$

D'où

$$-3\sigma_m = -9 \Rightarrow \sigma_m = 3$$

$$\text{et } k_1 = -\frac{-3(-3-1)(-3+10)}{-3+2} = 84.$$

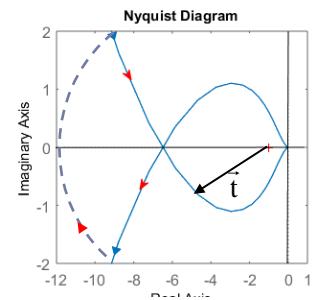
Le produit des pôles étant $-2k$, en désignant les pôles complexes conjugués par $-\sigma_m \pm j\omega_a$, on a :

$$-\sigma_m(\sigma_m^2 + \omega_a^2) = -2k_1 \Rightarrow \omega_a = \sqrt{\frac{168}{3}} - 9 = 6.85 \text{ rad/s.}$$

2) Marges de stabilité de $G(s)$

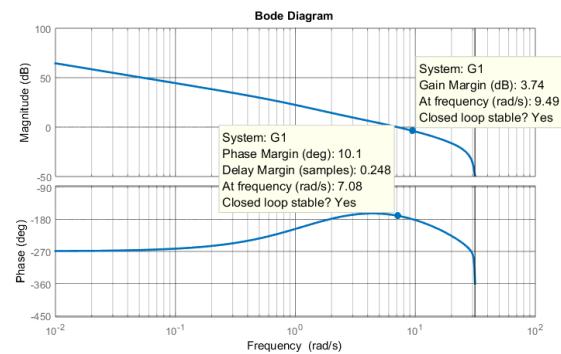
```
>> n = -2; d = [0 1 -10]; k = 84;
>> G = zpk(n,d,k);
>> bode(G)
```

Cette figure montre que le système est stable avec une marge de phase $MP = 30.9^\circ$ à la fréquence de coupure de gain $\omega_{cg} = 7.06 \text{ rad/s}$ et une marge de gain $MG = -16.3 \text{ dB}$ à la fréquence de coupure de phase $\omega_{cp} = 1.69 \text{ rad/s}$. À remarquer que la phase étant croissante en ω_{cp} le système est stable bien que $MG < 0$ (gain > 1). Cette stabilité est mieux justifiée par la courbe de Nyquist ci-contre ($N = -1, P = 1 \Rightarrow Z = 0$).



3) Marges de stabilité quand G est remplacé par G_1 .

```
>> Gpz = c2d(Gp,0.1);      % (Gpz(z) = Z[B0Gp(s)].)
>> Gc1 = c2d(Gc,0.1,'tustin');
>> G1 = Gc1*Gpz;
>> bode(G1)
```



Les marges de stabilité de $G_1(z)$ et leurs fréquences ($MG = 3,74$ db à $\omega_{cp} = 9.49$ rd/s et $MP = 10.1^\circ$ à $\omega_{cg} = 7.08$ rdd/s) ne sont pas les mêmes que celles de $G(s)$ car l'approximation de Tustin remplace dans $G_c(j\omega)$ la vraie fréquence ω par une autre fréquence ω_v telle que $\omega_v T/2 = \text{tg}(\omega T/2)$ d'où

$$G_c(j\omega_v) \neq G_c(j\omega)$$

sauf si $\omega T/2 \ll \pi/2 \Leftrightarrow \omega \ll \omega_v/2$.

4) PD par la méthode pseudo-continue

La chaîne directe $G_c B_0 G_p(z)$ du système de commande discret est approximativement égale à la chaîne directe $G^* G_{eq}(s)$ d'un système de commande continu dont l'objet commandé est

$$G_{eq} = \frac{2/T}{s + 2/T} G_p = \frac{20}{s(s-1)(s+20)}.$$

Pour une commande proportionnelle $G^*(s) = k_p = 1$, le diagramme de Bode de G_p montre que le système sera instable dont le maximum de phase est égal à -205° à la fréquence 4.4° où le gain est environ -25 db. En donnant à k_p la valeur $10^{25/20} = 17.78$, la fréquence de coupure de gain devient $\omega_{cg} = 4.4$ rd/s et, la phase ne se modifiant pas, la marge de phase sera $MP = -205 + 180 = -25^\circ$. Pour augmenter MP à plus que 40° , on introduit un compensateur PD, $\tau_d s + 1$, dont la phase en $\omega_{cg} = 4.4$ rd/s est $25 + 40 + 5 = 70^\circ$ (les 5° ajoutés compensent la diminution de la phase puisque le PD déplace ω_{cg} vers la droite). D'où

$$\tau_d \omega_{cg} = \text{tg} 70 \Rightarrow \tau_d = \frac{2.73}{4.4} = 0.62 \text{ sec}$$

et $G^*(s) = k_p \tau_d (s + 1/\tau_d) \approx 11(s + 1.6)$.

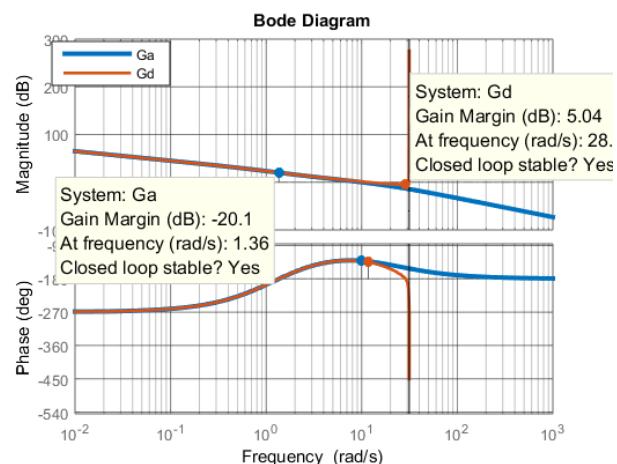
La transmittance de l'organe de commande numérique est donc

```
>> Ge = zpk(-16,[],11); % Ge = G*
>> Gc = c2d(Ge,0.1,'tustin')
```

```
Gc =
238.3 z - 202.7
```

```
z + 1
Sample time: 0.1 seconds
Discrete-time transfer function.
```

Les diagrammes de Bode de la chaîne directe analogique équivalente, $G_a = G^* G_{eq}(s)$, et de la chaîne directe numérique $G_d = G_c G_{pz}(z)$ sont représentés sur le même plan. Bien que les marges de phase soient presque égales, les marges de gains sont complètement différentes. La méthode pseudo-continue n'est donc pas valable car la période d'échantillonnage $T = 0.1$ s n'est pas suffisamment petite.



En effet, la fonction de transfert de la boucle fermée équivalente est

```
>> Ta = feedback(Ga,1)
```

```
Ta =
```

$$220.47 (s+1.613)$$

$$(s+2.169)(s^2 + 16.83s + 164)$$

Continuous-time zero/pole/gain model.
dont les pôles sont

```
>> pole(Ta)
```

```
ans =
```

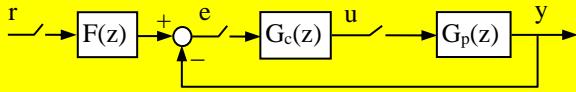
$$\begin{aligned} &-8.4157 + 9.6513i \\ &-8.4157 - 9.6513i \\ &-2.1687 + 0.0000i \end{aligned}$$

On voit que tous ces pôles sont à l'extérieur du rectangle de validité

$$[Re = -1/10T = -1, Im = \pm 6/10T = \pm 6].$$

4-16. Le système de commande suivant est à deux paramètres comportant un régulateur $G_c(z)$ et un

préfiltre $F(z)$. Le premier servira à placer les pôles en des positions convenables et le second à simplifier les zéros indésirables et à annuler l'erreur stationnaire.



Pour la période d'échantillonnage $T = 0.02$ sec, la transmittance du système commandé précédé par le bloqueur est

$$G_p(z) = \frac{z - 0.96}{z^2 - 0.6z + 0.36}.$$

- 1) En choisissant $G_c(z)$ de la forme $k(z - \alpha)/(z - \beta)$, $k > 0$, déterminer k , α et β pour que les pôles de la boucle fermée soient de même constante de temps $\tau = 0.2$ sec, le facteur d'amortissement des pôles complexes soit $\xi = 0.5$ et le pôle réel soit négatif.
- 2) Représenter la réponse indicelle du système dans le cas où $F(z) = 1$.
- 3) Que devient cette réponse si $F(z) = c/(z - 0.96)$ où la valeur de c sera choisie de sorte à annuler l'erreur stationnaire de position.

1) Calcul de k , α et β

Polynôme caractéristique :

$$1 + G_c(z)G_p(z) = 1 + k \frac{(z - \alpha)(z - 0.96)}{(z - \beta)(z^2 - 0.6z + 0.36)}$$

$$\Rightarrow P(z) = (z - \beta)(z^2 - 0.6z + 0.36) + k(z - \alpha)(z - 0.96) \\ = z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0,$$

$$a_2 = k - (0.6 + \beta), \quad (1)$$

$$a_1 = 0.36 + 0.6\beta - k(0.96 + \alpha), \quad (2)$$

$$a_0 = 0.96k\alpha - 0.36\beta. \quad (3)$$

$P(z)$ a trois racines dont l'une est nécessairement réelle.

Position des pôles désirés :

Les 3 pôles ont le même module :

$$\rho = e^{-T/\tau} = e^{-0.1} = 0.905.$$

Le pôle réel est donc $p_1 = -0.905$.

La fréquence naturelle des pôles complexes est

$$\omega_n = 1/\tau\xi = 1/0.2(0.5) = 10 \text{ rd/s}$$

d'où la fréquence des oscillations est

$$\omega_a = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = 8.66 \text{ rd/s.}$$

L'argument des pôles complexes est

$$\varphi = \omega_a T = 0.173 \text{ rd, soit } 9.92^\circ.$$

Les pôles complexes désirés de la boucle fermée sont donc

$$p_{2,3} = \rho e^{\pm j\varphi} = 0.905(\cos 9.92 \pm j \sin 9.92) \\ = 0.8915 \pm 0.156j.$$

Les coefficients de $P(z)$ sont alors

```
>> a2=-(p1+p2+p3) = -0.8779,
>> a1 = p1*p2+p1*p3+p2*p3 = -0.7945,
>> a0 = -p1*p2*p3 = 0.7412.
```

Calcul de α , β et k

Au lieu de résoudre manuellement le système d'équations (1), (2), (3), on peut l'obtenir par l'instruction symbolique « solve ».

```
>> syms a b k
>> [alpha,betta,k] = solve([k-(0.6+b) == -0.8779,
                           0.36+0.6*b-k*(0.96+a) == -0.7945,
                           0.96*k*a-0.36*b == -0.7412], [a,b,k])
```

On obtient :

$$\alpha = 1.8225, \beta = 0.8833, k = 0.6054.$$

Transmittance $G = G_c G_p$ de la boucle ouverte :

```
>> r = roots([1 -0.6 0.36]);
>> n=[alphe 0.96]; d=[betta r(1) r(2)];
>> G=zpk(n,d,k,0.02)
```

$G =$

$$\frac{0.6054(z-1.823)(z-0.96)}{(z-0.8833)(z^2 - 0.6z + 0.36)}$$

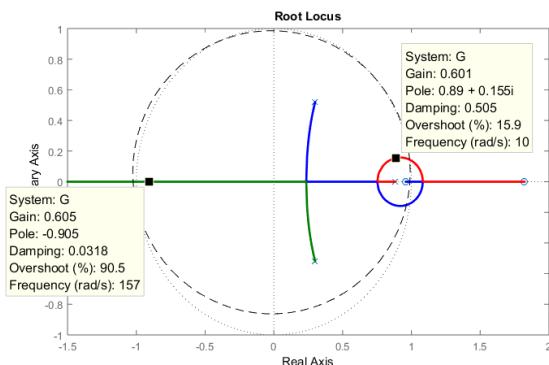
Sample time: 0.02 seconds

Discrete-time zero/pole/gain model.

Vérification

Pour vérifier les résultats précédent, on lit sur le lieu des racines la position des pôles de la boucle fermée pour un gain d'environ 0.6.

```
>> rlocus(G/k)
```



On voit que pour l'organe de commande obtenu,

$$G_c(z) = 0.6 \frac{z-1.82}{z-0.88},$$

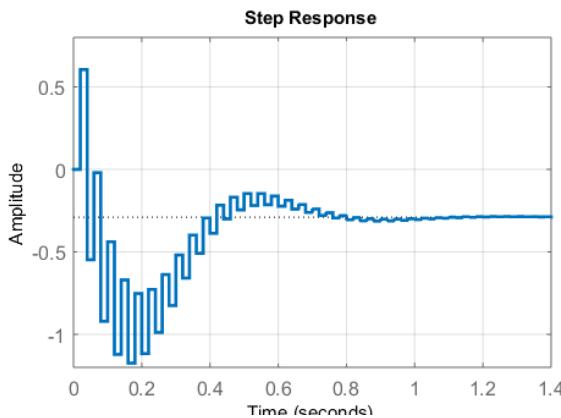
les pôles de la boucle fermée sont situés à la position désirée.

2) Réponse quand $F(z) = 1$.

```
>> T = feedback(G,1)
```

```
T =
 0.60537 (z-1.823) (z-0.96)
-----
(z+0.905) (z^2 - 1.783z + 0.819)
Sample time: 0.02 seconds
Discrete-time zero/pole/gain model.
```

```
>> step(T)
```



La figure montre que le temps de stabilisation est voisin de $t_s = 4.6\tau = 4.6(0.2) = 0.92$ sec et que l'erreur stationnaire de position est

$$e_{sp} = \frac{1}{1+G(1)} = 1.29 = 1 - (-0.29).$$

D'autre part, le pôle réel négatif de $T(s)$, -0.905 , a introduit des oscillations de fréquence π/T rd/s, soit $1/2(0.02) = 25$ Hz.

3) Effet du préfiltre $F(z) = c/(s - 0.96)$

Avec ce préfiltre, la transmittance $y(z)/r(z)$ du système devient :

$$T_f = F.T = c \frac{0.60537(z-1.823)}{(z+0.905)(z^2 - 1.783z + 0.819)}$$

et pour obtenir une erreur stationnaire $e_{sp} = 0$, on choisit c de sorte que

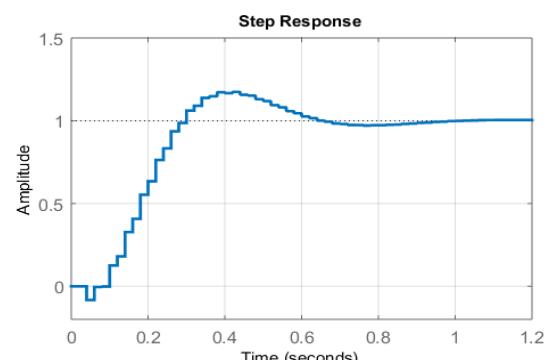
$$\lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1})y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1})T_f(z).r(z)$$

$$= T_f(1) = 1. \quad r(z) = \frac{1}{1-z^{-1}},$$

$$\Rightarrow c = \frac{(1+0.905)(1-1.783+0.819)}{0.60537(1-1.823)} = -0.1377.$$

On représente la réponse de T_f à l'échelon unité en écrivant

```
>> r = roots([1 -1.783 0.819]);
>> nf = 1.823; df = [-0.905 r(1) r(2)]; kf = 0.6053*c;
>> Tf = zpk(nf, df, kf, 0.02);
>> step(Tf)
```



On voit que le bon choix de c a annulé l'erreur stationnaire de position et l'élimination du zéro 0.96 a diminué la valeur absolue du dépassement maximum.

Les alternances positives et négatives des oscillations dues au pôle négatif -0.905 se sont traduites aux instants d'échantillonnage en une succession de sauts, grand quand l'alternance est positive suivi d'un plus petit quand l'alternance est négative.

5-17. La fonction de transfert du système commandé est $G_p(s) = \frac{e^{-s}}{s+2}$

et l'organe de commande est de type PI de la forme $G_c(z) = k(z - a)/(z - 1)$. Pour une période d'échantillonnage $T = 0.5$ sec,

1) déterminer les valeurs de a et k pour que le facteur d'amortissement et la période des oscillations de 2 pôles de la boucle fermée soient $\xi = 0.5$ et $T_a = 5$ sec. Déterminer les positions de tous les pôles.

2) Représenter à l'aide de Matlab la réponse indicielle de ce système et commenter l'allure de cette réponse.

I) Valeurs des paramètres k et a de G_c

Sachant que $z = e^{sT}$, on a : $e^{-s} = z^{-1/T} = z^{-2}$. D'où la transmittance de G_p précédé d'un bloqueur est

$$\begin{aligned} G_{pz}(z) &= \frac{z-1}{z} Z\left[\frac{G_p(s)}{s}\right] \\ &= \frac{z-1}{z} \sum \text{Res} \left[\frac{z^{-2}}{s(s+2)} \frac{z}{z-e^{sT}} \right], \\ &= z^{-2} \frac{z-1}{z} \left[\frac{z}{2(z-1)} - \frac{z}{2(z-e^{-2/2})} \right], \\ &= \frac{z^{-2}}{2} \left[1 - \frac{z(z-1)}{z(z-e^{-1})} \right] = \frac{z^{-2}}{2} \frac{(1-e^{-1})}{z-e^{-1}}, \\ &= z^{-2} \frac{0.3161}{z - 0.3679}. \end{aligned}$$

Plus simplement, on écrit :

```
>> s = tf('s');
>> Gp = exp(-s)/(s+2);
>> Gpz = c2d(Gp,0.5)
```

```
Gpz =
0.3161
z^(-2) * -----
```

$$z - 0.3679$$

Sample time: 0.5 seconds

Discrete-time transfer function

La transmittance de la boucle ouverte est alors

$$G(z) = G_c(z)G_p(z)$$

$$= K \frac{z-a}{z^2(z-1)(z-0.3679)}, \quad K=0.3161k$$

et le polynôme caractéristique est :

$$\begin{aligned} P(z) &= z^2(z-1)(z-0.3679)+K(z-a) \\ &= z^4 - 1.3679z^3 + 0.3679z^2 + Kz - Ka. \end{aligned} \quad (1)$$

Position des pôles p_1 et p_2 :

$$p_{1,2} = \rho e^{\pm j\varphi}, \quad \rho = e^{-\sigma T}, \quad \varphi = \omega_a T, \quad T = 0.5 \text{ sec.}$$

$$\omega_a = \frac{2\pi}{T_a} = \frac{2\pi}{0.5} \text{ rad/s} \Rightarrow \varphi = 2\pi \frac{0.5}{0.5} = 0.2\pi \text{ rad.}$$

$$\rho = e^{-\sigma T}, \quad \sigma = \xi \omega_n, \quad \omega_n^2 = \frac{\omega_a^2}{1-\xi^2} = \frac{4\pi^2/25}{3/4}$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{1}{10} \frac{4\pi}{\sqrt{3}} = \frac{0.4}{\sqrt{3}} \pi \Rightarrow \rho = e^{-0.4\pi/\sqrt{3}} = 0.4841$$

$$\text{Donc } p_{1,2} = 0.4841 e^{\pm j(0.2\pi)}.$$

Soient p_3 et p_4 les 2 autres racines de $P(z)$. Tenant compte de (1), on a :

$$\begin{aligned} p_3 + p_4 &= 1.3679 - (p_1 + p_2) \\ &= 1.3679 - 2(0.4841) \cos(0.2\pi) = 0.5847. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_3 p_4 &= 0.3679 - (p_3 + p_4)(p_1 + p_2) - p_1 p_2 \\ &= 0.3679 - 0.5847(0.7832) - (0.4841)^2 \\ &= -0.3244. \end{aligned}$$

D'où p_3 et p_4 sont les racines de

$$p^2 - 0.5847p - 0.3244 = 0$$

$$\Rightarrow p_3 = 0.9326 \quad p_4 = -0.3479.$$

D'autre part, sachant que $K = \sum p_i p_j p_k$

$$-K = p_1 p_2 (p_3 + p_4) + (p_1 + p_2) p_3 p_4$$

$$= 0.2343(0.5847) - 0.7832(0.3244)$$

$$\Rightarrow K = 0.117 \Rightarrow k = K/0.3161 = 0.3703.$$

$$-Ka = p_1 p_2 p_3 p_4 = 0.2343(0.3244) = -0.0760$$

$$\Rightarrow a = \frac{0.0760}{0.3703} = 0.6493.$$

Donc la transmittance de l'organe de commande est

```
>> Gc = zpk(a,1,k,0.5)
```

$$G_c = \frac{0.37029 (z-0.6493)}{(z-1)}$$

Sample time: 0.5 seconds

Discrete-time zero/pole/gain model
et la transmittance de la boucle ouverte est

```
>> G = Gc*Gpz
```

$$G = \frac{0.11703 (z-0.6493)}{z^2 * (z-1)(z-0.3679)}$$

Sample time: 0.5 seconds

Discrete-time zero/pole/gain model.

Vérifions si les pôles désirés p_1, p_2, p_3, p_4 sont sur le lieu de G pour la valeur de k obtenue.

```
>> rlocus(G)
```

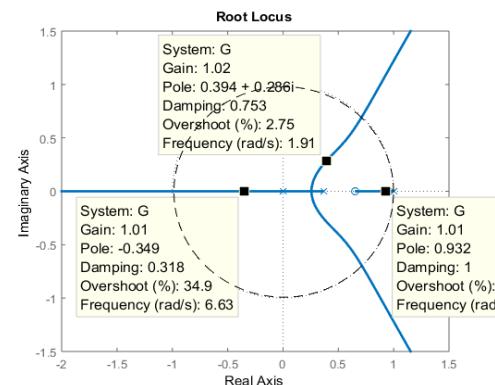
Matlab nous montre sur le graphique suivant qu'en multipliant G par 1, les pôles réels p_3 et p_4 sont à la position obtenue ci-dessus et les pôles complexes p_1 et p_2 ont pour module

```
>> ro = sqrt(0.394^2 + 0.286^2) = 0.4869
```

et pour argument

```
>> fi = atan(0.286/0.394) = 0.6279 ≈ 0.2π.
```

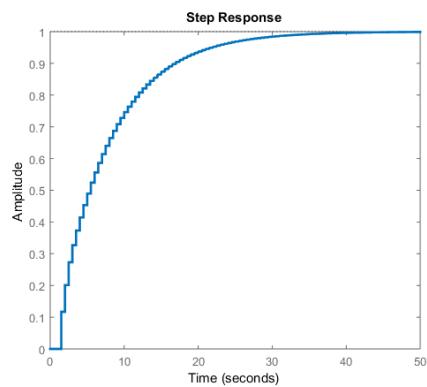
Les arrondis et le positionnement du curseur sont les causes des petites erreurs.



2) Réponse indicielle

```
>> T = feedback(G,1);
```

```
>> step(T)
```



L'erreur stationnaire de position est nulle grâce au pôle 1 de G . D'autre part, la réponse montre que le système est approximativement équivalent à un système de premier ordre car le pôle 0.9326 est dominant étant le plus voisin du cercle unité et assez éloigné des trois autres pôles.

5-18. Déterminer une commande numérique pour le système

$$G_p(s) = \frac{s+2}{s(s+1)(s+4)}$$

de sorte que la fréquence de coupure de gain soit autour de $\omega_{cg} = 10$ rad/sec, la période d'échantillonnage étant $T = 0.1$ sec. Que sera la marge de phase MP ? Estimer la marge de gain MG et l'erreur stationnaire de vitesse.

Transmittance du système commandé précédé d'un bloqueur

```
>> np = -2; dp = [0 -1 -4];
>> Gp = zpk(np,dp,1);
>> Gpz = c2d(Gp,0.1)
```

Gpz =

$$0.0045425 (z-0.8187) (z+0.9051)$$

$$(z-1) (z-0.9048) (z-0.6703)$$

Sample time: 0.1 seconds

Discrete-time zero/pole/gain model.

Remplacement de z par son approximation de Tustin

$$\frac{(2/T+s)/(2/T-s)}{s} \Big|_{s=v}$$

```
>> Gpv = d2c(Gpz,'tustin')
```

Gpv =

$$-0.00012324 (s+1.993) (s-20) (s+401.4)$$

$$s (s+0.9992) (s+3.948)$$

Continuous-time zero/pole/gain model

où la lettre « s » sera remplacé par « v ». La fréquence de coupure de gain désirée du système numérique devant être voisine de 10 rd/s, on détermine d'abord la valeur d'une constante k qui hausse la courbe de gain de kG_{pv} pour rapprocher sa fréquence de coupure de gain de

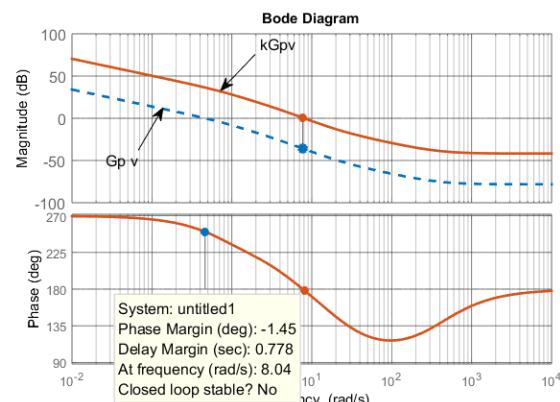
$$\omega_{cgv} = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega_c T}{2} = 20 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \approx 10.93 \text{ rd/s.}$$

Ensuite, pour satisfaire l'exigence concernant la robustesse, on ajoute en série avec le gain k un compensateur dont le gain à faible fréquence est égal à 1 et qui ramène ω_{cgv} autour de 10.93 rd/s.

Calculons k à partir du diagramme de Bode de G_{pv} . On lit sur ce diagramme que ω_{cgv} sera légèrement plus petite que 10.93 rd/s, disons 8 rd/s, si l'on hausse la courbe de gain de 36.4 db c.à.d. si l'on multiplie G_{pv} par

$$k = 10^{36.4/20} \approx 66.$$

Le diagramme de kG_{pv} montre que le système sera instable avec une marge de phase $MP \approx -1.45^\circ$.



Or, un compensateur AP, $G_{ap}(v) = a(v + 1/\tau)/(v + a/\tau)$ (qui tend vers 1 quand $v \rightarrow 0$) augmente la phase de $\varphi_m = \arcsin(a-1)/(a+1)$ et le gain de $a^{1/2}$ à la fréquence $\omega_m = a^{1/2}/\tau$. En prenant $\omega_m = 11$ rd/s ou le gain de kG_{pv} est -4.72 db et sa phase est 167°, la fréquence de coupure de gain devient $\omega_{cgv} = \omega_m = 11$ rd/s si

$$a = 10^{(4.72/10)} = 2.96$$

$$\Rightarrow \varphi_m = \arcsin[(a-1)/(a+1)] = 29.7^\circ$$

$$\text{et } MP = 167 + 29.7 - 180 = 16.7^\circ.$$

$$1/\tau = \omega_m / \sqrt{a} = 11 / \sqrt{2.96} = 6.39 \text{ s}^{-1}.$$

Cette marge de phase est faible mais en l'acceptant, l'organe de commande du système continu G_{pv} est

$$G_{cv}(v) = k \cdot G_{ap}(v) \approx 66(2.96) \frac{v+6.39}{v+6.39(2.96)}$$

$$\Rightarrow G_{cv}(v) = 155.36 \frac{v+6.39}{v+18.9}.$$

L'organe de commande discret s'obtient en remplaçant v par sa transformation homographique de Tustin $v = (2/T)(z-1)/(z+1)$ ou par l'instruction

```
>> Gc = c2d(Gcv,0.1,'tustin')
```

Gc =

$$132.74 (z-0.5158)$$

$$(z-0.02721)$$

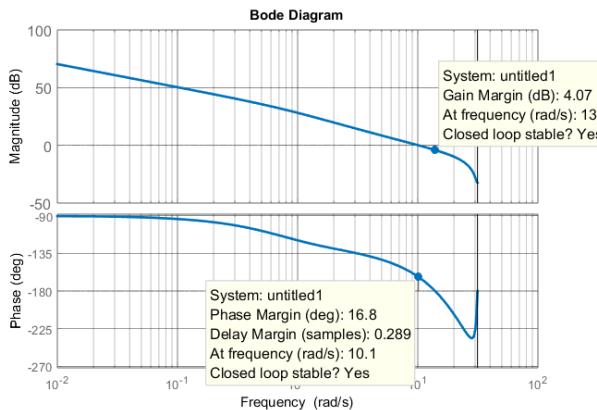
Sample time: 0.1 seconds

Discrete-time zero/pole/gain model.

Sample time: 0.1 seconds

Le diagramme de Bode de la boucle ouverte du système discret montre que la fréquence de coupure de gain est égale à la valeur demandée 10 rad/s et que les marges de stabilité sont égales aux valeurs prévues.

```
>> bode(Gc*Gpz)
```



5-19. En choisissant une période d'échantillonnage $T = 0.1$ sec, déterminer une commande numérique du système

$$G_p(s) = \frac{s-1}{s^2 - 4}$$

- 1) par la méthode déductive,
- 2) par l'algorithme de Kalman.

Représenter dans chaque cas le signal de commande

1) Méthode déductive

Commençons par obtenir $G_{pz}(z) = Z[B_0 G_p(s)]$.

```
>> np = 1; dp = [2 -2]; kp = 1;
>> Gp = zpk(np,dp,kp);
>> Gpz = c2d(Gp,0.1)
```

$$\begin{aligned} G_{pz} = \\ 0.095651(z-1.105) \\ \hline (z-1.221)(z-0.8187) \end{aligned}$$

Sample time: 0.1 seconds

Discrete-time zero/pole/gain model.

Le zéro instable 1.105 de G_{pz} devant être un zéro de la boucle fermée, la transmittance de cette boucle est de la forme :

$$T = \frac{(z-1.105)Q(z)}{P(z)}$$

où les racines du polynôme $P(z)$ sont toutes à l'intérieur du cercle unité.

Le pôle instable 1.221 de G_{pz} devant être un zéro de la fonction $(1 - T)$, il est une racine du polynôme $P(z) - (z - 1.105)Q(z)$.

L'excès des pôles de G_{pz} étant 1, le plus simple est de prendre $Q(z) = c = c^{te}$ et $P(z)$ un polynôme de second degré, d'où

$$T(z) = \frac{c(z-1.105)}{(z-p_1)(z-p_2)}.$$

Choisissons p_1 et p_2 conjugués à l'intérieur du cercle unité de constante de temps $\tau = 0.25$ sec et de fréquence d'oscillation $\omega_a = 2\pi$ rad/sec. Ces pôles sont donc $p_{1,2} = pe^{\pm j\varphi}$ avec

$$\rho = e^{-T/\tau} = e^{-0.4} = 0.67 \quad \text{et} \quad \varphi = \omega_a T = 0.2\pi.$$

$$\Rightarrow p_{1,2} = \rho(\cos \varphi \pm j \sin \varphi) = 0.5423 \pm 0.3940j$$

$$\Rightarrow P(z) = z^2 - 2(0.5423)z + (0.67)^2$$

$$= z^2 - 1.0846z + 0.4489.$$

Le pôle instable 1.221 de G_{pz} devant être racine de $P(z) - (z - 1.105)c$, on tire

$$c = \frac{(1.221)^2 - 1.0846(1.221) + 0.4489}{1.221 - 1.105} = 5.3077.$$

Ainsi

$$T = \frac{5.3077(z-1.105)}{z^2 - 1.0846z + 0.4489}$$

La transmittance de l'organe de commande est

```
>> Gc = T/((1-T)*Gpz);
```

$$G_c(z) = \frac{55.506(z-0.8187)}{(z-5.173)}$$

et la transmittance $u(z)/r(z)$ entre la référence et le signal de commande est

```
>> H=Gc/(1+Gc*Gpz);
```

$$H(z) = \frac{55.506(z-0.8187)(z-1.221)}{(z^2 - 1.085z + 0.4523)}.$$

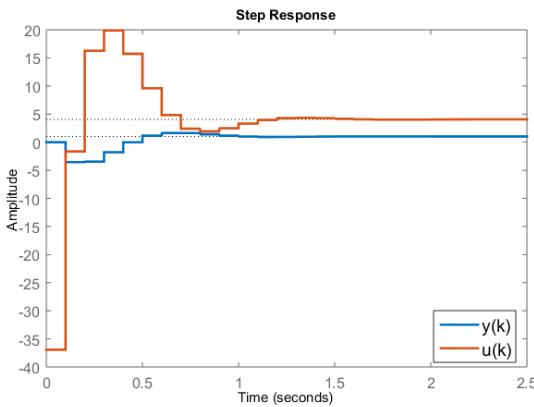
Enfin pour annuler l'erreur stationnaire, on introduit un préamplificateur k telle que $kT(1) = 1$, d'où

$$k = \frac{1 - 1.0846 + 0.4489}{5.3077(1 - 1.105)} = -0.6533.$$

L'instruction suivante représente la réponse indicielle $y(k)$ et le signal de commande $u(k)$ dans le même plan

```
>> step(k*T,k*H)
```

Les exigences $\sigma = t_s/4.6 \approx 0.25$ sec et $\omega_a = 2\pi f \approx 2\pi$ sont satisfaites mais la commande par cette politique est très forte pouvant saturer les actionneurs. D'autre part, comme le type du système commandé G_{pz} est $n_0 = 0$, il est nécessaire de lui appliquer une action u non nulle pour maintenir l'erreur stationnaire e_{sp} nulle.



2) Algorithme de Kalman.

L'équation récurrente correspondante à

$$G_{pz}(z) = \frac{0.095651(z-1.105)}{(z-1.221)(z-0.8187)}$$

est

$$y_{k+2} - a_1 y_{k+1} + a_0 y_k = b_1 u_{k+1} - b_0 u_k$$

avec

$$a_1 = 1.221 + 0.8187 = 2.0397$$

$$a_0 = (1.221)(0.8187) = 0.9996 \approx 1$$

$$b_1 = 0.095651,$$

$$b_0 = (0.095651)(1.105) = 0.1057$$

et les contraintes

$$y_k = \begin{cases} 0 & \forall k \leq 0 \\ 1 & \forall k \geq 2 \end{cases}, u_k = \begin{cases} 0 & \forall k < 0 \\ u_L & \forall k \geq 2 \end{cases}$$

$$u_L = \frac{1 - a_1 + a_0}{b_1 - b_0} = 3.9894 \quad \forall k \geq 2.$$

Il reste 3 inconnues, y_1 , u_0 et u_1 qui doivent vérifier les 3 équations relatives à $k = -1$, 0 et 1 :

$$y_1 - a_1(0) + a_0(0) = b_1 u_0 - b_0(0),$$

$$1 - a_1 y_1 + a_0(0) = b_1 u_1 - b_0 u_0,$$

$$1 - a_1(1) + a_0 y_1 = b_1 u_L - b_0 u_1.$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -b_1 \\ -a_1 & -b_1 & b_0 \\ a_0 & b_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ b_1 u_L + a_1 - 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ou } Mx = b \Rightarrow x = M^{-1}b.$$

Donc

```
>> x = inv(M)*b
```

$x =$

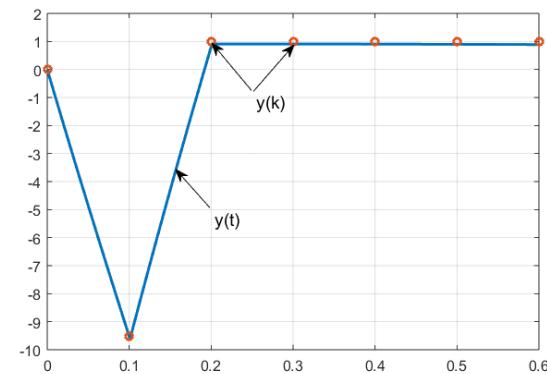
$$-9.5238 = y_1$$

$$103.5212 = u_1$$

$$-99.5683 = u_0$$

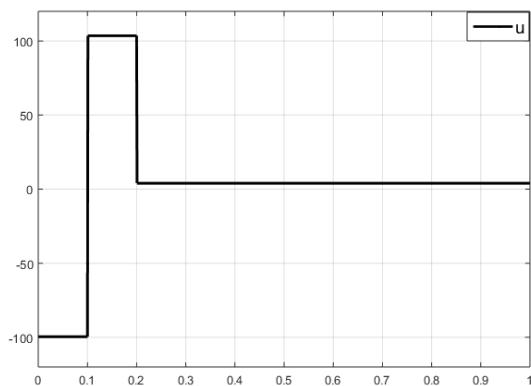
Pour la clarté et à cause des grandes valeurs du signal de commande, nous représentons dans un plan la réponse analogique $y(t)$ et son échantillonnage $y(k)$ et dans un autre plan le signal de commande $u(t)$.

```
>> t = 0:0.001:1;
>> u = u0*(t<=0.1)+u1*(t>0.1&t<=0.2)+uL*(t>0.2);
>> Gp = zpk(1,[2 -2],1);
>> [y,t,x]=lsim(Gp,u,t);
>> plot(t,y)
>> hold
Current plot held
>> k = 0:0.1:1;
>> yk = y1*(k==0.1) + 1*(k>0.1);
>> plot(k,yk,'o')
```



```
>> hold off
```

```
>> plot(t,u)
```



Le grand dépassement de y et les grandes valeurs de u sont causés par le zéro et le pôle instables de G_p . Pour la méthode déductive ou l'algorithme de Kalman il est important d'examiner si le signal de commande ne sature pas les actionneurs surtout lorsque le système commandé comporte un zéro et/ou un pôle instable.